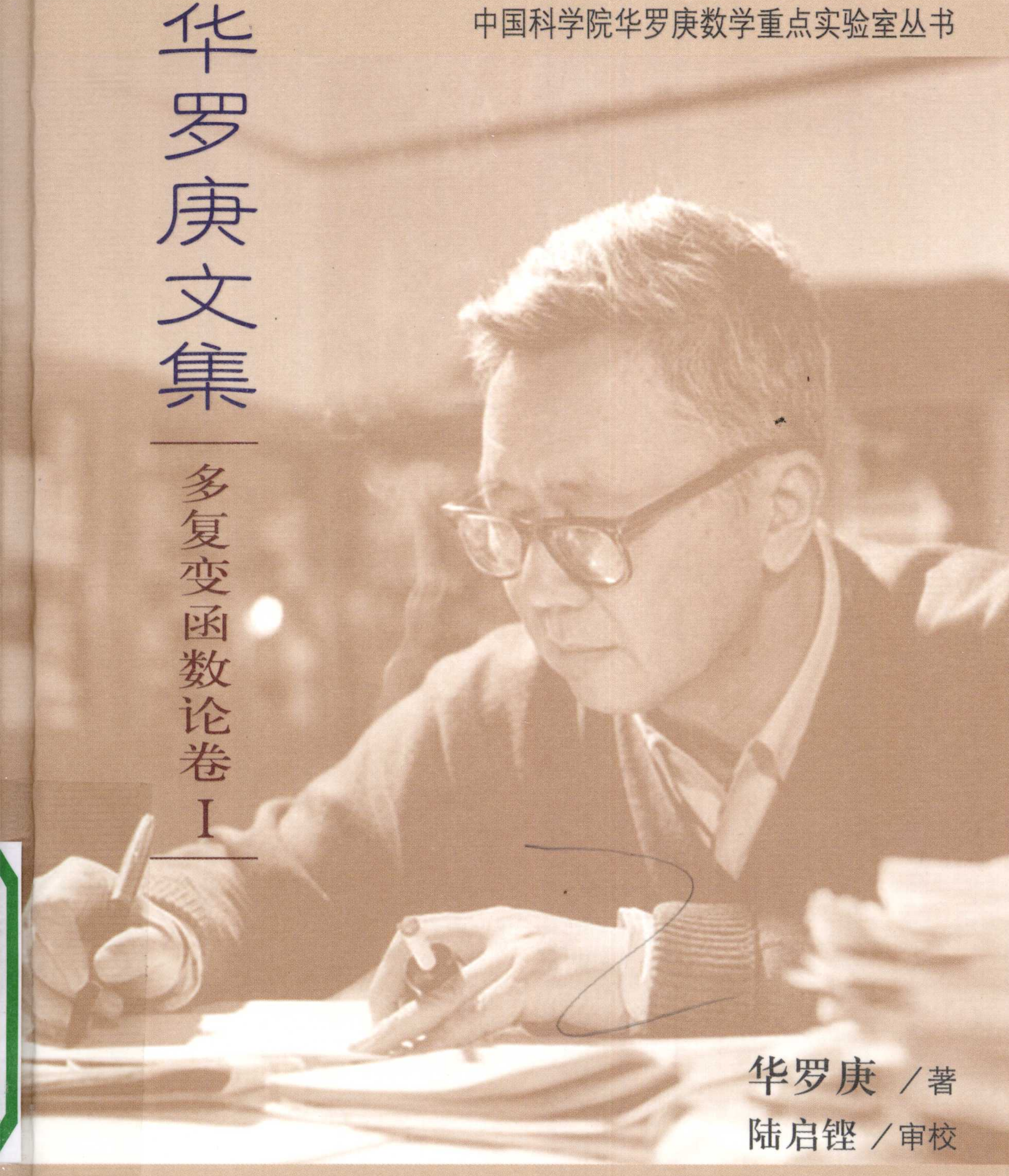
国家出版基金资助项目

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

多复变函数论卷 I



华罗庚 / 著

陆启铿 / 审校

科学出版社

www.sciencep.com

国家出版基金资助项目

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

多复变函数论卷 I

华罗庚　著

陆启铿　审校

科学出版社

北京

内 容 提 要

作者自 1952 年以来在多复变数函数论方面发表过许多论文，本书包括这些论文的主要结果.

在第一章中，证明了一系列的恒等式；第二章是关于矩阵积分的计算；第三章是方阵极坐标表示法及特征流形的体积的计算；第四章是关于核函数及 Cauchy 公式；第五章是矩阵双曲空间的调和分析；第六章是对称及斜对称方阵双曲空间的调和分析；第七章是超球双曲空间的调和分析.

本书适合数学及相关专业大学生、研究生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚文集：多复变函数论卷 I /华罗庚著；陆启铿审校. —北京：科学出版社，2010

(中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书)

ISBN 978-7-03-027195-2

I.华… II.华… III.①数学-文集 ②多复变函数论-文集 IV.01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 062697 号

责任编辑：张 扬／责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010 年 5 月第一次印刷 印张：10 3/4

印数：1—3 000 字数：194 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

纪念华罗庚先生诞辰100周年

《华罗庚文集》编委会

《华罗庚文集》序言

2010 年是著名数学家华罗庚先生诞辰 100 周年. 值此机会, 我们编辑出版《华罗庚文集》, 作为对他的美好纪念.

华罗庚先生是他那个时代的国际领袖数学家之一, 也是中国现代数学的主要奠基人和领导者. 无论是在和平建设时期, 还是在政治动荡甚至是战争年代, 他都抱定了为国家和人民服务的宗旨, 为中国数学的发展倾注了毕生精力, 受到了中国人民的广泛尊敬.

华罗庚先生最初研究数论, 后将研究兴趣拓展至代数和多复变等多个领域, 取得了一系列国际一流的成果, 引领了这些领域的学术发展, 产生了广泛持久的影响. 他从一名自学青年成长为著名数学家, 其传奇经历激励了几代中国数学家投身于数学事业.

华罗庚先生为我们留下了丰富的精神遗产, 包括大量的学术著作和研究论文. 我们认为, 认真研读这些著作和论文, 是深刻把握华罗庚学术思想精髓的最佳途径. 无论对于数学工作者还是青年学生, 其中许多内容都是很有启发和裨益的.

华罗庚先生担任中国科学院数学研究所所长 30 余年, 他言传身教, 培养和影响了一批国际水平的数学家, 他的学术思想和治学精神已经成为数学所文化的核心. 自 2008 年起以中科院数学所为基础成立的中国科学院华罗庚数学重点实验室, 旨在继承和弘扬华罗庚先生的学术思想和治学精神, 积极推动中国数学的发展. 为此, 我们选择华罗庚先生的著作和论文作为实验室的首批出版物, 今后还将陆续推出更多优秀的数学出版物.

在出版《华罗庚文集》的过程中, 我们得到了各方面的关心和支持, 包括国家出版基金的资助, 在此我们表示深深的感谢. 同时, 对于有关人员在策划、翻译和审校等方面付出的辛勤劳动, 对于科学出版社所作的大量工作, 我们表示诚挚的谢意.

中国科学院华罗庚数学重点实验室

《华罗庚文集》编委会

2010 年 3 月

修 订 本 序

作者关于多个复变数的函数论的研究工作可以粗略地分为两个阶段. 前一阶段是从 1949 年到 1955 年, 这一阶段的工作是对典型域上的解析函数论与调和函数论进行研究. 一般说来, 这是一个建立基本理论的阶段. 在研究过程中, 我们引进和制造了一些与其他分支有关的工具 —— 特别是代数和几何方面的工具. 1955 年之后, 我们开始把这些基本理论用到其他方面, 从而发现我们的结果和方法又反过来可用来处理其他领域中的不少问题, 同时也提供新现象、新苗头; 最突出的在群表示论、偏微分方程论等方面.

出版修订本的想法开始于这两个阶段分界的时候, 由于希望多做些应用方面的工作, 使得结果更完整, 因而修订本迟迟未动手, 一等再等, 等了七个年头, 以致根据作者初步修订计划而写的俄文译本和英文译本都先后出版了, 而中文修订本却由于希望更深刻些, 希望更丰富些而长时期不能脱稿.

如以酉群上的 Fourier 级数论为例, 普通的 Fourier 级数是一维酉群 $\{e^{i\theta}\}$ 上的调和分析, 它的文献十分丰富. 在我们获得了酉群上的 Fourier 级数的求和方法之后, 我们自然要问, 普通 Fourier 级数上每条定理在一般酉群上有没有对应的结果? 龚昇提出了 "从和到核" 及 "从核到和" 两个类型的推广方法, 因而建议出很多求和方法. 这些求和方法之间的相互比较、相互关系, 都有待我们进一步探讨.

酉群尚且如此, 就不要说酉群之外的其他紧致群和其他齐性紧致空间了; 更不要说把作者所提出的单变数的广义函数论 [9] 推广到这些对象上去了.

再以偏微分方程为例, 即使把我们的方法用到最简单的场合, 也可以看出其独特之处. 我在中国科学技术大学讲课的时候, 就是运用这个方法来处理调和函数论的. 这些方法的优点不仅提供了处理某些微分方程的方法, 而且还引出了不少有趣的新现象和新实例. 其中包括一些带蜕化面的高维椭圆型方程、空间混合型方程、偏微分方程组和积分方程等等. 以混合型方程来说, 我们就给出了Лаврентьев方程的一个新的处理方法.

根据这些情况, 看来还需要较长的时间和较多的人力才能初步完成第二阶段的一些想法; 另一方面, 即使比较完备了, 但其篇幅也必然很多倍于现在的篇幅. 因此我们不得不满足于把重点仍然放在第一阶段的工作上, 而简略地提一下其他方面.

欢迎大家批评指教, 欢迎青年数学工作者参加到这个研究方向中来. 由于我们在这个方向中要综合地运用数学方面各种基本功, 因而, 对我们来讲, 是一个良好的锻炼园地. 青年读者不妨先尝试一下附录 I 中所提出的练习, 然后入手.

华罗庚

1964 年 6 月 · 北京

序

本书包括了作者对多复变数函数论的一部分系统的研究, 其主要部分先后 (从 1949 年至 1955 年) 发表在我国的 “数学学报” 上 (一些初步报告发表在 “苏联科学院报告” 上). 除综合、改组、增补、修订的工作之外, 还包括了一些新结果.

初稿曾在 1955 年的中国科学院第一次学部会议上书面宣读, 1956 年曾在第三届全苏数学会上宣读.

这一系列的工作在某种意义上可以说是完整的. 但是从 1957 年初, 另外一些线索又在开始发展, 那就是与调和函数有关的、与偏微分方程有关的、与群表示论有关的各方面, 并且已经完成了若干工作. 其中很大一部分是和陆启铿同志合作的. 为了将来再准备出专集, 本书中将不包括与那些有关的部分.

作者尽量设法使本书自给自足, 除掉群表示论的知识以外, 并不需要太多的专门知识.

作者乘此感谢陆启铿同志, 他提了很多意见, 指出了不少应当改善和修正的地方. 龚昇、钟同德二位同志的意见和帮助也使本书有所改进, 一并致谢.

华罗庚

1957 年 5 月 · 北京

目　　录

导　　言

§1　典　型　域

本文中所讨论的典型域是指以下的四种域:

第一种是 m 行 n 列的矩阵双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 表示. 它是由 m 行 n 列的复元素矩阵 Z 之适合于条件

$$I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0$$

者所组成, 此处 $I^{(m)}$ 表示 m 行列的单位方阵, $\overline{Z}'$ 表示由 Z 行列互换并取共轭复数所得出的矩阵, 因此它是 n 行 m 列的. 如果 H 是一个 Hermite 方阵, 则以 $H > 0$ 表示 H 是定正的.

第二种是 n 行列的对称方阵的双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素对称方阵 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} - Z\bar{Z} > 0$$

者所组成.

第三种是 n 行列的斜对称方阵的双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素斜对称方阵 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} + Z\bar{Z} > 0$$

者所组成.

第四种可以称为 Lie 球双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 表示. 它是由 $n(>2)$ 维复元素矢量 $z(=(z_1,\cdots,z_n))$ 之适合于诸条件

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0$$

及

$$|zz'| < 1$$

者所组成.

这四种域的维数 (复数维) 各为 mn, $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 及 n. 作者曾经证明 (华罗庚 [3]), 最后一种, 也可以表成为 $2\times n$ 实元素矩阵的双曲空间. 因此这四种域都可以归入作者所研究过的矩阵几何的范畴之中.

1935 年 E. Cartan [1] 曾经算出：可递的不可分解的囿对称域仅有六种可能性. 除以上的四种之外还有两种, 其一是 16 维的某一种空间, 另一是 27 维的某一种空间. 从维数可以看出这两种域是异常特殊的. 后经 A. Borel[1] 指出, 具体有效地定出这两种域还是问题. 因此一般说来, 以上所提出的四种域在具体地研究多变数函数论时, 是有它的特殊重要意义的, 于是仿典型群的名称我们称它们为典型域. 本文的目的就在于具体地研究这些典型域的调和分析问题.

§2 一个域的特征流形

命 $\mathfrak{R}$ 表示由 n 个复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 所形成的 $2n$ 维欧氏空间的一个有界单连通域, 我们已知 $\mathfrak{R}$ 中的一个 $\mathfrak{R}$ 内解析函数 $f(z)$ 一定在 $\mathfrak{R}$ 的边界上取最大绝对值. 命 $\mathfrak{C}$ 表 $\mathfrak{R}$ 的边界上具有以下性质的一部分: (i) 凡 $\mathfrak{R}$ 内解析的函数一定在 $\mathfrak{C}$ 上取最大绝对值; (ii) 对 $\mathfrak{C}$ 上的任一点 ξ, 我们可以找到一个 $\mathfrak{R}$ 上的解析函数 $f(z)$ 在此点取最大绝对值. 这样的流形 $\mathfrak{C}$ 称为域 $\mathfrak{R}$ 的特征流形. 有时 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的边界的全部, 一般来说, 是它的一部分, 甚至 $\mathfrak{C}$ 的维数可以大大地低于 $2n-1$. 显然 $\mathfrak{C}$ 是唯一决定的. 不难证明, $\mathfrak{C}$ 是一紧致流形, 并且如果函数 $f(z)$ 在 $\mathfrak{C}$ 已知, 在 $\mathfrak{C}$ 上每点附近解析, 则这函数就唯一决定了. 由此推得流形 $\mathfrak{C}$ 的实维数 $\geqslant n$. 我们以 ξ 表 $\mathfrak{C}$ 上的变数, 并以 $d\xi\overline{d\xi}'$ 及 $\dot{\xi}$ 分别表示流形 $\mathfrak{C}$ 上的微分度量与体积元素. 值得一提的是, 如果我们把 (i), (ii) 中的解析函数换为线性函数, 那么 $\mathfrak{C}$ 的定义似乎仍然一样.

四类典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{III}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{C}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{C}_{\mathrm{III}}, \mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 各为

1. $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ 是由适合于

$$U\bar{U}'=I$$

的所有 $m\times n$ 矩阵 U 所形成的; 特别, 当 $m=n$ 时, $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ 就是所有的酉方阵;

2. $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$ 是由所有 n 行列对称酉方阵所形成的;

3. $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ 的定义随 n 为奇或为偶而有所不同. 对偶数 n, 它是由所有的 n 行列斜对称酉方阵所形成的; 对奇数 n, 它是由形如

$$UDU'$$

的方阵所形成的, 这儿 U 过所有的酉方阵, 而

$$D=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dot{+}\cdots\dot{+}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dot{+}0;$$

4. $\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 是由以下的矢量

$$e^{i\theta}x$$

所形成的, 这儿

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad xx' = 1.$$

他们的实维数各为 $n^2 - (n-m)^2 = n(2n-m), \frac{1}{2}n(n+1), \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}(1+(-1)^{n-1})(n-1)$ 及 n.

这些特征流形都是齐性空间. 更确切些, $\mathfrak{L}$ 上的一点可由 $\mathfrak{R}$ 内某点的稳定群变为 $\mathfrak{L}$ 上的任一点. 齐性空间的调和分析的一般理论已经由 E. Cartan[1], H. Weyl[1] 及 A. Weil[1] 研究过, 但本节中的方法却给出比已知结果更完善、更明确的结果.

§3　直观推导

(所谓直观推导, 是指暂且不管严格性, 先计算出一批结果来, 作为我们进一步严格处理的根据, 如先不管级数及积分的收敛性等.)

假定 $\mathfrak{R}$ 内有一个解析函数系

$$\{\varphi_\nu(z)\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots,$$

使 $\mathfrak{R}$ 中每一解析函数 $f(z)$ 都可以表为 $\mathfrak{R}$ 内的收敛级数

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z).$$

我们作两个无穷维的 Hermite 方阵

$$H_1 = \left(\int_{\mathfrak{L}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\dot{\xi}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\cdots}$$

及

$$H_2 = \left(\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\dot{z}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\cdots}.$$

这两个方阵能够正交正常化, 使得

$$\int_{\mathfrak{L}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\dot{\xi} = \delta_{\nu\mu}$$

及

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\dot{z} = \lambda_\nu\delta_{\nu\mu}.$$

这些特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 称为解析不变量, 即它们不依赖于基底 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 的选择, 而且如果有一解析变换把 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{L}$ 变为 $\mathfrak{R}_1$ 与 $\mathfrak{L}_1$, 则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 是不变的.

对一完全圆形域来说, 这一函数系的存在是有保证的 (H. Cartan[1]).

我们定义

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)}}{\lambda_\nu}=K(z,\bar{w}),$$

这就是 $\mathfrak{R}$ 域的 Bergman 核. 它有重现性质, 即对 $\mathfrak{R}$ 内任一解析函数 $f(z)$ 常有

$$f(z)=\int_{\mathfrak{R}}K(z,\bar{w})f(w)\dot{w}.$$

我们再定义

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)}=H(z,\bar{\xi})$$

为 $\mathfrak{R}$ 域的 Cauchy 核. 函数系 $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ 在 $\mathfrak{L}$ 上的连续函数所成的空间是不完整的, 它也有重现性质: 如果 $f(z)$ 是 $\mathfrak{R}$ 内任一解析函数, 而且在 $\mathfrak{L}$ 上有展式

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(\xi),$$

则得

$$f(z)=\int_{\mathfrak{L}}H(z,\bar{\xi})f(\xi)\dot{\xi}.$$

再命

$$f(z)=u(z)H(z,\bar{w}),$$

则得

$$u(z)=\int_{\mathfrak{L}}\frac{H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{w})}{H(z,\bar{w})}u(\xi)\dot{\xi}.$$

我们定义

$$P(z,\xi)=\frac{H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{z})}{H(z,\bar{z})}$$

为域 $\mathfrak{R}$ 的 Poisson 核, 这核是定正的.

我们把函数系

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$$

扩充成为一个 $\mathfrak{L}$ 上的正交正常完备系

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}_{\nu=0,\pm1,\pm2,\cdots},$$

把 $P(z,\xi)$ 展为 $\varphi_\nu(\xi)$ 的 Fourier 级数, 即

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\varPhi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)},\quad \varPhi_\nu(z)=\int_{\mathfrak{L}}P(z,\xi)\varphi_\nu(\xi)\dot{\xi}.$$

如果我们有

$$\lim_{z\to\xi}\Phi_\nu(z)=\varphi_\nu(\xi),$$

则对 $\mathfrak{L}$ 上的任一有 Fourier 展式

$$\varphi(\xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu(\xi),\quad c_\nu=\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}}\varphi(\xi)\overline{\varphi_\nu(\xi)}\dot{\xi}$$

的函数 $\left(\text{此处 } V(\mathfrak{L})=\int_{\mathfrak{L}}\dot{\xi}\right)$, 我们有一函数类

$$\Phi(z)=\int_{\mathfrak{L}}P(z,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu\Phi_\nu(z).$$

我们定义这样的函数是域 $\mathfrak{R}$ 的调和函数.

通常的调和函数是由二阶偏微分方程定义的, 我们也有以下的直算法. 从 Bergman 的核我们可以定义域 $\mathfrak{R}$ 的 Riemann 度量

$$d\bar{d}\log K(z,\bar{z})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\log K(z,\bar{z})dz_id\bar{z}_j=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}dz_id\bar{z}_j,$$

它对应的逆变张量

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}$$

是这个空间的 Laplace 算子. 于是我们也有其对应的 Dirichlet 问题等等.

在引进合适的条件之下, 以上的直算法是可以严格化的. 本书的绝大部分就是在典型域中把这些结果更具体化及严格地表达出来.

§4　关于所用方法的介绍

(a) 群表示论方面的工具　已知这四类典型域都是完整圆型域. 对于一个完整圆型域, 我们可以做包含它的原点的稳定群, 这个群是由线性变换

$$w=zU$$

形成的, 这儿 U 是酉方阵. 这个群以 Γ_0 表示. 所有由 $z_1,\cdots,z_n$ 形成的单项式成为 $\mathfrak{R}$ 域的解析函数的一个基底. 不同次数的多项式都相互正交, 所以我们的主题是把同一方次的多项式分解为互相正交正常的系. 更确切些, 命 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 及 $z^{[l]}$ 表示由支量

$$z_1^{l_1}\cdots z_n^{l_n}\sqrt{\frac{l!}{l_1!\cdots l_n!}},\quad l=l_1+\cdots+l_n$$