高考各科疑难解答

数学卷

（增订本）

张溉　主编

北京理工大学出版社

高考各科疑难解答

数学卷

（增订本）

丛书主编 张 溉

本书编者 傅佑珊 马成瑞

段云鑫 张家骅

曹煜光

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考各科疑难解答:数学卷/张溉主编.-2版(增订本).—北京:北京理工大学出版社,1996

ISBN 7-81013-700-X

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.①课程-高中-解题-升学参考资料 ②数学课-高中-解题-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第09504号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路7号)

(邮政编码100081)

各地新华书店经售

北京市汇宇达公司激光照排

北京房山先锋印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 13.375印张 324千字

1996年8月第二版 1996年8月第三次印刷

印数:21000-29000册 定价:14.50元

再版前言

1993年以来,,全国各地中学普遍使用了新教材,相应地在教学内容、教学方法上也有很大变化,考试内容、题型、难度跟着变化.为了适应教育形势的飞速发展,根据广大读者的要求,我们重新对本书进行了编订.

在重新编写时,我们首先依据国家教委最新颁布的教学大纲,最新规定的考试说明和人民教育出版社出版的、目前正在使用的新教材,对教学内容进行适当的增添和删减. 同时,更换了部分例题和习题,开拓了新的题型和解题方法,增加了题目的难度,以利于提高读者的解题能力.为了更加突出本书的特点,我们加强了疑难问题的讨论和研究,使之更加有利于读者提高理论水平和分析、解决问题的能力.

再版后,本书将大大提高质量,针对性和实效性有明显提高. 我们相信一定会受到读者的欢迎.

本丛书由张溉主编,高考数学卷由北京教育学院西城分院特级教师傅佑珊、北师大实验中学特级教师马成瑞、广渠门中学高级教师段云鑫、北京教育学院西城分院高级教师张家骅、北京四中高级教师唐煜光编写,并由傅佑珊统稿、审定.

本书如有不妥之处,诚恳地希望读者指正.

编　者

1996年3月于北京

目　录

第一章　函数与图像

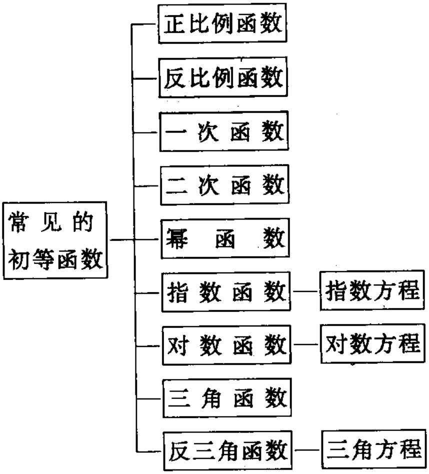
一、知识结构

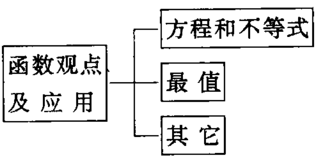
1. 整体结构

集合 — 映射 — 函数
- 函数的一般知识
- 常见的初等函数
- 函数观点及应用

2. 局部关系

函数的一般知识
- 函数和反函数的概念
- 函数符号
- 函数图像
- 函数性质
  - 定义域
  - 值　域
  - 单调性
  - 奇偶性
  - 周期性





二、思维方法

例 1 选择题(有且只有一个答案正确)

(1)设全集 $I=Z, M\{x \mid x=2n, n\in Z\}, N=\{x \mid x=3n, n\in Z\}$,则 $M\cap \overline{N}$ 是

(A) $\{x \mid x=3n\pm 1, n\in Z\}$;

(B) $\{x \mid x=6n\pm 2, n\in Z\}$;

(C) $\{x \mid x=6n\pm 3, n\in Z\}$;

(D) $\{x \mid x=6n\pm 1, n\in Z\}$. 答:(　　)

[解法一] 直接法

由已知，所求集合应由既能被 2 整除，又不能被 3 整除的整数的全体构成，再注意到 2 与 3 互质，这些元素应是 $x=2(3n\pm 1), n\in Z$.

故应选择(B).

[解法二]　验证法

先验证(A)：注意到 $n=0$ 时，$x=\pm 1$，都不能被 2 整除，这不符合题意，可排除(A).

再验证(B)：注意到 $x=2(3n\pm 1), n\in Z$，再注意到 2 与 3 互质，这些元素是既能被 2 整除，又不能被 3 整除的全体，符合题意.

故应选择(B).

[解法三]　排除法

注意到 $n=0$ 时，$x=3n\pm 1=\pm 1$，$x=6n\pm 3=\pm 3$，$x=6n\pm 1=\pm 1$，都不能被 2 整除，这不符合题意，可排除(A)、(C)、(D).

故应选择(B).

(2)已知 $f(x)$为有理整函数，且

$$f(2x)+f(3x+1)=13x^2+6x+1$$

则 $f[f(x)]$是

$(A)x^2-2x+1$；　　$(B)x^2-1$；

$(C)x^2-2x$；　　$(D)x^4$.

答：(　　)

[解法一]　直接法

因 $f(2x)$、$f(3x+1)$、以及 $f(2x)+f(3x+1)$均不改变 $f(x)$的次数，故 $f(x)$是 x 的二次式.

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则

$$4ax^2+2bx+c+a(3x+1)^2+b(3x+1)+c=13x^2+6x+1$$

$$13ax^2+(6a+5b)x+(a+b+2c)=13x^2+6x+1$$

于是有

$$\begin{cases}13a=13\\6a+5b=6\\a+b+2c=1\end{cases}$$

解得 $a=1,b=0,c=0$，故 $f(x)=x^2, f[f(x)]=x^4$.

故应选择(D).

〔解法二〕 排除法

因 $f(2x)$、$f(3x+1)$、以及 $f(2x)+f(3x+1)$ 均不改变 $f(x)$ 的次数，故 $f(x)$ 是 x 的二次式，$f[f(x)]$ 是 x 的四次式，可排除(A)、(B)、(C).

故应选择(D).

小结 直接法、验证法与排除法是解答选择题最常用的三种方法.

直接从题设的条件出发，通过正确的运算、严密的推理，推出正确的结果，与供选择的答案进行比较，从而作出选择，这就是直接法.

结合题设，逐一验证供选择的答案，直至找出正确答案，这就是验证法.

在供选择的答案，有且只有一个答案正确的条件下，通过排除供选择的 n 个答案中 $(n-1)$ 个错误答案，得到剩下的一个答案就必然是正确的，这就是排除法.

此外，有时需要综合运用这些方法来解. 上面的例 1 中(2)的解法二，虽然最后用的是排除法，一开始用的却是直接法，它实质上是这两种的综合，比单用直接法的解法一要简便得多.

例 2 判断下列各对应是否构成函数？为什么？

(1)$y=\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}$；

(2)$A=\{x|x\in R,x\neq 0\}$，$B=\{-1,1\}$，对应法则 $f:x\to y$ 且 $y=x^0$，$x\in A$，$y\in B$.

[解] (1)不构成函数. 因为对任意 $x\in R$，$\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}$均无意义.

(2)构成函数. 因为 A、B 均非空(实)数集，且 f 是 $A\to B$ 的单值对应.

小结 判断一个对应是否构成函数，依据的是函数定义(见高中代数必修本上册). 需要强调指出的是：一个对应构成函数，并不要求"B 中的每一个元素在 A 中都有原象".

例 3 判断下列函数是否为相同的函数？为什么？

(1)$f(x)=\sqrt[4]{x^4}$，$g(x)=\sqrt[5]{x^5}$；

(2)$f(x)=\lg(x^2-4)$，$g(x)=\lg(x+2)+\lg(x-2)$；

(3)$y=f^{-1}(x)$，$x=f^{-1}(y)$.

[解] (1)不是，因为 $f(x)=|x|$，$g(x)=x$ 两者的对应法则不同.

(2)不是，因为 $f(x)$的定义域是 $x<-2$ 或 $x>2$，$g(x)$定义域是 $x>2$，两者的定义域不同.

(3)是，因为两者的定义域及对应法则均相同.

小结 定义域和单值对应法则是函数定义的两要素，反映了函数定义的本质特征：随处定义和单值对应. 两个函数 $f(x)$和 $g(x)$为相同的函数的充要条件是：两者有相同的定义域和相同的单值对应法则. 至于用什么字母表示自变量和函数，是无关紧要的.

例 4 根据下列各条件，分别求函数 $f(x)$：

(1)已知 $f(x)$的定义域$(0,+\infty)$，且 $f(e^x)=2x-3$；

(2)已知 $f(x)$是偶函数，定义域为 $x\in R$ 且 $x\neq 0$，$f(e^x)$

$=2x-3$;

(3)已知 $f(x)$是奇函数,定义域 为 $x\in R$ 且 $x\neq 0$,$f(e^x)=2x-3$.

[解] (1)令 $t=e^x$,得 $x=\ln t$,于是有

$$f(t)=2\ln t-3$$

故 $$f(x)=2\ln x-3$$

(2)由(1)知,当 $x>0$ 时,$f(x)=2\ln x-3$;注意到 $f(x)$是偶函数,故当 $x<0$ 时,有

$$f(x)=f(-x)=2\ln(-x)-3$$

综合得 $f(x)=2\ln|x|-3=\ln x^2-3$

(3)由(1)知,当 $x>0$,$f(x)=2\ln x-3$;注意到 $f(x)$是奇函数,故当 $x<0$ 时,有

$$f(x)=-f(-x)=-[2\ln(-x)-3]$$

综合得

$$f(x)=\begin{cases}2\ln x-3 & (x>0)\\ -2\ln(-x)+3 & (x<0)\end{cases}$$

小结 换元法是求抽象函数的解析式最基本的方法. 这里第(2)、(3)两小题,用到了第(1)题的结论.

例 5 根据下列各条件,分别求函数 $f(x)$

(1)已知 $f(x-\frac{1}{x})=x^3-\frac{1}{x^3}$;

(2)$af(x)+bf(-x)=cx(|a|\neq|b|)$;

(3)$f\{f[f(x)]\}=8x+7$,且 $f(x)$是一次函数;

(4)$f(0)=1$,且对任何实数 x、y 有

$$f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1).$$

[解] (1)由已知

$$f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^3+3(x-\frac{1}{x})$$

故 $f(x)=x^3+3x$.

(2)由已知

$$af(x)+bf(-x)=cx \quad ①$$

用 $-x$ 代替①式中的 x 得

$$af(-x)+bf(x)=-cx \quad ②$$

由①、②式消去 $f(-x)$ 得

$$(a^2-b^2)f(x)=c(a+b)x$$

$\because |a|\neq|b|$，$\therefore a^2-b^2\neq0$，故

$$f(x)=\frac{c}{a-b}x$$

(3)设一次函数 $f(x)=ax+b(a\neq0)$，则

$$\begin{aligned}f\{f[f(x)]\}&=a[a(ax+b)+b]+b\\&=a^3x+a^2b+ab+b\end{aligned}$$

与 $8x+7$ 比较系数，得

$$\begin{cases}a^3=8\\a^2b+ab+b=7\end{cases}$$

解得 $a=2,b=1$，故 $f(x)=2x+1$.

(4)在已知式中令 $y=x$，得

$$f(0)=f(x)-x(x+1)$$

注意到 $f(0)=1$，得

$$f(x)=x^2+x+1.$$

小结 (1)除换元法外，消去法、待定系数法和特殊值法也是求抽象函数的解析式常用的方法.

(2)例 5 中(1)的解法，是用换元法求抽象函数的解析式另一种表现形式(相对于例 4 的解法而言).

(3)对例 5 中(4)，欲求 $f(x)$时，需去掉 y，结合 $f(0)=1$，取特殊的 $y=x$ 即可.

例 6　作出下列函数的草图：

(1)$y=x^{\frac{2}{3}}$；　(2)$y=x^{\frac{5}{3}}$

(3)$y=x^{-\frac{7}{6}}$.

[解] (1)见图 1-1；

(2)见图 1-2；

(3)见图 1-3.

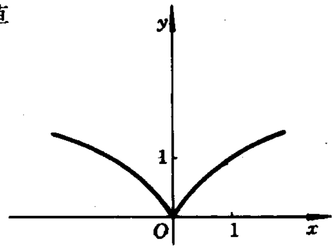


图 1-1

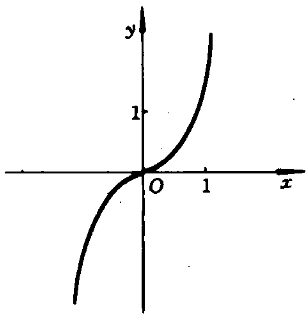


图 1-2

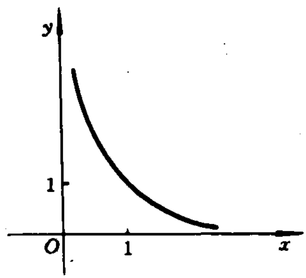
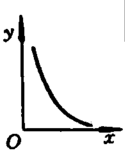
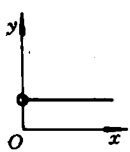
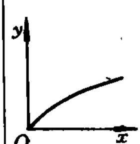
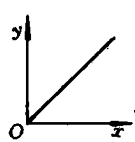
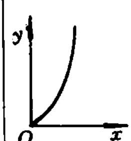


图 1-3

小结　作幂函数 $y=x^n(n\in Q)$的草图的一般步骤是

(1)按下表

$n<0$	$n=0$	$0<n<1$	$n=1$	$n>1$
				

先作出右半平面(含 y 轴)的草图.

(2)确定奇偶性,对非奇非偶的幂函数,这已是全部草图,对奇函数或偶函数的幂函数,只要根据"奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称",再补上左半平面的图像即可.

例 7 作函数 $y=\lg(-x+1)$ 的草图.

[解法一] 先作出函数 $y=\lg x$ 的草图,然后利用关于 y 轴对称的变换,得到 $y=\lg(-x)$ 的草图,最后将函数 $y=\lg(-x)$ 的草图右移 1 个单位,得到 $y=\lg[-(x-1)]$,即为已知函数的草图(图 1-4).

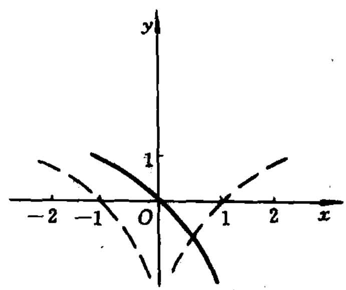


图 1-4

[解法二] 先作出函数 $y=\lg x$ 的草图,将其左移 1 个单位,得到 $y=\lg(x+1)$ 的草图,再利用关于 y 轴对称的变换,得到 $y=\lg(-x+1)$ 的草图(图 1-5).

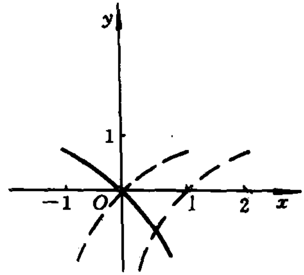


图 1-5

[解法三] 先作出函数 $y=\lg x$ 的草图,将其右移 1 个单位,得到 $y=\lg(x-1)$ 的草图,再利用关于直线 $x=1$ 对称的变换,得到 $y=\lg[-(x-1)]$,即为已知函数的草图(图 1-6).

小结 对于某些较复杂的函数的图像，我们往往可以用一些简单的、比较熟悉的函数的图像，通过函数图像的变换而获得.

常用函数图像的变换有平移变换、伸缩变换和对称变换.

例 7 中的三种解法，都是通过函数 $y=\lg x$ 的草图，经平移变换和对称变换后获得的.

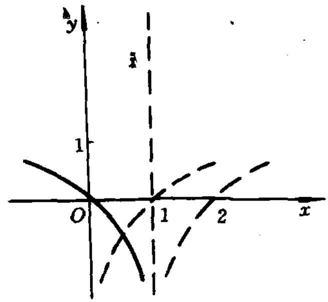


图 1-6

例 8 作函数 $y=x^4-4x^2$ 的草图.

[解] (1)定义域：$x\in R$.

(2)注意到函数是有理整函数，且只含 x 的偶次项，故为偶函数，于是其图象关于 y 轴对称，因而只需在 $x\geqslant 0$ 内讨论即可.

(3)因为 $y=x^2(x+2)(x-2)$，故图像与坐标轴的交点为 $(0,0)$、$(-2,0)$和$(2,0)$.

(4)因为 $y=(x^2-2)^2-4$，故值域为 $y\geqslant -4$，且当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$y_{\min}=-4$，又当 x 由 0 增加到 $\sqrt{2}$ 时，y 由 0 减少到 -4，当 x 由 $\sqrt{2}$ 上升到 $+\infty$ 时，y 由 -4 上升到 $+\infty$.

先作出五个特殊点(其中三个是与坐标轴的交点，两个是最低点)，然后利用增减性作出右半平面的草图，最后利用图像关于 y 轴对称作出左半平面的草图(图 1-7).

小结 通过对函数解析式的分析，往往可以认清函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、最值和延伸趋势等特