高等学校数学系列教材

解析函数边值问题教程

路见可 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校数学系列教材

解析函数边值问题教程

路见可 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析函数边值问题教程/路见可著.—武汉:武汉大学出版社,2009.12

高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-07431-6

Ⅰ.解…　Ⅱ.路…　Ⅲ.解析函数—边值问题—高等学校—教材　Ⅳ.O175.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 208022 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:720×1000　1/16　印张:28.75　字数:512 千字　插页:1

版次:2009 年 12 月第 1 版　2009 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-07431-6/O·416　定价:39.00 元

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

内 容 提 要

本书系统地论述了解析函数的边值问题及其在奇异积分方程上应用的最基本的内容，也包括了著者本人的一些研究工作，是函数论分支方面的一本专著。具备数学分析、线性代数和复变函数基本知识的读者可顺利阅读本书。它可作为大学基础数学专业、应用数学专业高年级学生和研究生的教材或教学参考书。由于这一分支在实际问题中有着广泛的应用，本书也可作为有关科技研究人员的参考用书。

序

解析函数的边值问题是复变函数论中极为重要的分支之一. 由于许多力学的、物理学的、工程技术中的实际问题往往可化为这类问题或者化为奇异积分方程，而后者又与这类问题有着紧密的联系，所以它有着广泛的应用. 以 Н. И. Мусхелишвили 为首的前苏联学派，在这方面做出了许多杰出的工作，并以其专著[42]闻名于世. Ф. Д. Гахов 的专著[36]也总结了这方面的工作. 在我们国内，从 20 世纪 50 年代起也有不少同志关心和从事这方面的研究工作，并进行与此有关的一些其他方面的工作，如数学弹性力学、广义解析函数及其在偏微分方程中的应用等.

上面提到的两本专著内容丰富，但篇幅过大，不便于初学. 本书的目的之一就是力图以较少的篇幅将读者带进这一领域中，因此取材尽量选择著者认为最基本的内容. 另一方面，书中也适当地收入了著者以及有关同志在这方面的某些工作成果.

由于设想的读者对象不只限于数学工作者，也包括广大的科技工作者，因此本书要求的预备知识只限于数学分析、线性代数和复变函数. 此外，还用到了一点有关 Fredholm 积分方程的知识，已列入附录中.

由于着眼于实际的需要，因此一些定理的条件并不要求放得很宽，这样既可使论证简洁又无损于应用. 但在所给条件下，则力求论证严谨，说理清楚；而对某些直观上很明显且易于接受的事实则略而不证，对要用到的离主题较远的某些结果则仅指出参考文献而不加证明，以省篇幅.

书末所附参考文献也只列入本书所直接涉及的，因此并不是完备的. 前述两专著中可找到极丰富的文献资料.

本书原稿曾在武汉大学数学系高年级学生和研究生中试用过多次. 我的同事们，特别是林玉波教授、钟寿国教授以及阅读过原稿的同志们，曾提出了不少很好的意见，使书稿有很多改进，著者在此表示衷心的感谢.

本书曾作为学术著作《解析函数边值问题》出版过两次（第一版，上海科学技术出版社，1987；第二版，武汉大学出版社，2004）. 因本书读者对象主要为研究生，已为多校采用作为研究生教材，故此次改版改为现名. 在

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

改版中，除改正少量误排外，增添了 7.5.4 段和 7.6 节的内容. 此外，本书内容在平面弹性理论中有重要应用，因为有专著［100］系统论述，故本书完全没有提及.

由于著者学识所限，书中缺点错误仍在所难免，尚祈广大读者不吝指正.

路见可

2009 年 6 月于武汉大学

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　Cauchy 型积分

本章介绍研究解析函数边值问题的基本工具，主要是关于 Cauchy 型积分与Cauchy核主值积分的Plemelj公式及其相关性质. 特别还将Cauchy核主值积分推广到高阶奇异积分，并作出经典留数定理的推广. 这些在本书以后各章中都要具体用到.

1.1　Cauchy 型积分的意义

1.1.1　Cauchy 型积分的定义

解析函数边值问题中最重要的工具之一就是 Cauchy 型积分. 我们来说明其定义.

设 $L=\sum_{j=1}^{n} L_j$ 是复平面中一组互不相交的光滑（或分段光滑）曲线 $L_1, L_2, \cdots, L_n$（开口或封闭）的集合（图 1-1）. 在每一 L_j 上取定一指向为正向，记为 L_j^+，从而 L 也取定了正向

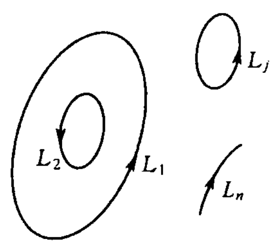

图 1-1

$$L^+=\sum_{j=1}^{n} L_j^+;$$

它们的反向称为负向，分别记为 L_j^- 和 L^-. 以后正向常常略去“+”这一上标，分别简记为 L_j 和 L.

定义 1.1.1　设 $f(t)$ 为定义在 L 上的复函数，则称

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z \overline{\in} L \tag{1.1}$$

是以 $f(t)$ 为**核密度的 Cauchy 型积分**，只要此积分存在.

若无特别声明，我们恒认为 $f(t)$ 在 L 上有界可积①. 于是 Cauchy 型积分 (1.1) 对平面上任何 $z \overline{\in} L$ 都有意义，包括 $z=\infty$ 在内；且容易验证，$F(\infty)=0$. 亦即，$F(z)$ 定义在除 L 以外的整个扩充平面上.

当所有 L_j 都是封闭曲线，且 L 的正侧(即 L 的正向的左侧) 围成一有界区域 D 时，Cauchy 型积分(1.1) 与通常所说的区域 D 的边界 L 上的 **Cauchy 积分**不同. 后者的定义是：如果 $f(z)$ 在 D 内全纯(即单值解析)，在 $\bar{D}=D+L$ 上连续，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z \overline{\in} L$$

叫做 $f(t)$ 在 L 上的 **Cauchy 积分**，且有 Cauchy 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z \in D. \tag{1.2}$$

Cauchy 型积分(1.1) 与这里的差别在于：(1.1) 中的 $f(t)$ 只是定义在 L 上，而并不知道它是否为 D 中某全纯函数连续延拓到 L 上的边值(或即极限值)，即不知道是否存在着 D 中的全纯函数 $f(z)$，使得

$$f(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}} f(z),$$

当然也更谈不上(1.2) 式是否成立.

所以，Cauchy 积分仅仅是 Cauchy 型积分的特殊情形；而对于(1.1)，一般也不能有

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}} F(z)=f(t), \quad t\in L.$$

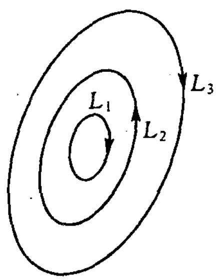

图 1-2

例 1 设 $L=L_1+L_2+L_3$ 是一个包围着一个的三条光滑封闭曲线，各 L_j 的正向已如图 1-2 所取. 试计算

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-z}, \quad z \overline{\in} L.$$

解 显然

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log(t-z)]_L=\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2\pi}[\arg(t-z)]_{L_j}.$$

这里(以及以后)$[\cdots]_L$ 表示当 t 沿 L 的正向环行一周时方括号内 t 的连续函数值的改变量.

当 z 位于 L_1 所围的内域中时，上式右端的三项中，相应于 $j=1,3$ 的两

① 若 $f(t)$ 无界，则认为其在 Riemann 意义下绝对可积.

项均为 -1，而相应于 $j=2$ 的项为 $+1$，因此 $F(z)=-1$. 当 z 位于 L_1 与 L_2 之间的环形区域中时，右端相应于 $j=1$ 的项为 0，其他两项一为 $+1$，一为 -1，故 $F(z)=0$. 同理，当 z 位于 L_2 与 L_3 之间时，$F(z)=-1$；当 z 位于 L_3 所围的外域中时，$F(z)=0$.

例 2 L 同上，求

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{t}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z \overline{\in} L.$$

解 因

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \mathrm{d}t+\frac{z}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-z}=\frac{z}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-z},$$

故由上例知，

$$F(z)=\begin{cases}0, & \text{当 } z \text{ 位于 } L_1, L_2 \text{ 之间或在 } L_3 \text{ 之外时,}\\ -z, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

例 3 计算

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\widehat{ab}} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}, \quad z \overline{\in} \widehat{ab},$$

这里 $\widehat{ab}$ 是一开口光滑弧段($a \neq b$)，且正向已取定自 a 到 b 的指向(图 1-3).

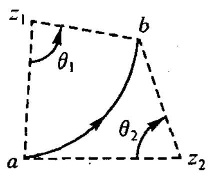

图 1-3

解 显然

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}[\log(t-z)]_{\widehat{ab}}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}[\log(b-z)-\log(a-z)]$$
$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\log\frac{b-z}{a-z},$$

其中 $\log(t-z)$ 作为 t 的函数已在 $\widehat{ab}$ 上任意取定一连续支，而最后右端式子中的对数可理解为 ζ 的函数 $\log\dfrac{b-\zeta}{a-\zeta}$ (它以 a,b 为支点，设平面已沿 $\widehat{ab}$ 剖开，因此可取单值分支) 当 $\zeta=\infty$ 时取 0 值的那个分支(因为 $F(\infty)=0$) 在 $\zeta=z$ 处的值. 因此，

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left(\ln\left|\frac{b-z}{a-z}\right|+\mathrm{i}\theta\right)^{①},$$

其中 $\theta=\arg\dfrac{b-z}{a-z}$ 是 $z\to\infty$ 时 $\theta\to 0$ 的那一支. 事实上，θ 就是当 t 自点 a 沿 $\widehat{ab}$ 连续变到 b 时向量 $t-z$ 的辐角连续改变量，即 $[\arg(t-z)]_{\widehat{ab}}$ 的值. 例如，

---

① 注意，当 x 为正数时，我们永远用 $\ln x$ 表示 x 的实对数值，而把记号 $\log x$ 仍留给多值函数；所以，$\log x=\ln x+2n\pi \mathrm{i}$，$\log z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$，等等.

对于图 1-3 中 z_1, z_2，θ 分别取值 $\theta_1 > 0$，$\theta_2 < 0$.

此外还可看到，当 z 在 a 或 b 附近时，$F(z)$ 有对数型的奇异性.

1.1.2 分区全纯函数

在 Cauchy 型积分(1.1)中，取定某一点 $z \overline{\in} L$，于是可作 z 的一邻域与 L 无公共点，在邻域中任取 $z+h$，并令 $h \to 0$，则用类似于对 Cauchy 积分情况时的证法，可以证明 $F'(z)$ 存在，且

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt, \quad z \overline{\in} L; \tag{1.3}$$

更一般地，对任何自然数 n，将有

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt, \quad z \overline{\in} L. \tag{1.3$'$}$$

由此可见，当 z 不在 L 上时，由(1.1)定义的 $F(z)$ 是解析的，甚至在 $z = \infty$ 处也是如此(请读者自证). 换句话说，由 Cauchy 型积分(1.1)定义的函数 $F(z)$，在被 L 分割的全平面的各个(连通)区域中，包括 ∞ 点在内，都是全纯的. .

例如，若 L 是一条封闭(分段)光滑曲线，则(1.1)定义的 $F(z)$ 在 L 所围的内域与外域中分别各代表一全纯函数；而若 L 是一条(分段)光滑开口弧段，则(1.1)定义的 $F(z)$ 是全平面用 L 剖开后的区域中的一个全纯函数.

注意，我们仍不知道当 z 从 L 的某侧趋于 L 上的某点 t 时，$F(z)$ 的极限值(或称边值)是否存在；而这种极限值的存在性对我们来说是极端重要的.

一般地，我们给出下面的定义：

定义 1.1.2 设 L 是有限条互不相交的封闭曲线的集合，它把全平面分割成有限个区域. $F(z)$ 是这样一函数，它在每个这种区域中全纯，在 $z = \infty$ 处至多有一极点，且当 z 从 L 的任一确定的侧趋于 L 上的任何点 t 时，$F(z)$ 的极限值即边值存在，则称 $F(z)$ 是以 L 为跳跃(或间断)曲线的**分区(片)全纯函数**. 如果 L 中含有开口弧段，则要求在各端点附近，$F(z)$ 有不到一阶的奇异性，即，若 c 为 L 的一端点，则在 $z = c$ 附近，

$$|F(z)| \leqslant \frac{C}{|z-c|^{\nu}}, \quad 0 \leqslant \nu < 1,\ C \text{ 为常数}.$$

注意，当 z 从 L 的另一侧趋于 L 上同一点 t 时，极限值可以不同. $F(z)$ 在某区域的边界上边值处处存在，往往说成它可以从这个区域连续延拓到其边界上. 因此，分区全纯函数可以从每个区域中连续延拓到边界上；当然，边

界含有开口弧段时，端点处例外.

如果在 $z=\infty$ 处 $F(z)$ 的 Laurent 展式为

$$F(z)=a_k z^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots,\quad a_k\neq 0,$$

则称 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处为 k **阶的**或**阶数为** k. 故 $k>0$ 时，它以 $z=\infty$ 为 k 阶极点；$k<0$ 时，它以 $z=\infty$ 为 $-k$ 阶零点；而 $k=0$ 时，表示 $F(\infty)\neq 0$ 且有限. 因此，分区全纯函数 $F(z)$ 要求在 $z=\infty$ 处有有限阶.

当 z 从 L 的正侧即正向的左侧趋于 L 上某点 t 时(当然不是开口弧段的端点，下同)，$F(z)$ 的边值(若存在) 记为 $F^+(t)$，而当 z 从 L 的负侧即右侧趋于 t 时，边值记为 $F^-(t)$ (图 1-4)；而把

$$\varphi(t)=F^+(t)-F^-(t)$$

称为 $F(z)$ 在 t 处的**跳跃**或**跃度**. $\varphi(t)$ 作为 t 的函数，称为**跳跃函数**.

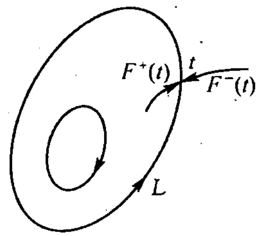

图 1-4

例如，例 2 中的 $F(z)$ 为一分区全纯函数，其跳跃函数为 $\varphi(t)=t$.

一般说来，(1.1) 中定义的 $F(z)$ 虽然在被 L 剖开的各区域中全纯，而且 $F(\infty)=0$ (即在 ∞ 处阶数至多为 -1)，但由于不知道 $F^\pm(t)$ 是否存在，所以还不能断定它是否为一分区全纯函数. 在下一节中，我们将对核密度 $f(t)$ 加以适当条件限制，使得 $F^\pm(t)$ 的确存在，从而 $F(z)$ 便是分区全纯函数了.

当然，我们可以类似地定义分区亚纯(或称半纯) 函数，这里不再赘述.

习 题

1. 对于 Cauchy 型积分(1.1)，求证：

$$F(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right),\ F'(z)=O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),\ \cdots\quad (z\to\infty).$$

2. 计算 Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\operatorname{Re}t}{t-z}dt,$$

其中 L 是单位圆周 $|t|=1$，且已取定反时针向为正向.

提示 在 L 上，$t\bar{t}=1$.

答 当 $|z|<1$ 时，$F(z)=\frac{z}{2}$；当 $|z|>1$ 时，$F(z)=-\frac{1}{2z}$.

3. Cauchy 积分(1.2) 是不是分区全纯函数?

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com