二十一世纪高职高专规划教材

工程数学

主　编 程自场 尚晓明
副主编 姜小兰

天津科学技术出版社

二十一世纪高职高专规划教材

工程数学

主　编　程自场　尚晓明
副主编　姜小兰

天津科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学/程自扬，尚晓明主编．—天津：天津科学技术出版社，2010．4
ISBN 978－7－5308－5661－1
Ⅰ．①工… Ⅱ．①程…②尚… Ⅲ．①工程数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ．①TB11
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 058409 号

责任编辑：刘　磊
版式设计：朱永欢
责任印制：王　莹

天津科学技术出版社
出版人：蔡　灏
天津市和平区西康路 35 号　　邮编：300051
电话：（022）23332329（发行部）23332400（编辑室）
网址：www. tjkjcbs. com. cn
新华书店经销
天津市宝坻区第十印刷厂印刷

开本：889×1194　1/32　　印张：5.75　　字数：130 000
2010 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
定价：18.00 元

前　言

目前，我国高等教育正在快速发展，教材建设也要与之适应，特别是教育部关于“高等教育面向21世纪内容与课程改革”计划的实施，对教材建设提出了新的要求。编写本书的目的就是为满足21世纪我国高职高专教育迅速发展的需要，满足教学改革和课程建设的需要，充分体现高职高专教育的新特点。

本书依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》的要求，遵循高职高专教育“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，按照“奠基、宽基、强技”的教学理念，精心选择、组织教材内容，从实际应用与学生后续专业课程学习的需要（实例）出发，加强了数学知识和工程实际密切结合的高职高专教学特点，淡化了《工程数学》中深奥的理论内容，适度论证，注重应用，重视创新，针对高职高专学生的特点，叙述上力求通俗易懂、简明扼要，侧重于对学生应用能力的训练和培养，易于激发学生的学习兴趣。

本书教学时数为60学时左右，适用于机电、电子、计算机、电气自动化等工科类专业学生，可作为高等职业院校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院等工科专业的《工程数学》课程教材，也可作为“线性代数”、“积分变换”课程的教学参考书，供广大工程技术人员及自学《工程数学》的读者参考使用。教材中带有 * 的章节内容，需要的专业可结合实际选讲，也可供需要此内容的读者或有兴趣的读者参考。

本书分两篇共五章内容。第一篇是线性代数部分，主要讲述行列式的概念、性质、克莱姆法则、矩阵的概念及其运算、逆矩阵、

矩阵的初等变换、矩阵的秩与线性方程组等内容；第二篇是积分变换部分，主要讲述傅里叶（Fourier）变换与拉普拉斯（Laplace）变换及其逆变换的概念、性质、卷积及卷积定理以及变换在解决微积分方程（偏微分方程）中的应用等内容. 每部分都列出了本章的学习内容和基本要求，注明了重点与难点，书中有针对性地精选了大量的例题和习题，帮助读者更好地理解概念，掌握基本的解题方法和解题思路。书后附有 Fourier 变换简表，以方便读者查用。

本书由程自场、尚晓明同志任主编，具体分工如下：焦作大学尚晓明编写第一、二章，河南理工大学高等职业学院（河南工程技术学校）程自场编写第三、四章，姜小兰编写第五章，全书由程自场统稿。

在本书的编写与统稿过程中，编者参考了许多相关的书籍与资料，汲取了很多同仁的宝贵经验，也得到了出版社编辑部的同志和编写者所在学校有关领导的大力支持，在此谨表谢意。

由于时间仓促及编者水平有限，本书所给出的解题方法未必都是最好的，错误和不足之处也在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

2009 年 10 月

目　　录

上篇　线性代数

下篇 积分变换

上篇　线性代数

第一章 n阶行列式

[学习重点和要求]

1. 掌握行列式的性质，并利用它计算行列式；
2. 利用克莱姆法则解线性方程组；
3. 掌握代数余子式的计算；
4. 掌握行列式按一行（列）的展开方法．

用二阶行列式可以简明地表示某些二元一次方程组的解，把二阶行列式推广到n阶行列式后，可以类似地表示某些n元一次方程组的解．另外，对矩阵的深入研究也需要行列式，在其他的一些理论和应用问题中也要使用行列式这一工具．因此，在线性代数中，行列式是一个基本工具，但从上世纪初以来，行列式理论已不是线性代数的中心，所以对它不拟多加论述．

1.1 n阶行列式的定义

在初等数学中，解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=a_{11}b_2-a_{21}b_1$ (3)

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=a_{22}b_1-a_{12}b_2 \qquad (4)$$

为了便于使用与记忆，把上面出现的那种4个数之间的特定算式记为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c \tag{5}$$

并把左边的记号称为二阶行列式，其中每个数称为元素，横的称行，竖的称列，(5) 式左边共有两行和两列，故称二阶行列式，由上面的定义可知二阶行列式即是由其元素之间的特定运算所得到的一个数值．例如

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7 \times 2 - 5 \times (-1) = 19$$

利用二阶行列式的这个算式，当二元一次方程组 (1)，(2) 的系数组成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

时，其解就可简单地表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D} \tag{6}$$

很容易抓住 (6) 式的规律并进行记忆，分母均是由方程组的系数所构成的行列式，x_i 的分子则是把系数行列式的第 i 列换成方

程组中右端常数列，其余列不动所得的行列式．用公式（6）来解方程组（1），（2）的方法称为克莱姆法则．

例 1 利用克莱姆法则解二元一次方程组：$\begin{cases}2x_1+x_2=5\\ x_1-3x_2=-1\end{cases}$

解：利用公式（6），由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times1=-6-1\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-14,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-7,$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{-7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-7}{-7}=1.$$

为要得到 n 元一次方程组的克莱姆法则，首先要推广二阶行列式的概念，定义 n 阶行列式．

定义 1.1 由 n^2 个数排列成 n 行、n 列，并左、右各加一竖线，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$ 称为 n 阶行列式，它代表一个由特定的运算关系所得到的算式．

当 $n=1$ 时，$D_1=|a|$；当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时，$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$.

其中数 a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素．

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行

和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 称为 a_{ij} 的余子式.

例如四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 9 & 8 \\ -6 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 中，元素 a_{23} 的余子式即为划去第二行和第三列后的三阶行列式

$M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$，而 a_{23} 的代数余子式即为 M_{23} 前再加一符号因子

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

根据定义可以知道任何一个行列式均代表一个数值，而且这个数值可以利用定义由第一行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而求得，通常把这定义简称为按第一行展开.

例 2　计算三阶行列式：$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

解：由定义 $D_3=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-3\\4&1\end{vmatrix}+(-4)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&-3\\-2&1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0\\-2&4\end{vmatrix}=12+4\times(3-6)+2\times12=24$

例 3　计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\8&9&0&0\\4&7&1&0\\-2&-4&-6&7\end{vmatrix}$

解：由定义按第一行展开

$$D_4=(-1)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}9&0&0\\7&1&0\\-4&-6&7\end{vmatrix}$$

再按第一行展开

$$=(-1)\times9\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\-6&7\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times9\times1\times7=-63$$

计算此例可以体会到第一行的零元素越多，按第一行展开时计算越方便．

习题一

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix}1&8\\-6&7\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}12&8\\-5&3\end{vmatrix}$．

2. 求下列行列式的第二行第三列元素的代数余子式

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 7 \\ -4 & 7 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

3. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -9 & 6 \\ 7 & 10 & 7 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 6 & -10 & 0 & 14 \end{vmatrix}$.

4. 设 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(1) 由定义计算 D_4;

(2) 计算 $a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$，即按第二行展开;

(3) 计算 $a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}$，即按第三行展开;

(4) 按第四行展开.

1.2　行列式的性质

为了用行列式处理问题或简化行列式本身的计算，下面介绍行列式的性质.

我们把行列式 D 中的行与列按原顺序互换以后的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D'.

如 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\6&5&4\\7&8&9\end{vmatrix}$，则 $D'=\begin{vmatrix}1&6&7\\2&5&8\\3&4&9\end{vmatrix}$

性质 1　行列式与其转置行列式相等.

对于二阶行列式可由定义直接验证.

$$D_2=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$D'_2=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$D_2=D_2'$$

至于一般 n 阶行列式则可以用数学归纳法加以证明，此处从略.

这个性质说明对于行列式而言，行与列的地位是相当的，凡是行列式对行成立的性质对列也是成立的. 譬如 n 阶行列式的定义是按照第一行展开，由于行列式行与列地位相当，所以按照列展开也是一样的.

性质 2　行列式的两行（或列）对换，其值变号.

对于二阶行列式可以直接验证.

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

两行交换为 $\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=bc-ad=-(ad-bc)=-\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$

至于 n 阶行列式同样可用数学归纳法证明，此处从略.

例 1　计算行列式：$\begin{vmatrix}7&6&0&2\\a&b&c&d\\-1&2&6&4\\a&b&c&d\end{vmatrix}$

解： 交换该行列式的第二行和第四行得

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 2 \\ a & b & c & d \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 2 \\ a & b & c & d \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

移项得

$$2\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 2 \\ a & b & c & d \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

所以

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 2 \\ a & b & c & d \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

由性质 2 可以得到以下推论：

推论 1　若行列式中有两行（或列）相同，则此行列式的值为 0.

性质 3　若行列式的某一行（或列）的元素有公因子，则可把公因子提出．

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 & \lambda d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = a\lambda d - bc\lambda = \lambda\ (ad - bc)\ = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

例 2 计算下列行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 6 & -10 & 0 & 14 \end{vmatrix}$.

解：注意到第四行的元素有公因子 2，于是利用性质 3，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 6 & -10 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

上式左边行列式中第二行和第四行相同，故等于零．

通过此例又能得出结论：

推论 2 **若行列式有两行（或列）的元素对应成比例，则行列式等于零．**

性质 4 **若行列式中某行（或列）的元素均为两项之和，则可拆开．**

即
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+k_1 & b_3+k_2 & c_3+k_3 & d_3+k_4 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

此性质的证明只需将第三行和第一行交换，然后按定义展开，比较等式两边是相同的即可．例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = a\ (d_1+d_2)\ -b\ (c_1+c_2)$$