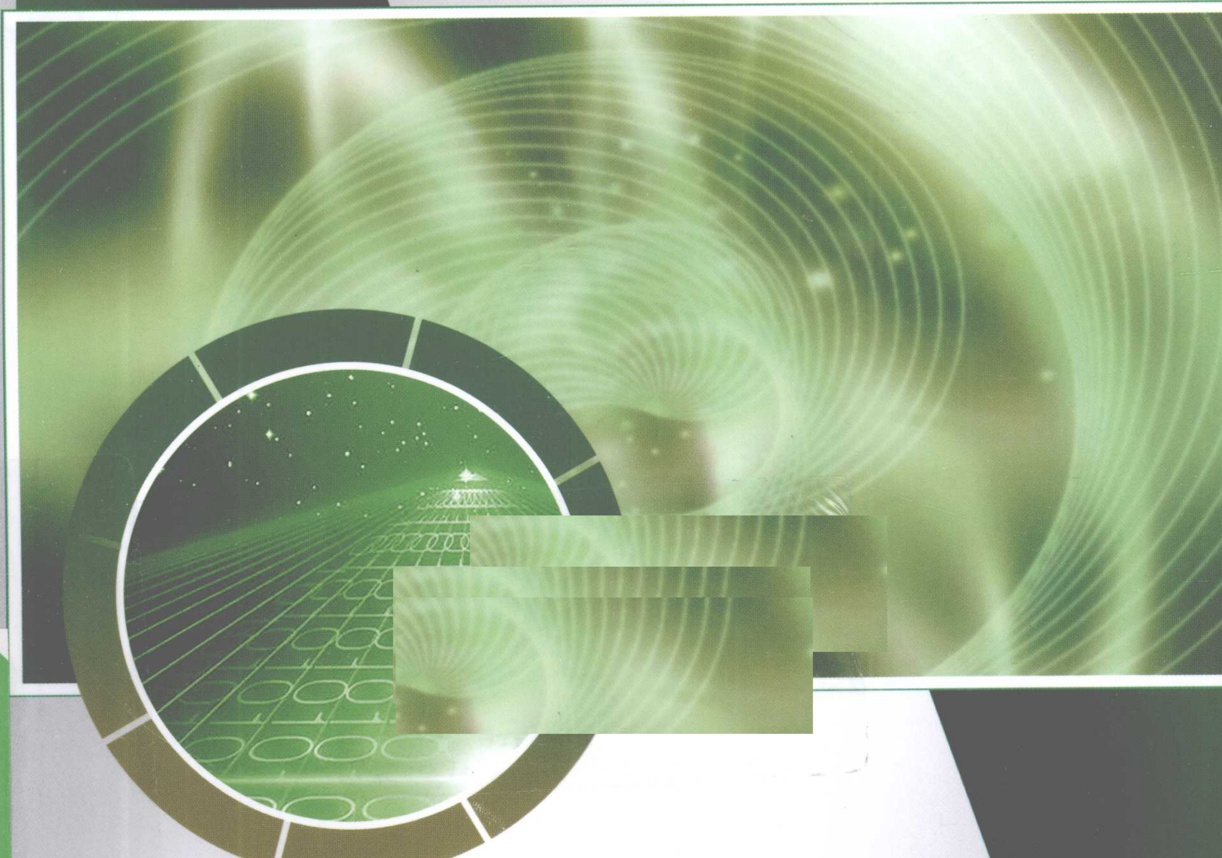
中国科学院“十一五”规划教材

经·济·管·理·类·数·学·基·础·系·列

微积分

主编　党高学　韩金仓



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院“十一五”规划教材·经济管理类数学基础系列

微　积　分

主　编　党高学　韩金仓

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是中国科学院“十一五”规划系列教材.全书包括十章内容:函数及其图形、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程初步及差分方程.

本书体系完整,逻辑清晰,深入浅出,便于自学,既可作为高等学校经济类、管理类专业和其他相关专业微积分课程的教材或教学参考书,也可供报考研究生者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/党高学,韩金仓主编.—北京:科学出版社,2010.8
(中国科学院“十一五”规划教材·经济管理类数学基础系列)
ISBN 978-7-03-028529-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①党…②韩… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 154683 号

责任编辑:李鹏奇 滕亚帆 / 责任校对:鲁 素
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张:25 1/2
印数:1—9 000 字数:510 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

总　　序

“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”，由多年从事数学教学实践的教师编写而成，包括《微积分》、《线性代数》及《概率论与数理统计》.

为了保证本系列教材的教学适用性，在编写过程中，我们对近年来国内外出版的同类教材的特点进行了比较和分析，在教材体系、内容安排、写作特点和例题配置等方面汲取了它们的优点. 本系列教材的特点如下：

(1) 在教材内容安排上进行了适当的取舍，避免了偏多、偏深的弊端.

(2) 考虑目前教学学时普遍较少的实际，力求在体系、内容上既符合数学学科本身的特点，又兼顾报考研究生学生的需要.

(3) 内容简明扼要，深入浅出，语言准确，易于阅读.

(4) 从体系、内容和方法上进行了改革，有所创新，恰到好处地反映一些现代数学的思想.

(5) 教材内容在现行“经济管理类数学基础课程教学基本要求”的基础上略有拓宽和加深，以满足近年来高校部分新增专业对数学基础的更高要求，强化了理论与实际的结合.

(6) 习题配置合理，难易适度，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国硕士研究生入学统一考试中的部分优秀试题，如 1998 年考研真题用(1998)表示，2009 年考研真题用(2009)表示. 每章后的习题均分为(A)、(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习.

各章中标有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或供读者自学用.

本系列教材在编写过程中得到了科学出版社高等教育出版中心领导的大力支持，科学出版社高等教育出版中心李鹏奇副编审、院校代表马玉龙及其他工作人员在出版过程中做了大量的工作，编委会在此对他们表示由衷的感谢！

虽然我们希望编写一套质量较高、适合当前教学实际需要的教材，但限于水平，教材中仍可能有未尽人意之处，敬请读者不吝指正.

丛书编委会

2010 年 3 月

前　言

本书是“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”教材之一，是全国高等学校教学研究中心“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的研究成果. 本书由多年从事数学教学实践的教师，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学(三)》考试大纲的要求，按照继承与改革的精神编写而成.

微积分的理论和方法广泛地应用于自然科学、工程技术和社会科学的各个领域，它不仅是一种工具、一种知识、一种科学，更是一种思维模式、一种素养、一种文化. 学习和掌握微积分，不仅是对理工类学生的要求，也是对经济管理类、人文科学等各类学生的基本要求和必备素养.

为了使微积分教学生动实用、调动学生的学习积极性，本书在编写过程中按循序渐进、逐步过渡的原则，力图使学生克服数学学习上的畏难心理. 如从几何直观现象出发，引入极限、导数和积分等微积分基本概念，从特殊到一般，在理论上进行归纳整理，得到一般的方法和结论，再由一般到特殊，将微积分与经济管理中的具体问题结合起来进行分析，为学生掌握数学分析的方法打下良好基础.

另外，从实际需要出发，本书注重数学思想的介绍和数学方法的应用，在例题、习题中添加了一些经济应用实例，以培养学生分析解决实际问题的兴趣和能力.

本书由党高学副教授、韩金仓教授主编. 第 1、2 章由党高学编写，第 4 章由韩金仓编写，第 5、6 章由马育英编写，第 3、7 章由张明军编写，第 8、9、10 章由潘黎霞编写，全书由主编统稿定稿.

由于编者水平有限，书中疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2010 年 3 月

目　　录

第 1 章　函数及其图形

函数是客观世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是微积分研究的对象，它处于基础的核心地位. 在自然科学、工程技术、经济管理，甚至社会科学中，函数是广泛应用的概念，其重要意义远远超出了数学范围. 本章首先引进函数的概念，然后重点讨论基本初等函数及其图形，最后介绍经济学中的几个常用函数.

1.1　函　　数

1.1.1　实数及其几何表示

函数概念是建立在实数集合基础之上的，凡能表示为形如$\frac{p}{q}$(其中 p,q 都是整数，且 $q\neq0$)的数称为**有理数**，凡不能表示为这种分数的数称为**无理数**. 有理数和无理数统称为**实数**. 全体实数组成的集合简称为**实数集**，记为 **R**.

规定了原点、正方向和单位长度的直线称为**数轴**，如图 1.1 所示.

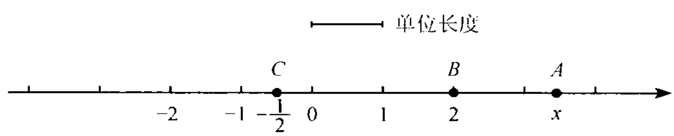


图 1.1

对任意实数 x，在数轴上自原点 O 起向右或向左(视 x 为正或负)截取一线段 OA，使其长度与单位长度的比值恰等于 $|x|$，则得到数轴上唯一一个点 A，称点 A 为实数 x 的几何表示，而实数 x 叫做点 A 的**坐标**. 如图 1.1 中点 B 表示实数 2；点 C 表示 $-\frac{1}{2}$. 反之，数轴上任一点一定表示某个实数，即它一定是以某个实数为坐标的点.

因此，全体实数和数轴上的全体点一一对应，以后把点 A 与它的坐标 x 等同起来而不加区别. 比如数 2 与点 2 是一样的.

点 x 到原点的距离用 $|x|$ 表示，读作实数 x 的**绝对值**，显然

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

两点 x,y 的距离为 $|x-y|$.

绝对值有如下性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$.

(2) $|x|\geqslant 0$；且 $|x|=0\Leftrightarrow x=0$.

(3) $|-x|=|x|$.

(4) 若 $a>0$，则 $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

(5) $|xy|=|x||y|$；$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$.

(6) $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$.

微积分是建立在实数论的基础之上的，本书如无特殊说明，一切数、数集和变量的取值等等均在实数范围内考虑.

1.1.2　区间和邻域

区间和**邻域**是用的较多的两个概念，它们都是实数集 $\mathbf{R}$ 的某种特殊子集.

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，把数轴上介于点 a 和点 b 之间但不包含 a,b 两点的全部点构成的集合称为以 a,b 为端点的**开区间**(图 1.2)，用记号 (a,b) 表示，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

把介于两点 a 和 b 之间且包含两点 a 与 b 的全部点的集合称为以 a,b 为端点的**闭区间**(图 1.3)，用记号 $[a,b]$ 表示，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

图 1.2

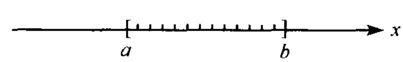


图 1.3

同样，数集 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 与 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 称为**半闭半开区间**(图 1.4，图 1.5).

图 1.4

图 1.5

以上 4 个区间都叫**有限区间**，它们的长度均为 $b-a$.

下列 5 个区间称为**无限区间**：

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

在不需要辨明所论区间是否包含端点以及是否为有限区间的场合，我们就简称它为**区间**，且常用 I 表示.

设 x_0 是一定点，$\delta>0$，集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 在数轴上表示以点 x_0 为中心以 2δ 为长度的开区间，称此区间为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，x_0 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**(图 1.6)，即

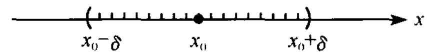


图 1.6

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

因 $|x-x_0|$ 表示 x 与 x_0 的距离，所以 $U(x_0,\delta)$ 表示到点 x_0 的距离小于 δ 的所有点的集合. 例如，$U(3,0.1)=\{x \mid |x-3|<0.1\}=(2.9,3.1)$ 表示以 3 为中心，0.1 为半径的邻域. 再如点 -4 的 1 的邻域是 $U(-4,1)=\{x \mid |x+4|<1\}=(-5,-3)$.

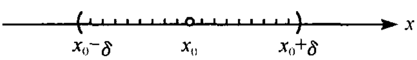


图 1.7

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的 δ **去心邻域**(图 1.7)，记为

$$\mathring{U}(x_0,\delta),$$

即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta),$$

$(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的**左半邻域**，$(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的**右半邻域**.

例如，$\mathring{U}\left(5,\frac{1}{2}\right)=\left\{x \,\middle|\, 0<|x-5|<\frac{1}{2}\right\}=(4.5,5)\cup(5,5.5)$ 即为到点 5 的距离小于 $\frac{1}{2}$ 且大于零的所有点的集合.

在不需要指明邻域的半径时，邻域和去心邻域简记为 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$.

1.1.3 变量和常量

在实际生活中，我们经常遇到各种各样的量. 例如，时间、速度、距离、面积、体积、温度、质量、产量、价格和利润等. 在同一问题中遇到的各种不同的量，它们所处的状态是不尽相同的，有些量在过程的进行中是不断变化的，即可以取不同的数值，这样的量称为**变量**；有些量在过程中始终保持不变，即只取一个数值，这样的量称为**常量**.

例如，在自由落体运动中，我们遇到的量有时间 t、速度 v、加速度 g、下落的距离 s、物体的质量 m 和体积 V 等，其中 t,v,s 均为变量，g,m,V 均为常量.

习惯上，常用 $x,y,z,t,u,v,\cdots$ 等字母表示变量，而常量则用 $a,b,c,\cdots$ 等字母表示.

变量所可能取到的每一个数值称为变量的一个值，变量所可能取到的数值的全体叫做变量的**取值范围**或**变化范围**.

1.1.4　函数的基本概念

在同一问题中,往往有几个变量在共同变化着,但它们的变化并不是彼此无关各自孤立地变化,而是遵循一定的法则(或者规律)相互依赖、相互制约地变化着.这是物质世界的一个普遍规律.

我们就两个变量的情形考察几个例子.

例 1　球的体积 V 和半径 r 按照法则

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

变化着.具体地说,就是体积 V 随半径 r 的变化而变化,随 r 的取定而取定,当半径 r 在它的取值范围 $D=(0,+\infty)$ 内任取一个值时,按照此法则都能确定唯一的 V 值.

例 2　自由落体运动中,物体下落的距离 s 与下落的时间 t 遵循法则

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

变化着,下落距离 s 随时间 t 的变化而变化,随时间 t 的取定而取定,当 t 在它的取值范围 $D=[0,T]$(物体着地时刻为 T)上取每一个数值时,按此法则,s 的值就被唯一确定.

例 3　设某商品的价格为 5 元/件,则销售收入 R 与销售量 Q 按照法则

$$R = 5Q$$

变化着,R 随 Q 的变化而变化,随 Q 的取定而取定,当 Q 取每一个可能数值时,按此法则,R 的值就被唯一确定.

抽去上述三例中变量的实际意义,就会发现它们的共同之处:同一个问题中的两个变量都是由某种法则联系着,当其中一个变量在它的取值范围内取定每一个数值时,根据此法则都能唯一地确定另外一个变量的数值,两个变量的这种对应关系就是函数概念的实质.

由此,我们抽象出函数定义.

定义 1.1　设 x,y 是两个变量,x 的取值范围是非空数集 D,f 是某个对应法则.如果对每一个 $x\in D$,按照此法则 f 都能确定唯一的一个 y 值与之对应(把与 x 对应的这个 y 值称为 x 在 f 下的像,记为 $f(x)$,即 $y=f(x)$),则称此对应法则 f 为定义于 D 上的**函数**,或称变量 y 是变量 x 的函数,记为

$$y = f(x),\quad x \in D.$$

x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或函数,D 称为函数的**定义域**,常记为 D_f,D_f 中每个数 x 在 f 下的像 $f(x)$(即对应的 y 值),也称为函数在点 x 处的**函数值**,全体函数值的集合称为函数的**值域**,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

例 4　下列 x 与 y 的对应法则是否为所给数集上的函数.