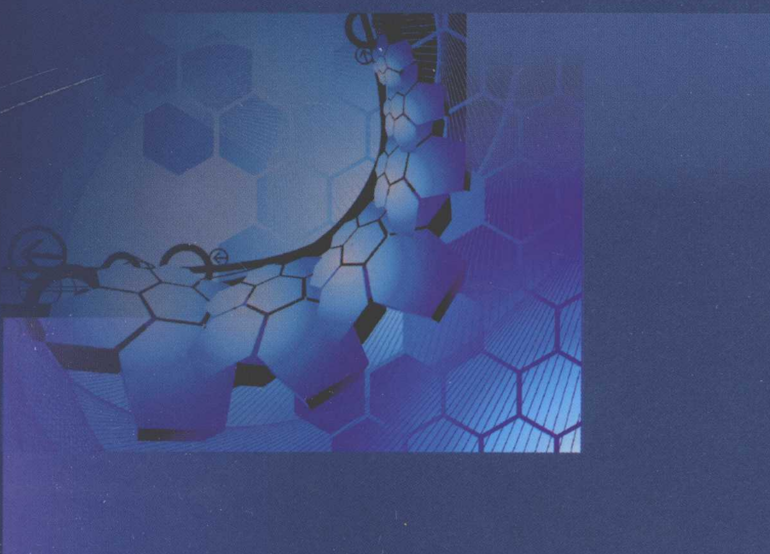
概率论与数理统计学习指南

Gailülun yu Shuli Tongji Xuexi Zhinan

主　编　涂晓青　白淑敏



西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

概率论与数理统计学习指南

Gailülun yu Shuli Tongji Xuexi Zhinan

主　编　涂晓青　白淑敏

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指南/涂晓青,白淑敏主编.—成都:西南财经大学出版社,2010.7

ISBN 978-7-81138-788-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①涂…②白… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 119818 号

概率论与数理统计学习指南

主编 涂晓青 白淑敏

责任编辑:李霞湘

封面设计:杨红鹰

责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	11.5
字　　数	245 千字
版　　次	2010 年 7 月第 1 版
印　　次	2010 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	1—5000 册
书　　号	ISBN 978-7-81138-788-9
定　　价	25.00 元

前言

概率论与数理统计是高等财经类各专业的一门必修的公共基础课。由于成人（网络）学生大都是在职人员，学习时间紧，任务重，我们编写了这本与概率论与数理统计课程教材完全配套的学习指导书《概率论与数理统计学习指南》，以帮助读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，提高学习数学的思维水平和数学素养。

本书的章结构与教材相同，其主要内容包括：各章的学习要求与内容提要、学习重点与难点、主要解题方法、教材各章的习题解答。其中：学习要求与内容提要列出了各章对应的基本概念，基本定理与基本计算公式与结论；学习重点与难点给出了各章的知识点的掌握程度；主要解题方法精选了部分典型的题型与例题，给出了完整的分析与解题过程；习题解答对教材各章的全部习题做了详细的解答，以帮助读者掌握更多的解题方法与技巧。最后附了5套综合考试题，以利于学生检验学习成果。

本书由涂晓青和白淑敏主编，西南财经大学经济数学学院的徐风与马捷两位老师参与了部分解题工作。由于我们水平有限，书中不足之处在所难免，希望读者提出宝贵意见。

编者

2010年6月

目 录

第一章　随机事件及其概率

一、学习要求与内容提要

（一）学习要求

1. 了解随机事件与样本空间的定义，会运用事件的和、差、积的运算式表示较复杂的事件，掌握事件的互斥与对立的关系.

2. 理解概率的定义及性质，并会用概率的性质计算较复杂事件的概率.

3. 掌握求古典概型的条件，掌握计算简单的古典概型的有关事件的概率.

4. 理解条件概率的定义及性质，掌握利用乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式进行概率计算的方法.

5. 理解事件独立的概念，掌握独立事件的概率计算，熟练掌握伯努利概型的概率计算公式.

重点：事件的关系与运算；利用概率的性质计算随机事件的概率；不放回抽样与有放回抽样的古典概型的计算方法；利用三个有关条件概率的计算公式，解决复杂事件概率的计算问题；独立随机事件的概率计算与伯努利概型的概率计算.

难点：古典概型的计算；三个有关条件概率的计算公式的应用，计算独立随机事件的概率与伯努利概型的应用.

（二）内容提要

1. 基本概念

（1）随机事件、样本空间的概念以及事件的关系与运算

随机事件——随机试验 E（若一个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的全部可能结果可能预知，但具体一次试验中到底会出现哪种结果却无法准确预言，则称此试验为随机试验）的结果为随机事件.

样本点、样本空间——称试验 E 的每一个基本事件为一个样本点，试验 E 的全体样本点（基本事件）所构成的集合为样本空间，记作 Ω.

（2）事件的关系与运算

事件的并（和）——事件的并 $A\cup B$ 表示“事件 A 或事件 B 至少有一个发生”. $A\cup B$ 也简记为 $A+B$.

事件的交（或乘积）——事件的交 $A\cap B$ 表示“事件 A、事件 B 同时发生”. $A\cap B$ 也简记为 AB.

逆事件（对立事件）——事件 $\bar{A}$ 当且仅当 A 不发生时发生，称作事件 A 的逆事件. 利

用上述事件的并和交的运算符号,有

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ 及 } A\bar{A} = \varphi$$

显然,A 与 $\bar{A}$ 互为逆事件.

事件的差——事件 A 与 B 的差 $A - B$ 表示"A 发生而 B 不发生".

显然有 $A - B = A\bar{B}$.

互斥事件——若事件 $AB = \varphi$,则表明事件 A 与事件 B 不同时发生,称事件 A 与事件 B 互斥(或不相容).

显然,若事件 A 与事件 B 互为逆事件,则事件 A 与事件 B 一定互斥,但互斥事件不一定互为逆事件.

事件的运算律——

交换律:$A \cup B = B \cup A$,$A \cap B = B \cap A$;

结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

分配律:$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

对偶律:$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(3) 事件的频率和概率

事件的频率——称在相同条件下所做的 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 为 A 发生的频数,并称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 A 发生的频率,记作 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

(4) 事件概率的两个定义

概率的统计定义——在相同条件下所做的 n 次试验中,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 当 $n \to \infty$ 时稳定在常数 p 的附近,称此常数 p 为事件 A 发生的概率,记作 $P(A) = p$.

概率的公理化定义——设试验 E 的样本空间为 Ω,对于 Ω 中每一个事件 A 都赋予一个实数 $P(A)$,若 $P(A)$ 满足如下三个条件:

① (非负性公理) 对任意事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

② (规范性公理) $P(\Omega) = 1$;

③ (可列可加性公理) 对于 Ω 中任意一列两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为 A 的概率.

(5) 概率的性质

① 不可能事件的概率为 0,即 $P(\varphi) = 0$;

② 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

③ 对任一个事件 A,有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

④ 若 $A \subset B$,则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$,且有 $P(A) \leqslant P(B)$;

⑤ 广义加法定理:对于任意两个事件 A、B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

2. 基本定理与基本计算公式

(1) 古典概型 —— 如果随机试验具有下面两个特点:

① 试验的样本空间只有有限个样本点,即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$;

② 每个样本点的出现是等可能的,即它们出现的概率一样.

称为古典概型,它是最简单的一类试验模型. 在古典概型中,若样本点总数为 n,事件 A 中有 n_A 个样本点,则 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

(2) 条件概率 —— 设 A 与 B 是两个随机事件,若 $P(B) > 0$,则称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 已经发生的条件下,事件 A 发生的条件概率.

(3) 乘法公式 —— 设 A、B 为两个事件,则当 $P(B) > 0$ 时,有

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

若 $P(A) > 0$,则有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

(4) 全概率公式 —— 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个分割,且有 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,则对任意事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

(5) 贝叶斯定理 —— 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个分割,且有 $P(A_i) > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$,则对任意满足 $P(B) > 0$ 的事件 B,有

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

(6) 事件的独立性 —— 对事件 A 与 B, 若有

$$P(AB) = P(A)P(B) \text{ 或 } P(A \mid B) = P(A), P(B \mid A) = P(B)$$

则称 A 与 B 相互独立.

若 A 与 B 相互独立,则 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

(7) 伯努利概型 —— 设在伯努利试验中事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$,则在 n 重伯努利试验中,事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

其中 $q = 1 - p$.

二、主要解题方法

(一) 基本题型

1. 利用事件的关系表示随机事件；
2. 抽样问题:注意有放回抽样与无放回抽样的区别；
3. 事件和、差、积的概率计算；
4. 全概率公式与贝叶斯公式的计算；
5. 事件的独立性与伯努利概型的计算.

(二) 例题解析

例1 设A、B、C是三个随机事件,则A、B、C至少发生两个可表示为__________,三个事件A、B、C至多发生两个可表示为__________.

解 A、B、C至少发生两个可表示为$AB \cup BC \cup AC$或$ABC \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$,三个事件$A$、$B$、$C$至多发生两个可表示为$\overline{ABC}$或$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

例2 设$P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.7$,若$A$与$B$互斥, 则$P(\bar{B}) =$ __________.

解 因为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

所以

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - P(A \cup B) + P(A) = 1 - 0.7 + 0.4 = 0.7$$

例3 设某人向一个目标射击，每次击中目标的概率为0.8，现独立射击3次，则3次中恰好有2次击中目标的概率是(　　).

① 0.384　　② 0.64　　③ 0.32　　④ 0.128

解 由题意,这是一个三重伯努利概型,击中目标的概率为$p = 0.8$

故

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot P^2 \cdot (1 - p) = 3 \times 0.8^2 \times 0.2 = 0.384$$

例4 把5个球随机地投入编号为1,2,3,4的四个盒子中．求第二个盒子中的球数与第一个盒子中的球数的乘积为零的概率．

解 设A表示“第一个盒子中的球数为零”,B表示“第二个盒子中的球数为零”,则所求概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{3^5}{4^5} + \frac{3^5}{4^5} - \frac{2^5}{4^5} = \frac{454}{1024} = \frac{227}{512} \end{aligned}$$

例5 某人做一次试验获得成功的概率仅为0.2,他持之以恒,不断重复试验,求他做10次试验至少成功一次的概率．做20次又怎样呢?

解 设他做k次试验至少成功一次的概率为p_k,

$$A_k = \{第 k 次试验成功\}, k = 1,2,\cdots$$

则

$$p_{10} = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$

$= 1 - P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{10})$

$= 1 - (1 - 0.2)^{10} \approx 0.8926$

$p_{20} = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{20})$

$= 1 - P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{20})$

$= 1 - (1 - 0.2)^{20} \approx 0.9885$

例 6　设某产品的合格率为 80% . 检验员在检验时合格品被认为合格的概率为 97% ,次品被认为合格的概率为 2%.

(1) 求任取一个产品被检验员检验合格的概率;

(2) 若该产品通过了检验,求该产品确为合格品的概率.

解　(1) 设 A 表示"产品检验合格" ,B 表示"产品合格",则由全概率公式有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

$$= 0.8 \times 0.97 + 0.2 \times 0.02 = 0.78$$

即任一个产品被检验员检验合格的概率为 0.78;

(2) 根据题意由贝叶斯公式有

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.8 \times 0.97}{0.78} = 0.99$$

即若一个产品通过了检验,则该产品确为合格品的概率为 0.99.

三、习题解答

(一) 填空题

1. 将一颗骰子连掷两次,该试验的样本空间为($\Omega = \{(i,j) \mid i,j = 1,2,3,4,5,6\}$).

2. 三事件 A、B、C 至多发生两个可表示为($\overline{ABC}$ 或 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$).

3. 若事件 A 与 B 互斥,$P(\bar{A}) = 0.6$,$P(A \cup B) = 0.8$,则 $P(B) = (\ 0.4\ )$.

4. 已知两个事件 A 和 B 满足条件 $P(AB) = P(\bar{A} \cdot \bar{B})$ 且 $P(A) = p$,则 $P(B) = (\ 1 - p\ )$.

5. 设 A,B 为二随机事件,$P(A) = 0.6$,$P(AB) = 0.2$,则 $P(A\bar{B}) = (\ 0.4\ )$.

6. 将一枚硬币连掷两次,则出现一次正面一次反面的概率为($\frac{1}{2}$).

7. 已知两个随机事件 A 和 B 满足条件 $P(A) = 0.5$,$P(B) = 0.4$,$P(A \cup B) = 0.8$,则 $P(A\bar{B}) = (\ 0.4\ )$.

8. 设 5 产品中有 2 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 则另一件也是不合格品的概率为($\frac{1}{7}$).

9. 设某系统由元件 A 和两个并联的元件 B、C 串联而成,若 A、B、C 损坏与否相互独立, 且它们损坏的概率依次为 0.3, 0.2, 0.1, 则系统正常工作的的概率为(0.686).

10. 将一只骰子连续掷 3 次,则至少有一次出现 3 点的概率为($\frac{91}{216}$).

（二）选择题

1. 对掷一枚硬币的试验，出现正面称为（ ④ ）.

① 样本空间　② 必然事件　③ 不可能事件　④ 随机事件

2. 设 A, B 是任意两个概率不为零的互不相容事件，则必有（ ④ ）.

① $P(AB)=P(A)P(B)$　② $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容

③ $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 互不相容　④ $P(A-B)=P(A)$

3. 设当 A 和 B 同时发生时，事件 C 必发生，则（ ② ）.

① $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　② $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

③ $P(C)=P(AB)$　④ $P(C)=P(A\cup B)$

4. 设 $P(B)=0.1, P(A\cup B)=0.5$，则 $P(A\bar{B})=$（ ④ ）.

① 0.1　② 0.2　③ 0.3　④ 0.4

5. 设 A、B、C 为三个随机事件，且 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0.8, P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})=0.95$，则 $P(AB-C)=$（ ① ）.

① 0.15　② 0.25　③ 0.35　④ 0.45

6. 设对于事件 A,B,C 有 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(BC)=0, P(AB)=P(AC)=\frac{1}{8}$，则 A,B,C 至少发生一个的概率为（ ② ）.

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{5}{8}$　③ $\frac{7}{8}$　④ $\frac{1}{2}$

7. 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(B)>0, P(A|B)=1$，则有（ ③ ）.

① $P(A\cup B)>P(A)$　② $P(A\cup B)>P(B)$

③ $P(A\cup B)=P(A)$　④ $P(A\cup B)>P(B)$

8. 事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.7, P(B)=0.6, P(A-B)=$（ ② ）.

① 0.88　② 0.28　③ 0.18　④ 0.42

9. 设两个相互独立的事件 A 与 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$（ ③ ）.

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{1}{3}$

10. 若 $A\supset B, A\supset C, P(A)=0.9, P(\bar{B}\cup\bar{C})=0.8$，则 $P(A-BC)=$（ ① ）

① 0.7　② 0.8　③ 0.9　④ 0.1

（三）解答题

1. 写出下列试验的样本空间.

（1）将一枚硬币连掷三次；

（2）观察在时间 $[0,t]$ 内进入某一商店的顾客人数；

（3）将一颗骰子掷若干次，直至掷出的点数之和超过 2 为止.

解　(1)$\Omega=\{$(正正正),(正正反),(正反正),(反正正),(正反反),(反正反),(反反正),(反反反)$\}$

(2)$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(3)$\Omega=\{3,4,5,6,(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4,),(2,5),(2,6),(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,1,5),(1,1,6)\}$

2. 将一颗骰子连掷两次,观察其掷出的点数．令$A=$"两次掷出的点数相同",$B=$"点数之和为10",$C=$"最小点数为4"．试分别指出事件A、B、C以及$A\cup B$、ABC、$A-C$、$C-A$、$B\bar{C}$各自含有的样本点．

解　$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$B=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

$C=\{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$

$A\cup B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,6),(6,4)\}$

$ABC=\Phi$

$A-C=\{(1,1),(2,2),(3,3),(5,5),(6,6)\}$

$C-A=\{(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$

$B\bar{C}=\{(5,5)\}$

3. 在一段时间内,某电话交换台接到呼唤的次数可能是0次,1次,2次,…．记事件$A_k(k=1,2,\cdots)$表示"接到的呼唤次数小于k",试用A_k间的运算表示下列事件:

(1) 呼唤次数大于2;

(2) 呼唤次数在5到10次范围内;

(3) 呼唤次数与8的偏差大于2．

解　(1)$\bar{A}_3$　　(2)$A_{11}-A_5$　　(3)$A_6\cup\bar{A}_{11}$

4. 试用事件A、B、C及其运算表示下列事件:

(1) A发生而B不发生;

(2) A不发生但B、C至少有一个发生;

(3) A、B、C中只有一个发生;

(4) A、B、C中至多有一个发生;

(5) A、B、C中至少有两个发生;

(6) A、B、C不同时发生．

解　(1)$A\bar{B}$;

(2)$\bar{A}(B\cup C)$;

(3)$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$;

(4)$\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}$;

(5)$AB\cup BC\cup AC$;

(6)$\overline{ABC}$.

5. 化简下列各事件:

(1) $(A-B)\cup A$;

(2) $(A-B)\cup B$;

(3) $(A-B)A$;

(4) $(A-B)B$;

(5) $(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup B)$.

解 (1) $(A-B)\cup A=A$;

(2) $(A-B)\cup B=A\cup B$;

(3) $(A-B)A=A-B$;

(4) $(A-B)B=\Phi$;

(5) $(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup B)=A(\bar{A}\cup B)=AB$

6. 将10本书任意放到书架上,求其中仅有的3本外文书恰排在一起的概率.

解 设A="3本外文书排在一起".10本书总的排法有10!种,3本书排成一列共有3!种,将这3本书排列后作为一个元素与另外7本书在一起有8!种排法,所以,事件A含有的样本点数为3!8!,故

$$P(A)=\frac{3!8!}{10!}=\frac{1}{15}=0.0667$$

7. 假设十把钥匙中有三把能打开门,今任取两把,求能打开门的概率.

解 设A="能打开门".样本空间的样本点总数是$C_{10}^2=45$,事件A含有的样本点数为$C_3^2+C_3^1C_7^1$,则

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{3+21}{45}=\frac{24}{45}\approx0.533$$

8. 某人欲给朋友打电话,但只记得朋友的电话由五个不同数字组成,其首位是5,末位是3,中间号不是0,只好试拨.求其试拨一次即拨对的概率.

解 设A="试拨一次即拨对".由题意,样本空间的样本点总数为A_7^3个,而正确的号码只有一个.因此

$$P(A)=\frac{1}{A_7^3}=\frac{1}{7\times6\times5}\approx0.0048$$

9. 从装有5只红球4只黄球3只白球的袋中任意取出3只球,求下列事件的概率:

(1) 取到同色球;

(2) 取到的球的颜色各不相同.

解 (1) 设A="取到3只同色球".任取3只球的样本点总数是$C_{12}^3=220$,取到3只红球的样本点数是$C_5^3=10$,取到3只黄球的样本点数是$C_4^3=4$,取到3只白球的样本点数是$C_3^3=1$,则

$$P(A)=\frac{C_5^3+C_4^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{10+4+1}{220}=\frac{15}{220}\approx0.0682$$

(2) 设B="取到的球颜色各不相同".任取3只球的样本点总数是$C_{12}^3=220$,取到的球颜色各不相同,即取到一只红球一只黄球一只白球,其样本点数是$C_5^1\cdot C_4^1\cdot C_3^1=60$,则

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} \approx 0.2727$$

10. 将上题中的抽取方式改为“放回抽样”，即每次取出 1 球，记下颜色后放回，再作抽取，连取三次，求上述两个事件的概率.

解 (1) 设 A = “取到 3 只同色球”. 样本空间的样本点总数是 $12^3 = 1728$，取到 3 只红球的样本点数是 $5^3 = 125$，取到 3 只黄球的样本点数是 $4^3 = 64$，取到 3 只白球的样本点数是 $3^3 = 27$，则

$$P(A) = \frac{5^3 + 4^3 + 3^3}{12^3} = \frac{125 + 64 + 27}{1728} = \frac{216}{1728} = 0.125$$

设 B = “取到的球颜色各不相同”. 任取 3 只球的样本点总数是 $12^3 = 1728$，取到的球颜色各不相同，即取到一只红球一只黄球一只白球，其样本点数是 $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot A_3^3 = 360$，则

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot A_3^3}{12^3} = \frac{360}{1728} \approx 0.2083$$

11. 设6位同学每位都等可能地进入10间教室中任何一间自习，求下列事件的概率：

(1) 某指定教室有 2 位同学；

(2) 6 位同学所在的教室各不相同；

(3) 只有 2 位同学在同一教室；

(4) 至少有 2 位同学在同一教室.

解 因为对教室中的人数没有限制，所以每位同学都有 10 种选择，6 位同学共有 10^6 种选法，即样本点总数为 10^6.

(1) 设 A = “某指定教室有 2 位同学”，则 A 包含的样本点数为 $C_6^2 \times 9^4$，故

$$P(A) = \frac{C_6^2 \times 9^4}{10^6} = \frac{15 \times 6561}{1\,000\,000} \approx 0.0984$$

(2) 设 B = “6 位同学所在的教室各不相同”，则 B 包含的样本点数为 A_{10}^6，故

$$P(B) = \frac{A_{10}^6}{10^6} = \frac{151\,200}{1\,000\,000} = 0.1512$$

(3) 设 C = “只有 2 位同学在同一教室”，则 C 包含的样本点数为 $C_6^2 \times C_{10}^1 \times A_9^4$，故

$$P(C) = \frac{C_6^2 \times C_{10}^1 \times A_9^4}{10^6} = \frac{453\,600}{1\,000\,000} = 0.4536$$

(4) 设 D = “至少有 2 位同学在同一教室”，则 $\bar{D} = B$ = “6 个同学均在不同的教室”，故

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(B) = 1 - 0.1512 = 0.8488$$

12. (1) 从 7 副同型号的手套中任意取出 4 只，求恰有一双配套的概率；

(2) 若是 7 副不同型号的手套，上述事件的概率为何？

解 (1)设A =“从7副同型号的手套中任意取出4只,恰有一双配套”,则样本空间的样本点总数为 $C_{14}^{4} = 1001$,事件A包含的样本点数为$2C_{7}^{1}C_{7}^{3} = 490$,于是

$$P(A) = \frac{490}{1001} \approx 0.4895$$

(2)设B =“从7副不同型号的手套中任意取出4只,恰有一双配套”,则样本空间的样本点总数为 $C_{14}^{4} = 1001$,事件B包含的样本点数为 $C_{7}^{1}C_{6}^{2}2^{2} = 420$,于是

$$P(B) = \frac{420}{1001} \approx 0.4196$$

13. 两封信随机地投入四个邮筒,求前两个邮筒内没有信的概率.

解 设A =“前两个邮筒内没有信”. 因为每封信有4种投法,所以两封信共有$4^2 = 16$种投法,而A所包含的样本点数为2^2,从而

$$P(A) = \frac{2^2}{16} = 0.25$$

14. 一间宿舍内住有6位同学,求他们中有4个人的生日在同一个月份的概率.

解 设A =“6位同学中有4个人的生日在同一个月份”. 每位同学的生日可能是12个月份中的一个月份,6位同学的生日可能有12^6种不同分布方式,而事件A的样本点数为$C_6^4 \cdot C_{12}^1 \cdot 11^2$,于是,所求概率为

$$P(A) = \frac{C_6^4 \cdot C_{12}^1 \cdot 11^2}{12^6} \approx 0.0073$$

15. 设$P(A) = p$,$P(B) = q$,$P(A \cup B) = r$,求$P(A\bar{B})$,$P(\bar{A}B)P(\bar{A}\bar{B})$.

解 由

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

得

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = p + q - r$$

则

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = p - (p + q - r) = r - q$$
$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = q - (p + q - r) = r - p$$
$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - r$$

16. 设A、B、C是三个随机事件,且有$A \supset B$,$A \supset C$,$P(A) = 0.9$,$P(\bar{B} \cup \bar{C}) = 0.8$,求$P(A - BC)$.

解 因为

$$P(\bar{B} \cup \bar{C}) = P(\overline{BC}) = 1 - P(BC)$$

则

$$P(BC) = 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) = 1 - 0.8 = 0.2$$

又由$A \supset B$,$A \supset C$知$A \supset BC$,于是

$$P(A - BC) = P(A) - P(BC) = 0.9 - 0.2 = 0.7$$

17. 设箱中有5个零件,其中2个为不合格品. 现从中一个个不放回取零件,求在第三

次才取到合格品的概率.

解　设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次取到合格品,则所求概率为

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{10}$$

18. 甲、乙、丙三个车间生产同种产品,次品率分别为0.05、0.08、0.1. 从三个车间各取1件产品检查,求下列事件的概率:

(1) 恰有2件次品;　　　　　(2) 至少有1件次品.

解　设 $A=$"从甲车间取出的是次品",$B=$"从乙车间取出的是次品",$C=$"从丙厂取出的是次品".

(1) 设 $D=$"恰有2件次品",则 $D=\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$,于是

$$\begin{aligned}P(D)&=P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})\\&=0.95\times0.08\times0.1+0.05\times0.92\times0.1+0.05\times0.08\times0.9\\&=0.0076+0.0046+0.0036\\&=0.0158\end{aligned}$$

(2) 设 $E=$"至少有1件次品",则

$$\begin{aligned}P(E)&=1-P(\bar{E})\\&=1-0.95\times0.92\times0.9=1-0.7866=0.2134\end{aligned}$$

19. 甲、乙两人轮流投篮,甲先开始,假定他们的命中率分别为0.4及0.5,问谁先投中的概率较大,为多少?

解　设 A_i 表示"甲第 i 次投中",B_j 表示"乙第 j 次投中". 事件 $A=$"甲先投中"可表示为

$$A_1\cup\bar{A}_1\bar{B}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{A}_3\bar{B}_3A_4\cup\cdots$$

则甲先投中的概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{A}_3\bar{B}_3A_4)+\cdots\\&=0.4+0.6\times0.5\times0.4+(0.6\times0.5)^2\times0.4+(0.6\times0.5)^3\times0.4+\cdots\\&=\frac{0.4}{1-0.6\times0.5}=\frac{4}{7}\approx0.57\end{aligned}$$

即甲先投中的概率较大,概率为0.57.

20. 由长期统计资料得知,某一地区在4月份下雨(记为事件 A)的概率为4/15,刮风(记为事件 B)的概率为7/15,既刮风又下雨的概率为1/10. 求 $P(A\mid B)$,$P(B\mid A)$ 及 $P(A\cup B)$.

解　由题设知 $P(A)=\frac{4}{15}$,$P(B)=\frac{4}{15}$,$P(Ab)=\frac{1}{10}$,则

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/10}{7/15}=\frac{3}{14}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/10}{4/15}=\frac{3}{8}$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=\frac{4}{15}+\frac{7}{15}-\frac{1}{10}=\frac{19}{30}$$

21. 设$P(A)=a, P(B)=b(b>0)$，证明

$$\frac{a}{b} \geqslant P(A \mid B) \geqslant \frac{a+b-1}{b}$$

证　由条件概率的定义，有

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{a+b-P(A \cup B)}{b}$$

而

$$a+b-P(A \cup B) \geqslant a+b-1 \text{ 且 } P(AB) \leqslant P(A)=a$$

故有

$$\frac{a}{b} \geqslant P(A \mid B) \geqslant \frac{a+b-1}{b}$$

22. 某工厂生产的产品中36%为一等品，54%为二等品，10%为三等品．从中任意取出1件产品，已知它不是三等品，求其是一等品的概率．

解　设A=“取出的产品为一等品”，B=“取出的产品为二等品”，C=“取出的产品为三等品”，则

$$P(A)=36\%, P(B)=54\%, P(C)=10\%$$

故所求概率为$P(A \mid \bar{C})=\dfrac{P(A\bar{C})}{P(\bar{C})}=\dfrac{P(A)}{1-P(C)}=\dfrac{36\%}{1-10\%}=0.4$

23. 一批电子元件中，甲类的占80%，乙类的占12%，丙类的占8%．三类元件的使用寿命能达到指定要求的概率依次为0.9、0.8和0.7．今任取一个元件，求其使用寿命能达到指定要求的概率．

解　设A=“任取一个元件为甲类”，B=“任取一个元件为乙类”，C=“任取一个元件为丙类”，D=“达到指定要求”，则有

$$P(A)=80\%, P(B)=12\%, P(C)=8\%$$
$$P(D \mid A)=0.9, P(D \mid B)=0.8, P(D \mid C)=0.7$$

故由全概率公式，有

$$P(D)=P(A) \cdot P(D \mid A)+P(B) \cdot P(D \mid B)+P(C)P(D \mid C)$$
$$=0.8 \times 0.9+0.12 \times 0.8+0.08 \times 0.7=0.872$$

24. 某商店收进甲厂生产的产品30箱，乙厂生产的同种产品20箱．甲厂每箱装100个，废品率为0.06，乙厂每箱装120个，废品率是0.05，求：

（1）任取一箱，从中任取1个为废品的概率；

（2）若将所有产品开箱混放，则任取1个为废品的概率为多少？

解　(1) 设A_1=“任取一箱为甲厂的产品”，A_2=“任取一箱为乙厂的产品”，B=“任取一个产品为废品”，则A_1, A_2构成完备事件组，由全概率公式，有

$$P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)$$