普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

高等数学

同步辅导与复习提高

◆ 金 路 徐惠平 编

（下册）

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

高等数学

同步辅导与复习提高

下册

金 路 徐惠平 编

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导与复习提高. 下册/金路,徐惠平编. —上海:复旦大学出版社,2010. 8
ISBN 978-7-309-07514-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①金…②徐… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 150647 号

高等数学同步辅导与复习提高(下册)
金 路 徐惠平 编
出品人/贺圣遂 责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
浙江省临安市曙光印务有限公司

开本 787×960 1/16 印张 19.5 字数 363 千
2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-07514-4/O·458
定价:35.00 元

前　言

“高等数学”是大学学习中的一门重要基础课程.由于数学在自然科学、工程技术和社会科学等领域的作用越来越突出,应用面越来越广,因此社会对具有良好数学素质和创新能力强、知识面广的人才的需要也越来越迫切.“高等数学”作为学生学习现代科学知识的基础课程,承载着锻炼学生逻辑思维、培养学生熟练运算能力和运用数学技术的能力,以及为后续课程提供良好基础的重任,其重要性不言而喻.而高等数学研究对象和方法的改变,对于刚从初等数学学习转到高等数学学习的学生来说,从认知、观念、心理等各个层面常常感到不适应、感到困惑.特别是对于形式多样、难易不同、方法各异的习题和练习感到无所适从、感到手足无措.虽然对于如何学好高等数学大家见仁见智,各有不同观点和方法,但学习数学知识的有效途径是多做习题,却是经过长期的数学教学实践所达成的共识.

我们通过多年的教学实践,深知学生的疑难与困惑,了解在学习方法、解题方法和技巧方面的引导对于他们的重要性.经过长期的教学实践和研究积累,查阅了各种期刊、教学参考资料和习题集,并听取了同行的意见和建议,我们编写了这本高等数学学习辅导教材,以适应教学需要.在编写过程中,我们特别注意了以下几点:

一、重视基础知识的学习与基本技能的训练,适当增强基础题目的讲解内容.这是因为只有熟练掌握了基本概念、基本原理和基本方法,才能有能力去分析和解决复杂的问题.同时,这也是锻炼逻辑思维、训练数学表达与推理的必要环节.

二、强调教学内容与例题分析的同步衔接,增强典型问题和规律性解答部分的内容,为学生课后复习与练习提供尽可能多的方法、技巧与参照,在开拓读者思路方面提供一把入门的钥匙.

三、系统总结教学内容,注重知识整合,科学地指导学生进行数学解题.在题目的选取与安排上,逐步增加综合型例题,以例题为载体,复习和运用学过的知识,培养学生综合运用数学知识去解决问题的能力.

四、解题训练的根本目的是培养和锻炼学生运用数学知识去解决数学问题的能力,因此在重视基础的同时,我们还选择了许多比较灵活的问题,以及一些研究型问题,它们需要具有一定的解题经验与较深入地思考才能够入手.通过这些例题,希望引导学生认识到独立思考和独立工作的重要性,体验分析问题、研究问

题、转化问题,进而解决问题的过程.

五、对许多例题给出了多种解法,展示数学方法的灵活性与多样性.同时,在许多有启示的例题之后给出一些评注,揭示其内在蕴含的规律和可操作的方法,达到举一反三的效果.

六、由于“高等数学”是招收研究生考试的科目,我们对于全国和一些院校的硕士研究生入学考试试题,以及一些数学竞赛试题,适当地进行选择,有机地穿插在本书的例题和习题之中.这样,一方面为有志于继续深入学习的学生提供帮助,另一方面也为正在学习高等数学的学生提供更多的综合能力训练素材.

七、为使学生能够进一步掌握学习内容和进行自我训练,了解自己的学习状况,在每小节之后都配置了一定量的习题,并附有答案或提示.

在本书的编写过程中,复旦大学数学科学学院童裕孙、陈纪修、吴泉水、程晋、楼红卫、朱大训等教授提供了各种建议、支持和帮助;复旦大学教务处也予以鼓励和支持,在此表示衷心的感谢.同时,感谢复旦大学出版社范仁梅同志的大力支持和帮助,由于她的辛勤工作,本书才得以与读者见面.

囿于学识,本书错误和不当之处在所难免,殷切期望广大读者和同行提出宝贵的批评和建议.

编者

2010 年 6 月于复旦大学

目　　录

第五章
多元函数微分学

§5.1　多元函数的极限与连续

知识要点

一、开集与闭集、区域

设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的子集(也称之为 $\mathbf{R}^n$ 中的**点集**),$x \in \mathbf{R}^n$. 如果存在 $r > 0$,使得 $Q(x,r) \subset S$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**内点**;如果对于任何 $r > 0$,均有 $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) \cap S \neq \varnothing$,且 $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) \cap (\mathbf{R}^n \backslash S) \neq \varnothing$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**边界点**. S 的内点全体称为 S 的**内部**,记作 $\mathring{S}$;S 的边界点全体称为 S 的**边界**,记作 ∂S.

设 $S \subset \mathbf{R}^n$,如果 S 中的每一点均为 S 的内点,则称 S 为**开集**;如果 $\partial S \subset S$,则称 S 为**闭集**. 可以知道,开集的补集是闭集,闭集的补集是开集.

设 $S \subset \mathbf{R}^n$,如果对 S 中任意两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$,都有一条完全落在 S 中的折线将 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 连接起来,则称 S 为**连通的**. $\mathbf{R}^n$ 中的连通开集称为**开区域**,简称为**区域**. 开区域连同它的边界组成的点集称为**闭区域**.

二、多元函数的极限的概念

多元函数的极限和连续的概念与一元情况类似,源于同一类型问题的考虑. 下面我们以二元函数为例给出极限和连续的定义.

定义5.1.1　设 $f(x,y)$ 是定义于 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的一个函数,(x_0,y_0) 是 D 的一个内点或边界点,A 是某个常数. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $(x,y) \in D$ 且 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ 时,成立

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon,$$

则称(在 D 中)当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 以 A 为**极限**,记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$. 此时也称 A 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的极限.

这种极限也称为**二重极限**.

对于二元函数 f,还有下面一种极限体现其值的变化趋势.

定义 5.1.2　如果对于每个固定的 $x \neq x_0$，极限$\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ 存在，并且极限

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y)$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 先 y 后 x 的**二次极限**.

同样可定义先 x 后 y 的$\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ 的二次极限.

注意，二次极限存在不能保证二重极限存在. 二重极限存在同样也不能保证二次极限存在.

三、多元函数连续的概念

定义5.1.3　设函数$f(x,y)$ 定义于$\mathbf{R}^2$ 中的（开或闭）区域D上，$(x_0,y_0) \in D$. 如果

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 点**连续**. 如果$f(x,y)$ 在D上的每一点处均连续，则称$f(x,y)$ 是D 上的**连续函数**.

多元函数的极限的四则运算满足与一元情形相类似的法则，即和、差、积、商的极限等于极限的和、差、积、商. 当然，在商的情况下，应以分母的极限非零为条件. 进一步要指出的是，关于极限的夹逼性质，在多元情形也成立.

多元连续函数经四则运算后仍保持连续性（商的情况下要求分母非零）. 另外一个重要的结论就是：多元初等函数在其定义区域上是连续的. 一个函数的定义区域是指包含在其定义域中的区域.

四、有界闭区域上连续函数的性质

与闭区间上连续函数相类似，有界闭区域上连续的多元函数有如下性质：

定理5.1.1　若$f(x,y)$ 是$\mathbf{R}^2$ 中有界闭区域D上的连续函数，则它必在D上有界.

定理5.1.2　若$f(x,y)$ 是$\mathbf{R}^2$ 中有界闭区域D上的连续函数，则它必定能在D上取到其最大值与最小值.

注　事实上，只要D是有界闭集，上述两个结论依然成立.

定理5.1.3　设$f(x,y)$ 是$\mathbf{R}^2$ 中有界闭区域D上的连续函数，m和M分别是$f(x,y)$ 在D上的最小值和最大值，则对介于m和M间的任何实数C，必存在$P_c \in D$，使得

$$f(P_c) = C.$$

例 5.1.1 设 $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$.

(1) 求函数 $f(x,y)$ 的定义域;

(2) 求函数 $f(x,y)$ 的值域;

(3) 指出 $f(x,y)$ 的定义域是否为开集、闭集或两者都不是;

(4) 指出 $f(x,y)$ 的定义域是否有界;

(5) 描述函数的等位线.

解 (1) 因为反正弦函数的定义域为$[-1,1]$,所以要使函数 f 有意义,必须

$$-1 \leqslant \frac{x-y}{x+y} \leqslant 1, \text{且 } x+y \neq 0.$$

当 $x+y>0$ 时,上式为

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \text{且}(x,y) \neq (0,0).$$

当 $x+y<0$ 时,上式为

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \end{cases} \text{且}(x,y) \neq (0,0).$$

因此函数的定义域为(见图 5.1.1)

$$D_f = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \cup \{(x,y) \mid x \leqslant 0, y \leqslant 0\} \setminus \{(0,0)\}.$$

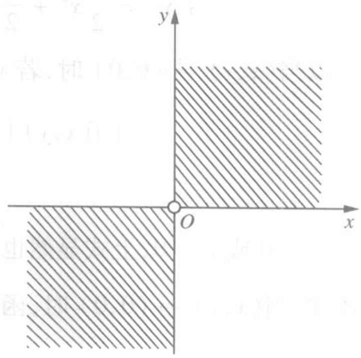

图 5.1.1

(2) 显然函数 $f(x,y)$ 的值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(3) 由于函数 $f(x,y)$ 的定义域 D_f 既含有它的边界点(例如包含$(0,1)$),又不含有它的边界点$(0,0)$,因此 D_f 既不是开集也不是闭集.

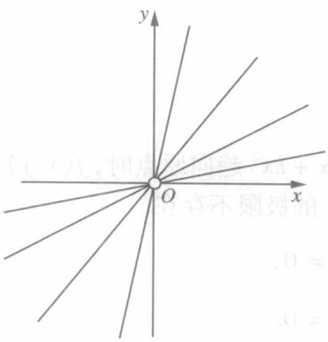

图 5.1.2

(4) 显然 D_f 是无界的.

(5) 函数 $f(x,y)$ 的等位线方程为

$$\arcsin\frac{x-y}{x+y} = C\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant C \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \text{且}(x,y) \in D_f,$$

其图像见图 5.1.2.

例 5.1.2 问当$(x,y) \to (0,0)$ 时,下列函数的极限是否存在?

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; (2) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^6}$;

(3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$.

解 (1) 因为在直线 $y = kx(k \neq 0)$ 上,当 $x \neq 0$ 时,成立

$$f(x,y) = \frac{k^2x^4}{x^4 + k^4x^4} = \frac{k^2}{1 + k^4},$$

所以

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{x^4 + k^4x^4} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

这说明,对于不同的 $k(k \neq 0)$,当 (x,y) 沿直线 $y = kx$ 趋向原点时, $f(x,y)$ 有不同的极限,因此当 $(x,y) \to (0,0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 的极限不存在.

(2) 因为

$$x^2 + y^6 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + y^6 \geqslant 3\left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2y^6\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}x^{\frac{4}{3}}y^2,$$

所以当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时,若 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$,则成立

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^6} \leqslant \frac{x^2y^2}{\frac{3}{\sqrt[3]{4}}x^{\frac{4}{3}}y^2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}x^{\frac{2}{3}},$$

而 $x = 0$ 或 $y = 0$,上式显然也成立. 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}x^{\frac{2}{3}} = 0$,因此由极限的夹逼性质知,当 $(x,y) \to (0,0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 的极限存在,且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(3) 显然

$$f(x,y) = \frac{xy(\sqrt{x + y + 1} + 1)}{x + y}.$$

因为在曲线 $y = -x + kx^2(k \neq 0)$ 上,当 $x \neq 0$ 时,成立

$$f(x,y) = \frac{(-1 + kx)(\sqrt{1 + kx^2} + 1)}{k},$$

所以

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=k-x+kx^2}} f(x,y) = -\frac{2}{k}.$$

这说明,对于不同的 $k(k \neq 0)$,当 (x,y) 沿曲线 $y = -x + kx^2$ 趋向原点时, $f(x,y)$ 有不同的极限,因此当 $(x,y) \to (0,0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 5.1.3 设 $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$

(1) 问函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的极限是否存在?

(2) 问函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的两个二次极限是否存在?

解　(1) 因为

$$|f(x,y)| \leqslant |x| + |y|,$$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|) = 0$,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. 因此$f$在(0,0)点的极限存在.

(2) 由于对于每个 $x \neq 0$,当 $y \to 0$ 时,$x\sin\dfrac{1}{y}$ 的极限不存在,而 $y\sin\dfrac{1}{x} \to 0$,因此$\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 不存在. 于是二次极限$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 也不存在. 同理可知$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$不存在.

下例给出了$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 的一个充分条件.

例 5.1.4　若二元函数$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 存在二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A,$$

且当 $x \neq x_0$ 时存在极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x),$$

证明:$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$.

证　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$,所以存在$\delta > 0$,使得当$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$时,成立

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对于每个满足$0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x,令 $y \to y_0$,便得到

$$|\varphi(x) - A| = \lim_{y\to y_0}|f(x,y) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

这就是说,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时,成立

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon.$$

因此,由极限的定义知$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$.

例 5.1.5　问下列极限是否存在?若存在,求出其极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln[1+\sin2(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{2x^2y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \dfrac{e^{x+y}}{x^2+y^2}$.

解　(1) 利用无穷小量的等价关系 $\ln(1+t) \sim t\,(t\to0)$,得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln[1+\sin2(x^2+y^2)]}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 2.$$

(2) 因为

$$2x^2y^2 \leqslant x^4 + y^4 \leqslant (x^2 + y^2)^2,$$

所以当 $x^2 + y^2 < 1$ 时,有

$$1 \geqslant (x^2 + y^2)^{2x^2y^2} \geqslant (x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)^2}.$$

因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to 0+} t^{t^2} = e^{\lim\limits_{t\to 0+} t^2 \ln t} = e^0 = 1 \ (\text{记}\ t = x^2 + y^2),$$

所以由极限的夹逼性质知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{2x^2y^2} = 1.$$

(3) 因为当 $x > 0, y > 0$ 时,成立

$$0 < (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y},$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}\right) = 0$,所以由极限的夹逼性质知

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0.$$

(4) 由于当 $u > 0$ 时成立 $e^u > \frac{u^3}{6}$,因此当 $x > 0, y > 0$ 时,成立

$$\frac{e^{x+y}}{x^2 + y^2} > \frac{(x + y)^3}{6(x^2 + y^2)} > \frac{(x + y)^3}{6(x + y)^2} = \frac{x + y}{6}.$$

由于当 $x \to +\infty, y \to +\infty$ 时 $x + y \to +\infty$,因此当 $x \to +\infty, y \to +\infty$ 时,$\frac{e^{x+y}}{x^2 + y^2}$ 的极限不存在.

注 由不等式 $\frac{e^{x+y}}{x^2 + y^2} > \frac{x + y}{6}$ 知,函数 $\frac{e^{x+y}}{x^2 + y^2}$ 是 $x \to +\infty, y \to +\infty$ 时的正无穷大量,即

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{e^{x+y}}{x^2 + y^2} = +\infty.$$

例 5.1.6 问下列函数在(0,0)点是否连续?

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

解 (1) 作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则 f 可表示为

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 = f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

(2) 因为当 (x,y) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

当 (x,y) 沿 y 轴趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1,$$

所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在,因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

例 5.1.7 设 $f(x,y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$.

(1) 证明: $f(x,y)$ 沿任何射线 $x = t\cos\alpha, y = t\sin\alpha (0 \leqslant t < +\infty)$ 当 $t \to +\infty$ 时的极限为 0,这里 $\alpha \in [0,2\pi)$ 为常数;

(2) 问当 $x \to +\infty, y \to +\infty$ 时, $f(x,y)$ 的极限是否为 0?

解 (1) **证** 在射线 $x = t\cos\alpha, y = t\sin\alpha$ 上, $f(x,y)$ 的值为

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = t^2\cos^2\alpha e^{-(t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha)}, 0 \leqslant t < +\infty.$$

当 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$ 时, $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0$, 因此 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0$;

当 $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ 时,由 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) &= \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} \\
&= \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{(2t\cos^2\alpha - \sin\alpha) e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} \\
&= \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{\left(2\cos^2\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{t}\right) e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} = 0.
\end{aligned}$$

(2) 当 $x \to +\infty, y \to +\infty$ 时, $f(x,y)$ 的极限不是 0. 这是因为 f 沿抛物线 $y = x^2$ 当 $x \to +\infty$ 时,有 $f(x,x^2) = x^2 \to +\infty$.

注 结合(1)的结论可知,当 $x \to +\infty, y \to +\infty$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 5.1.8 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 0, & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ 的连续性.

解 当 $x^2 + y^2 < 1$ 时,由于 $f(x,y)$ 与初等函数 $\sqrt{1-x^2-y^2}$ 恒等,因而 $f(x,y)$ 是连续的. 同理,当 $x^2 + y^2 > 1$ 时, $f(x,y) = 0$, 所以 $f(x,y)$ 也是连续的.

对于每个满足 $x_0^2+y_0^2=1$ 的点 (x_0,y_0)，因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2+y^2\leqslant 1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2+y^2\leqslant 1}}\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}=0,$$

以及

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2+y^2>1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2+y^2>1}} 0=0,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0=f(x_0,y_0).$$

因此 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

综上所述，函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

例 5.1.9 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$ 存在，证明 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有界.

证 记 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=A$，由极限的定义可知，存在 $r>0$，当 $\sqrt{x^2+y^2}>r$ 时，成立

$$|f(x,y)-A|<1, \text{所以} |f(x,y)|<|A|+1.$$

因为 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{x^2+y^2}\leqslant r\}$ 上连续，所以它在 D 上有界，因此存在 $K>0$，使得

$$|f(x,y)|\leqslant K,\ (x,y)\in D.$$

取 $M=\max\{|A|+1,K\}$，则在 $\mathbf{R}^2$ 上便成立 $|f(x,y)|\leqslant M$，这说明 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有界.

例 5.1.10 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数，满足：

(1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，成立 $f(x,y)>0$；

(2) 对于任意 (x,y) 与 $c>0$，成立 $f(cx,cy)=cf(x,y)$.

证明：存在常数 $a>0,b>0$，使得

$$a\sqrt{x^2+y^2}\leqslant f(x,y)\leqslant b\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

证 因为单位球面 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的有界闭集，则 $f(x,y)$ 在 D 上取到最小值 a 和最大值 b，即

$$a\leqslant f(x,y)\leqslant b,\ (x,y)\in D,$$

且由假设(1) 知 $a>0,b>0$.

对于任何 $(x,y)\neq(0,0)$，因为 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\in D$，所以

$$a\leqslant f\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\right)\leqslant b,$$

由假设(2)知$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y)$,因此由上式得

$$a\sqrt{x^2+y^2}\leqslant f(x,y)\leqslant b\sqrt{x^2+y^2}.$$

由假设(2),$f(0,0)=f(2\cdot 0,2\cdot 0)=2f(0,0)$,从而$f(0,0)=0$,上式也成立. 因此上式对所有$(x,y)\in\mathbf{R}^2$皆成立.

习　题

1. 设$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

(1) 证明$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$;

(2) 证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

2. 下列极限是否存在?若存在,求出极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to 4}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3. 问下列函数在点(0,0)是否连续?

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

4. 设D是Oxy平面中的有界闭区域,M_0为D外的一点. 证明:在D中必存在点P_0和P_1,使它们分别为D中离M_0最近和最远的点.

§5.2　偏导数、全微分、方向导数和梯度

知识要点

我们仍以二元函数为例,给出相关的概念及性质.

一、偏导数

定义5.2.1　设$D\subset\mathbf{R}^2$为区域,$f(x,y)$是定义在D上的二元函数,$(x_0,y_0)\in D$为一定点. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

则称函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于x**可偏导**,并称此极限为$f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于x的**偏导数**,记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\left(\text{或} f_x'(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right).$$

类似地可定义$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\left(\text{或} f_y'(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

若函数f在点(x_0,y_0)关于x和y均可偏导,就称f在点(x_0,y_0)可偏导. 如果$f(x,y)$在区域D上每一点均可偏导,就称$f(x,y)$在D上可偏导.

从偏导数的定义可以看出,一个多元函数关于某个变量求偏导数,就是将其他变量看成常数,对该变量求导数.

偏导数的几何意义:$f_x'(x_0,y_0)$就是曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$的交线

$$\begin{cases} x=x, \\ y=y_0, \\ z=f(x,y_0) \end{cases}$$

在点(x_0,y_0)处的切线关于x轴的斜率.

注意,在一元函数情形,可导必定连续,但对多元函数来讲,类似性质并不成立,即可偏导未必能推出连续.

二、全微分

定义 5.2.2 设$D\subset \mathbf{R}^2$为区域,$f(x,y)$是定义在D上的二元函数,$(x_0,y_0)\in D$为一定点. 若存在只与点(x_0,y_0)有关而与Δx及Δy无关的常数A和B,使得

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

这里$o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$表示在$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$时比$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$高阶的无穷小量. 则称函数$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处**可微**,并称其线性主要部分$A\Delta x+B\Delta y$为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的**全微分**,记为$\mathrm{d}z(x_0,y_0)$或$\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)}$.

如果函数$f(x,y)$在区域D上每一点处均可微,就称$f(x,y)$在D上可微. 此时成立

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

注意,若函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微,则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续,且$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可偏导. 反之不然. 为推出可微性,必须加上更强的条件.

定理 5.2.1 设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个邻域上存在偏导数,并且偏导数在点(x_0,y_0)连续,那么$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微.

若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微,那么由定义,在点(x_0,y_0)附近成立$\Delta z\approx \mathrm{d}z$,因

此

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y,$$

其误差是比 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 高阶的无穷小量. 这就是说, $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 可以用 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数来近似计算.

三、方向导数

定义 5.2.3 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为区域, $f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $(x_0,y_0)\in D$ 为一定点, $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)(=(\cos\alpha,\sin\alpha))$ 为一个方向(其中 α,β 分别为 $\boldsymbol{l}$ 与 x 轴, y 轴正向的夹角). 如果极限

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿方向 $\boldsymbol{l}$ **的方向导数**, 记为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0).$$

方向导数可如下计算.

定理 5.2.2 如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 那么对于任一方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

四、梯度

定义 5.2.4 如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导, 则称向量 $(f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0))$ 为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的**梯度**, 记为 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$, 即

$$\mathbf{grad}f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y'(x_0,y_0)\boldsymbol{j}.$$

因此, 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 则沿方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数可表为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0)=\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{l}.$$

由此可见, 函数 $f(x,y)$ 在每个可微且梯度不为零的点, 沿任何方向的方向导数的绝对值不会超过它在该点的梯度的模 $\|\mathbf{grad}f\|$, 且最大值 $\|\mathbf{grad}f\|$ 在梯度方向达到. 这就是说, 沿着梯度方向函数值增加最快. 同样, f 的方向导数的最小值 $-\|\mathbf{grad}f\|$ 在梯度的反方向达到, 或者说, 沿着梯度相反方向函数值减少最快.

五、高阶偏导数

设二元函数 f 在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上具有偏导数