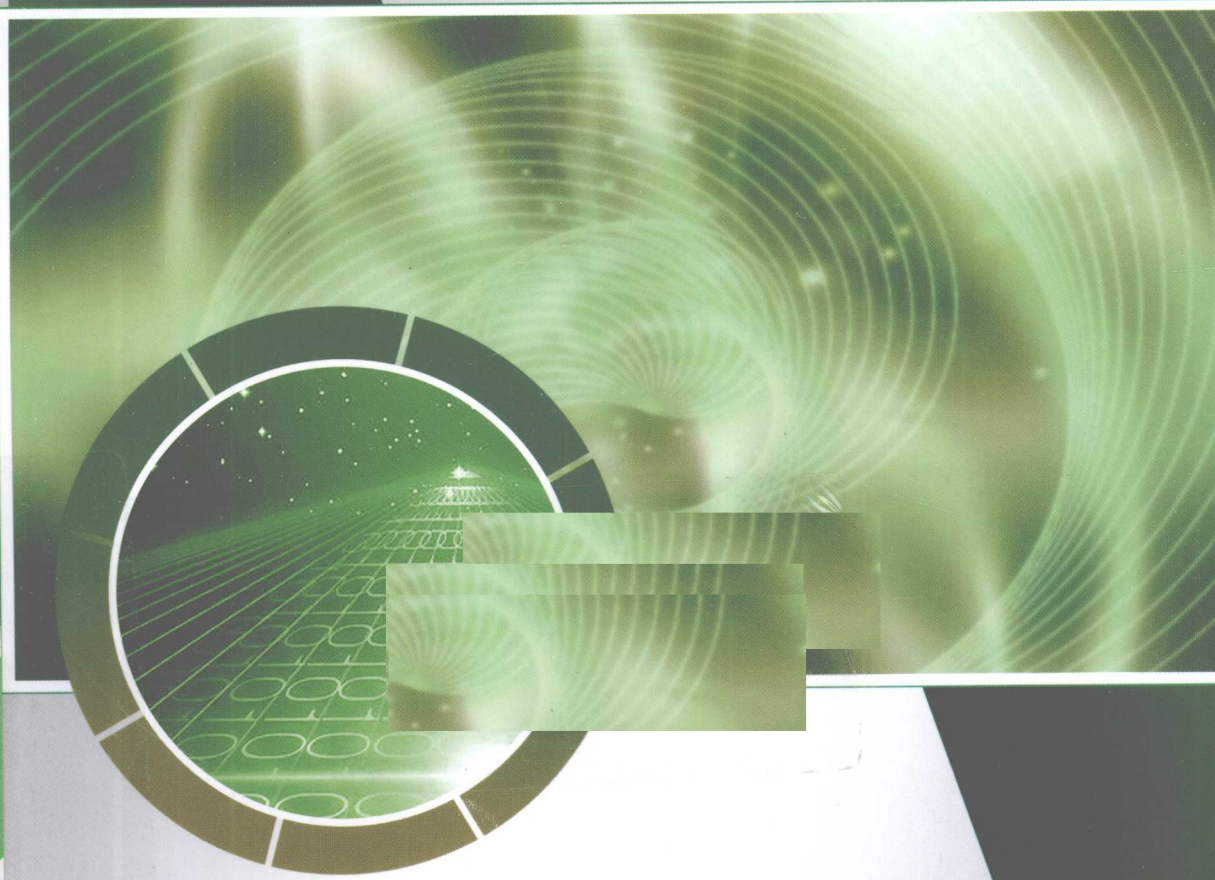


中国科学院“十一五”规划教材

经·济·管·理·类·数·学·基·础·系·列

微 积 分

主编 党高学 韩金仓



科学出版社

www.sciencep.com

中国科学院“十一五”规划教材·经济管理类数学基础系列

微 积 分

主 编 党高学 韩金仓

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是中国科学院“十一五”规划系列教材,全书包括十章内容:函数及其图形、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程初步及差分方程。

本书体系完整,逻辑清晰,深入浅出,便于自学,既可作为高等学校经济类、管理类专业和其他相关专业微积分课程的教材或教学参考书,也可供报考研究生者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/党高学,韩金仓主编. —北京:科学出版社,2010.8
(中国科学院“十一五”规划教材·经济管理类数学基础系列)
ISBN 978-7-03-028529-4

I. ①微… II. ①党…②韩… III. ①微积分-高等学校-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 154683 号

责任编辑:李鹏奇、滕亚帆 / 责任校对:鲁 素
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市农林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2010年8月第一次印刷 印张:25 1/2

印数:1—9 000 字数:510 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

中国科学院“十一五”规划教材·经济管理类数学基础系列

丛书编委会

主 任 韩金仓

副主任 李振东 李伯德 党高学

委 员 (按姓氏拼音排序)

金志龙 李金林 李战存 马育英

潘黎霞 张力远 张明军 张再玲

总 序

“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”，由多年从事数学教学实践的教师编写而成，包括《微积分》、《线性代数》及《概率论与数理统计》。

为了保证本系列教材的教学适用性，在编写过程中，我们对近年来国内外出版的同类教材的特点进行了比较和分析，在教材体系、内容安排、写作特点和例题配置等方面汲取了它们的优点。本系列教材的特点如下：

(1) 在教材内容安排上进行了适当的取舍，避免了偏多、偏深的弊端。

(2) 考虑目前教学学时普遍较少的实际，力求在体系、内容上既符合数学学科本身的特点，又兼顾报考研究生学生的需要。

(3) 内容简明扼要，深入浅出，语言准确，易于阅读。

(4) 从体系、内容和方法上进行了改革，有所创新，恰到好处地反映一些现代数学的思想。

(5) 教材内容在现行“经济管理类数学基础课程教学基本要求”的基础上略有拓宽和加深，以满足近年来高校部分新增专业对数学基础的更高要求，强化了理论与实际的结合。

(6) 习题配置合理，难易适度，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国硕士研究生入学统一考试中的部分优秀试题，如1998年考研真题用(1998)表示，2009年考研真题用(2009)表示。每章后的习题均分为(A)、(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习。

各章中标有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或供读者自学用。

本系列教材在编写过程中得到了科学出版社高等教育出版中心领导的大力支持，科学出版社高等教育出版中心李鹏奇副编审、院校代表马玉龙及其他工作人员在出版过程中做了大量的工作，编委会在此对他们表示由衷的感谢！

虽然我们希望编写一套质量较高、适合当前教学实际需要的教材，但限于水平，教材中仍可能有未尽人意之处，敬请读者不吝指正。

丛书编委会

2010年3月

前 言

本书是“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”教材之一,是全国高等学校教学研究中心“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的研究成果.本书由多年从事数学教学实践的教师,根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学(三)》考试大纲的要求,按照继承与改革的精神编写而成.

微积分的理论和方法广泛地应用于自然科学、工程技术和社会科学各个领域,它不仅是一种工具、一种知识、一种科学,更是一种思维模式、一种素养、一种文化.学习和掌握微积分,不仅是对理工类学生的要求,也是对经济管理类、人文科学等各类学生的基本要求和必备素养.

为了使微积分教学生动实用、调动学生的学习积极性,本书在编写过程中按循序渐进、逐步过渡的原则,力图使学生克服数学学习上的畏难心理.如从几何直观现象出发,引入极限、导数和积分等微积分基本概念,从特殊到一般,在理论上进行归纳整理,得到一般的方法和结论,再由一般到特殊,将微积分与经济管理中的具体问题结合起来进行分析,为学生掌握数学分析的方法打下良好基础.

另外,从实际需要出发,本书注重数学思想的介绍和数学方法的应用,在例题、习题中添加了一些经济应用实例,以培养学生分析解决实际问题的兴趣和能力.

本书由党高学副教授、韩金仓教授主编.第1、2章由党高学编写,第4章由韩金仓编写,第5、6章由马育英编写,第3、7章由张明军编写,第8、9、10章由潘黎霞编写,全书由主编统稿定稿.

由于编者水平有限,书中疏漏及不妥之处在所难免,恳请读者及专家学者批评指正.

编 者

2010年3月

目 录

总序

前言

第 1 章 函数及其图形	1
1.1 函数	1
1.1.1 实数及其几何表示	1
1.1.2 区间和邻域	2
1.1.3 变量和常量	3
1.1.4 函数的基本概念	4
1.1.5 函数的几何表示——图像	7
1.2 函数的几种特性	10
1.2.1 奇偶性	10
1.2.2 单调性	11
1.2.3 有界性	12
1.2.4 周期性	12
1.3 反函数与复合函数	12
1.3.1 反函数	12
1.3.2 复合函数	15
1.4 初等函数	15
1.4.1 基本初等函数	15
1.4.2 初等函数	15
1.4.3 基本初等函数的性质及其图形	16
1.5 经济中的几个常用函数	19
1.5.1 总成本函数	19
1.5.2 总收益函数	20
1.5.3 总利润函数	20
1.5.4 需求函数	21
1.5.5 供应函数	22
习题 1	22
第 2 章 极限与连续	26
2.1 数列及其极限	26

2.1.1 数列	26
2.1.2 数列的极限	27
2.2 函数的极限	31
2.2.1 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的极限	32
2.2.2 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限	36
2.3 变量的极限、极限的性质	40
2.3.1 变量的极限	40
2.3.2 极限的性质	41
2.4 无穷小量和无穷大量	43
2.4.1 无穷小量和无穷大量的概念	43
2.4.2 无穷小量的性质	44
2.4.3 无穷小量的阶	45
2.5 极限的运算法则	46
2.6 极限存在的两个准则, 两个重要极限	53
2.6.1 极限存在的两个准则	53
2.6.2 两个重要极限	54
2.7 利用等价无穷小量因子代换求极限	60
2.7.1 三组常用的等价无穷小量	60
2.7.2 利用等价无穷小量因子代换求极限	60
2.8 函数的连续性	63
2.8.1 函数的改变量(或增量)	63
2.8.2 函数连续性的概念	64
2.8.3 函数的间断点及其分类	66
2.8.4 连续函数的运算法则	68
2.8.5 连续函数的极限	70
2.8.6 闭区间上连续函数的性质	70
习题 2	72
第 3 章 导数与微分	78
3.1 导数概念	78
3.1.1 引出导数概念的实例	78
3.1.2 导数的定义	79
3.1.3 单侧导数	80
3.1.4 用导数的定义计算导数	81
3.1.5 导数的几何意义	83
3.1.6 可导与连续的关系	83

3.2 求导法则	84
3.2.1 导数的四则运算法则	85
3.2.2 反函数的求导法则	87
3.2.3 复合函数的求导法则	88
3.3 基本初等函数的求导公式	91
3.3.1 基本初等函数的导数公式	91
3.3.2 函数的和、差、积和商的求导法则	91
3.3.3 复合函数的求导法则	92
3.4 隐函数求导数与对数求导法	92
3.4.1 隐函数的导数	92
3.4.2 对数求导法	93
3.5 高阶导数	95
3.6 微分	99
3.6.1 微分的定义	99
3.6.2 微分的几何意义	101
3.6.3 微分的基本公式与运算法则	101
3.6.4 微分在近似计算中的应用	103
习题 3	104
第 4 章 微分中值定理与导数的应用	109
4.1 微分中值定理	109
4.1.1 罗尔定理	109
4.1.2 拉格朗日中值定理	112
4.1.3 柯西中值定理	114
4.2 洛必达法则	115
4.2.1 洛必达法则	115
4.2.2 其他不定式	119
4.3 函数的单调性与极值	122
4.3.1 函数的单调增减区间与极值的求法	122
4.3.2 极值的应用	127
4.4 曲线的凹向与拐点	130
4.4.1 凹向与拐点的概念	130
4.4.2 凹向与拐点的判别定理	131
4.4.3 求曲线的上下凹区间及拐点的一般方法(步骤)	133
4.5 函数图形的作法	134
4.5.1 曲线的渐近线	134

4.5.2 函数图形的作法	137
4.6 导数在经济学中的应用	139
4.6.1 函数的变化率——边际函数	139
4.6.2 函数的相对变化率——函数的弹性	141
习题 4	143
第 5 章 不定积分	150
5.1 不定积分的概念	150
5.1.1 原函数的概念	150
5.1.2 不定积分	151
5.2 不定积分的基本公式和运算法则	153
5.2.1 基本积分表	153
5.2.2 不定积分的运算法则	154
5.3 换元积分法	157
5.3.1 第一换元法(凑微分法)	157
5.3.2 第二换元法	160
5.4 分部积分法	168
5.5 有理函数的积分	172
5.5.1 化有理真分式为部分分式之和	172
5.5.2 有理函数的积分	173
习题 5	176
第 6 章 定积分	181
6.1 定积分的概念	181
6.1.1 定积分概念的引入——两个实例	181
6.1.2 定积分的概念	183
6.2 定积分的性质	185
6.3 微积分基本定理	189
6.3.1 原函数存在定理	189
6.3.2 牛顿-莱布尼茨公式	193
6.4 定积分的换元积分法	195
6.5 定积分的分部积分法	200
6.6 定积分的应用	202
6.6.1 平面图形的面积	202
6.6.2 立体的体积	205
6.7 广义积分及 Γ 函数	210
6.7.1 无穷限积分	210

6.7.2 无界函数的积分(瑕积分)	212
6.7.3 Γ 函数	215
习题 6	216
第 7 章 多元函数微积分	224
7.1 空间解析几何基础知识	224
7.1.1 空间直角坐标系	224
7.1.2 空间两点间的距离	225
7.1.3 空间曲面及其方程	226
7.2 多元函数的基本概念	230
7.2.1 平面点集与区域	230
7.2.2 多元函数概念	232
7.2.3 二元函数的极限与连续	234
7.2.4 二元函数的连续性	235
7.3 偏导数	236
7.3.1 偏导数	236
7.3.2 高阶偏导数	240
7.4 全微分	241
7.4.1 全微分的定义	241
7.4.2 全微分在近似计算中的应用	245
7.5 多元复合函数微分法与隐函数微分法	246
7.5.1 复合函数的微分法	246
7.5.2 全微分形式不变性	250
7.5.3 隐函数的微分法	251
7.6 多元函数的极值与最值	253
7.6.1 多元函数极值与最值	253
7.6.2 条件极值与拉格朗日乘数法	256
7.7 二重积分	259
7.7.1 二重积分的概念	259
7.7.2 二重积分的性质	262
7.7.3 二重积分的计算	263
习题 7	275
第 8 章 无穷级数	283
8.1 常数项级数的概念和性质	283
8.1.1 常数项级数的概念	283
8.1.2 级数的基本性质	286

8.2 正项级数	289
8.3 任意项级数	298
8.3.1 交错级数	298
8.3.2 绝对收敛与条件收敛	299
8.4 幂级数	303
8.4.1 函数项级数的概念	303
8.4.2 幂级数	304
8.4.3 幂级数的基本性质	308
8.5 函数的幂级数展开	310
8.5.1 泰勒公式与泰勒级数	310
8.5.2 某些初等函数的幂级数展开	311
习题 8	315
第 9 章 微分方程初步	322
9.1 微分方程的基本概念	322
9.1.1 微分方程的定义	322
9.1.2 微分方程的解	324
9.2 一阶微分方程	325
9.2.1 可分离变量方程	325
9.2.2 齐次微分方程	326
9.2.3 一阶线性微分方程	328
9.3 高阶微分方程	331
9.3.1 几种特殊的高阶微分方程	332
9.3.2 二阶线性微分方程	334
9.4 微分方程在经济学中的应用	340
9.4.1 人口模型	341
9.4.2 价格调整模型	342
9.4.3 Horrod-Domer 经济增长模型	343
习题 9	343
第 10 章 差分方程	349
10.1 差分方程的基本概念	349
10.1.1 差分概念	349
10.1.2 差分方程	350
10.1.3 差分方程的解	351
10.1.4 线性差分方程	352
10.2 一阶常系数线性差分方程	353

10.2.1 齐次方程的通解	354
10.2.2 非齐次方程的特解与通解	354
10.3 二阶常系数线性差分方程	358
10.3.1 齐次方程的通解	359
10.3.2 非齐次方程的特解和通解	360
10.4 差分方程在经济学中的简单应用	363
10.4.1 “筹措教育经费”模型	363
10.4.2 价格变动模型	364
10.4.3 国民收入的稳定分析模型	365
习题 10	366
部分习题参考答案	368
参考文献	390

第 1 章 函数及其图形

函数是客观世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象,是微积分研究的对象,它处于基础的核心地位.在自然科学、工程技术、经济管理,甚至社会科学中,函数是广泛应用的概念,其重要意义远远超出了数学范围.本章首先引进函数的概念,然后重点讨论基本初等函数及其图形,最后介绍经济学中的几个常用函数.

1.1 函 数

1.1.1 实数及其几何表示

函数概念是建立在实数集合基础之上的,凡能表示为形如 $\frac{p}{q}$ (其中 p, q 都是整数,且 $q \neq 0$)的数称为**有理数**,凡不能表示为这种分数的数称为**无理数**.有理数和无理数统称为**实数**.全体实数组成的集合简称为**实数集**,记为 $\mathbf{R}$.

规定了原点、正方向和单位长度的直线称为**数轴**,如图 1.1 所示.

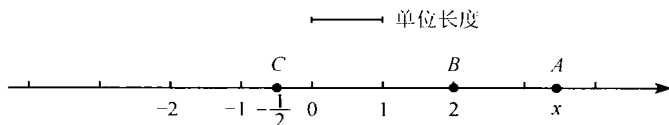


图 1.1

对任意实数 x ,在数轴上自原点 O 起向右或向左(视 x 为正或负)截取一线段 OA ,使其长度与单位长度的比值恰等于 $|x|$,则得到数轴上唯一一个点 A ,称点 A 为实数 x 的几何表示,而实数 x 叫做点 A 的**坐标**.如图 1.1 中点 B 表示实数 2 ;点 C 表示 $-\frac{1}{2}$.反之,数轴上任一点一定表示某个实数,即它一定是以某个实数为坐标的点.

因此,全体实数和数轴上的全体点一一对应,以后把点 A 与它的坐标 x 等同起来而不加区别.比如数 2 与点 2 是一样的.

点 x 到原点的距离用 $|x|$ 表示,读作实数 x 的**绝对值**,显然

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

两点 x, y 的距离为 $|x - y|$.

绝对值有如下性质:

$$(1) |x| = \sqrt{x^2}.$$

$$(2) |x| \geq 0; \text{ 且 } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(3) |-x| = |x|.$$

$$(4) \text{ 若 } a > 0, \text{ 则 } |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a; |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a.$$

$$(5) |xy| = |x||y|; \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

$$(6) \left| |x| - |y| \right| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

微积分是建立在实数论的基础之上的,本书如无特殊说明,一切数、数集和变量的取值等等均在实数范围内考虑.

1.1.2 区间和邻域

区间和邻域是用的较多的两个概念,它们都是实数集 $\mathbf{R}$ 的某种特殊子集.

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 把数轴上介于点 a 和点 b 之间但不包含 a, b 两点的全部点构成的集合称为以 a, b 为端点的开区间(图 1.2), 用记号 (a, b) 表示, 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

把介于两点 a 和 b 之间且包含两点 a 与 b 的全部点的集合称为以 a, b 为端点的闭区间(图 1.3), 用记号 $[a, b]$ 表示, 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

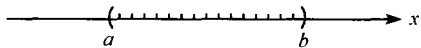


图 1.2

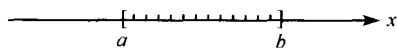


图 1.3

同样, 数集 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 与 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 称为半闭半开区间(图 1.4, 图 1.5).

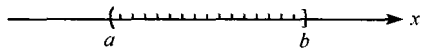


图 1.4

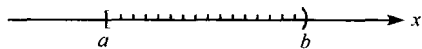


图 1.5

以上 4 个区间都叫有限区间, 它们的长度均为 $b - a$.

下列 5 个区间称为无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

在不需要辨明所论区间是否包含端点以及是否为有限区间的场合,我们就简称它为**区间**,且常用 I 表示.

设 x_0 是一定点, $\delta > 0$, 集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 在数轴上表示以点 x_0 为中心以 2δ 为长度的开区间, 称此区间为点 x_0 的 δ **邻域**, 记为 $U(x_0, \delta)$, x_0 称为**邻域的中心**, δ 称为**邻域的半径**(图 1.6), 即

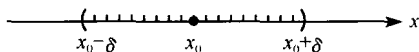


图 1.6

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

因 $|x - x_0|$ 表示 x 与 x_0 的距离, 所以 $U(x_0, \delta)$ 表示到点 x_0 的距离小于 δ 的所有点的集合. 例如, $U(3, 0.1) = \{x \mid |x - 3| < 0.1\} = (2.9, 3.1)$ 表示以 3 为中心, 0.1 为半径的邻域. 再如点 -4 的 1 的邻域是 $U(-4, 1) = \{x \mid |x + 4| < 1\} = (-5, -3)$.

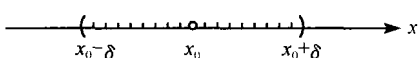


图 1.7

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后, 称为点 x_0 的 δ **去心邻域**(图 1.7), 记为

$$\dot{U}(x_0, \delta),$$

即

$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为 x_0 的**左半邻域**, $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的**右半邻域**.

例如, $\dot{U}(5, \frac{1}{2}) = \{x \mid 0 < |x - 5| < \frac{1}{2}\} = (4.5, 5) \cup (5, 5.5)$ 即为到点 5 的距离小于 $\frac{1}{2}$ 且大于零的所有点的集合.

在不需要指明邻域的半径时, 邻域和去心邻域简记为 $U(x_0)$ 和 $\dot{U}(x_0)$.

1.1.3 变量和常量

在实际生活中, 我们经常遇到各种各样的量. 例如, 时间、速度、距离、面积、体积、温度、质量、产量、价格和利润等. 在同一问题中遇到的各种不同的量, 它们所处的状态是不尽相同的, 有些量在过程的进行中是不断变化的, 即可以取不同的数值, 这样的量称为**变量**; 有些量在过程中始终保持不变, 即只取一个数值, 这样的量称为**常量**.

例如, 在自由落体运动中, 我们遇到的量有时间 t 、速度 v 、加速度 g 、下落的距离 s 、物体的质量 m 和体积 V 等, 其中 t, v, s 均为变量, g, m, V 均为常量.

习惯上, 常用 $x, y, z, t, u, v, \dots$ 等字母表示变量, 而常量则用 $a, b, c, \dots$ 等字母表示.

变量所可能取到的每一个数值称为变量的一个值, 变量所可能取到的数值的全体叫做变量的**取值范围**或**变化范围**.

1.1.4 函数的基本概念

在同一问题中,往往有几个变量在共同变化着,但它们的变化并不是彼此无关各自孤立地变化,而是遵循一定的法则(或者规律)相互依赖、相互制约地变化着.这是物质世界的一个普遍规律.

我们就两个变量的情形考察几个例子.

例1 球的体积 V 和半径 r 按照法则

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

变化着.具体地说,就是体积 V 随半径 r 的变化而变化,随 r 的取定而取定,当半径 r 在它的取值范围 $D=(0, +\infty)$ 内任取一个值时,按照此法则都能确定唯一的 V 值.

例2 自由落体运动中,物体下落的距离 s 与下落的时间 t 遵循法则

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

变化着,下落距离 s 随时间 t 的变化而变化,随时间 t 的取定而取定,当 t 在它的取值范围 $D=[0, T]$ (物体着地时刻为 T) 上取每一个数值时,按此法则, s 的值就被唯一确定.

例3 设某商品的价格为 5 元/件,则销售收入 R 与销售量 Q 按照法则

$$R = 5Q$$

变化着, R 随 Q 的变化而变化,随 Q 的取定而取定,当 Q 取每一个可能数值时,按此法则, R 的值就被唯一确定.

抽去上述三例中变量的实际意义,就会发现它们的共同之处:同一个问题中的两个变量都是由某种法则联系着,当其中一个变量在它的取值范围内取定每一个数值时,根据此法则都能唯一地确定另外一个变量的数值,两个变量的这种对应关系就是函数概念的实质.

由此,我们抽象出函数定义.

定义 1.1 设 x, y 是两个变量, x 的取值范围是非空数集 D , f 是某个对应法则.如果对每一个 $x \in D$,按照此法则 f 都能确定唯一的一个 y 值与之对应(把与 x 对应的这个 y 值称为 x 在 f 下的像,记为 $f(x)$,即 $y=f(x)$),则称此对应法则 f 为定义于 D 上的函数,或称变量 y 是变量 x 的函数,记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

x 称为自变量, y 称为因变量或函数, D 称为函数的定义域,常记为 D_f , D_f 中每个数 x 在 f 下的像 $f(x)$ (即对应的 y 值),也称为函数在点 x 处的函数值,全体函数值的集合称为函数的值域,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

例4 下列 x 与 y 的对应法则是否为所给数集上的函数.