依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

立體幾何學

胡敦復 榮方舟編著

商務印書館發行

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

立體幾何學

胡敦復 榮

商務印書

F一〇三二

中華民國二十五年七月初版
中華民國二十七年三月九版

(57002)

高級中學用
復興教科書 立體幾何學一冊

每冊實價國幣肆角
外埠酌加運費匯費

編著者 胡敦復 榮方舟

主編兼發行人 王雲五 長沙南正街

印刷所 商務印書館 長沙南正街

發行所 商務印書館 各埠

周

(本書校對者王養吾)

編 輯 大 意

1. 本書依照民國二十五年部頒修正高中算學課程標準編著.

2. 本書共分十一編四十六章 其編章之程序分配,完全以學者進修之便適爲標準.

3. 幾何學爲最謹嚴之學.一語不可隨便,語語須有根據.本書一方面將一切需用定理從頭依次證明不令遺漏,一方面將學者於初中幾何中已習知之定理用最簡括之法述之.使學者旣收複習之功而又不感重複乏味.

4. 本書於第一編之末分別詳述證題之方法加以各種例題.學者至此,初中時所覺幾何之困難蓋可釋然矣.

5. 軌跡作圖題,學者最視爲畏途.本書至第二編之末始詳論之.並舉種種例題詳述其解法.務使學者有所依據不致茫然.

6. 關於面積之定理除等積形外常可歸納於比例中.故幾何學教科書往往先論比例而於面積則甚略.然如此則將使學者失去

面積之觀念,幾視矩形爲兩線分之相乘積,不復知其爲一二向度之平面部分之量矣. 故本書特在未講比例之前先專編論面積. 且開始特定"面分"一名詞,先論等積異形面分,次論正方形及矩形 如此,學者對於面積之眞意義,庶幾明瞭無遺矣.

7. 量與數學者務宜辨別清楚. 本書至比例之末第二十五章始論單位及數 在此章之前, 一切圖形, 不定單位, 皆爲一獨立量, 不羼入一毫數之意義. 至二十五章比例之末,此時學者於幾何中各量已一再研究深印腦際,方論單位及數 卽以避免學者對於量及數之混淆不淸也. 故圓心角,圓周角與弧之關係 亦至此始論及之.

8. 根軸,相似中心 調和線束, 極大極小等, 爲初中幾何所或未涉及者. 本書集爲一編, 學者至此雖未可云窺見初等幾何之全豹 然已可覺得圖形之變化莫測,愈鑽硏愈精深而有味也.

9. 作圖題爲幾何學中最難解者. 在未論比例之前作圖題之範圍尙狹. 多數作圖題, 須賴面積比例之定理方得解. 第十六章所論僅爲作圖題之意義及初步解法. 故於平面幾何學之終再專編分類論之.

10. 普通幾何學教科書對於立體幾何學 常專重面積體積之計算. 對於理論方面幾付闕如. 本書依據最近部頒課程標準立體幾何學專爲高中理組修習 故對於理論較多. 並於第十一編雜舉各例以示各種解法之一斑.

11. 本書對於例題之選擇非常注意,凡過於艱澀及無甚意義者,概不選入.故習題爲數雖少而精彩特多.學者務須按題演習,定收事半功倍之效也.

12. 本書編著怱促,難免錯誤.希高明正之

民國二十五年二月編者識

目　錄

立體幾何學

第八編 平面與直線

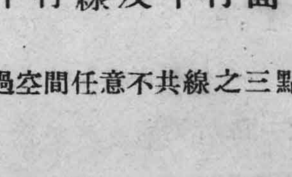
第三十四章 平行線及平行面

§ 525. 幾何公理一四 過空間任意不共線之三點有一平面,只有一平面.

本公理可簡稱謂"空間不共線三點決一平面". 決者, 即過此有一無二之意.

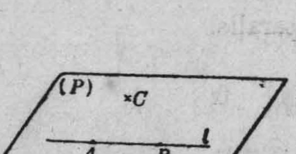
§ 526. 定理一六八 (1) 一直線及線外一點, (2) 相交二直線, (3) 平行二直線,決一平面.

〔假設〕 (1) 直線 l 及線外一點 C.



(1)

(2) 直線 l, m 交於一點 A.

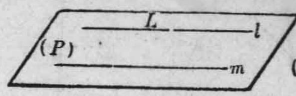


(2)

(3) 直線 $l \parallel m$.

〔終決〕 (1) l 及 C 決

一平面. (2) l 及 m 決一平面. (3) l 及 m 決一平面



(3)

〔證〕 (1) l 上任意取二點 A, B, 則 A, B, C 爲不共線之三點, 故決一平面 (P). A, B 旣在 (P) 內,則 l 全在 (P) 內 $\therefore$ l 及 C 決一平面.

(2) l, m 上各取點 L, M, 則 A, L, M 爲不共線之三點, 故決一平面 (P). 又因 A, L 及 A, M 皆在 (P) 內,故過 A, L 之 l 及過 A, M 之 m 皆全在 (P) 內. $\therefore$ l, m 決一平面.

(3) 依平行線定義 l, m 必在一平面之內 設此平面爲 (P). 在 l 上任取一點 L, 則因 L 及 m 決一平面 $\therefore$ l, m 決一平面.

Q. E. D.

〔注意〕 在平面幾何學中, 二直線不相交, 卽平行;不平行卽相交. 此因二直線本已指定在一平面內故也. 立體幾何學中則不然 空間任意二直線往往旣不平行亦不相交.

§ 527. **定義九〇 平行平面** 空間兩個不相交之平面曰平行平面 (parallel planes).

〔注意〕 但稱平面,常指無限大者而言.如上節圖中之 (P), 並非眞如圖中所可見之面分,實係代表一無限大之完全平面.因欲使吾人吾以得見 故畫了四周邊界耳.

§528. **定義九一 直線與平面平行** 空間一直線與一平面

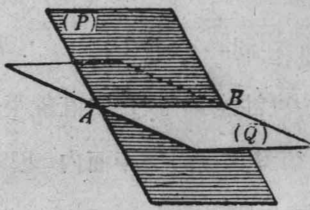
不相交者曰此直線與平面互相平行.

§ 529. **幾何公理一五**　一直線與一平面相交, 其交界爲一點.

§ 530. **幾何公理一六**　二平面相交,其交界不止一點.

§ 531. **定理一六九**　兩平面相交其交界爲一直線.

〔假設〕 (P), (Q) 爲相交兩平面.



〔終決〕 (P), (Q) 之交界爲一直線

〔證〕 設 A, B 爲 (P), (Q) 交界上之二點. 作直線 AB.

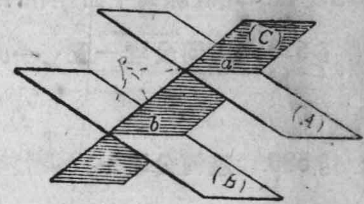
因 A, B 二點皆在 (P) 內, 故直線 AB 全在 (P) 內. 同時 A, B 二點皆在 (Q) 內, 故直線 AB 全在 (Q) 內. 故直線 AB 爲 (P), (Q) 所共有

設 C 爲直線 AB 外任意一點. 則 C 及 AB 決一平面, 卽過 C 及 AB 只有一平面. 故 C 決不爲 (P), (Q) 所共有.

故直線 AB 爲 (P) (Q) 之交界.

卽 (P), (Q) 之交界爲一直線　　*Q. E. D.*

§ 532. **定理一七〇**　二平行平面與第三平面相交, 則其交界爲二平行線.



〔假設〕 $(A) \parallel (B)$, (A), (B) 各交 (C) 於 a, b.

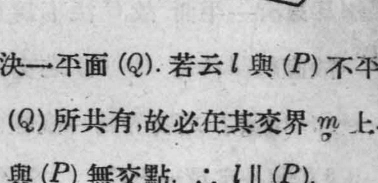
〔終決〕 $a \parallel b$.

〔證〕 若 a, b 二直線交於一點 P, 則 P 將為 (A), (B) 兩平面之共有點. 今 $(A) \parallel (B)$, 故 P 點不能存在. $\therefore a$, b 不相交. 又 a, b 在同一平面 (C) 內. $\therefore a \parallel b$. *Q. E. D.*

〔注意〕 欲證二直線平行, 不可但證其不相交. 於不相交外, 尚須證其在同一平面內. 因若不在同一平面內, 不相交並非平行也.

§ 533. **系** 介乎兩平行平面間之二平行線分相等.

§ 534. **定理一七一** 二平行線之一在一平面內, 則其二必與此平面平行.



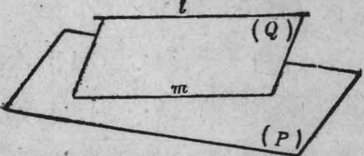
〔假設〕 直線 $l \parallel m$, m 在 (P) 內.

〔終決〕 $l \parallel (P)$.

〔證〕 $\because l \parallel m$, $\therefore l$, m 可決一平面 (Q). 若云 l 與 (P) 不平行而相交於一點 A, 則 A 為 (P), (Q) 所共有, 故必在其交界 m 上. 即 l, m 交於 A. 與假設矛盾. 故 l 與 (P) 無交點. $\therefore l \parallel (P)$.

Q. E. D.

§ 535. **定理一七二** 一直線與一平面平行，則過此直線之任一其他平面與此平面之交線必與此直線平行.

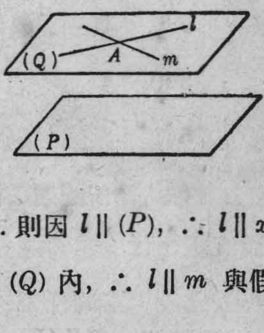


〔假設〕 $l \parallel (P)$, (Q) 爲過 l 之任意平面, (P), (Q) 交於 m.

〔終決〕 $l \parallel m$.

〔證〕 l, m 在同一平面 (Q) 內. 設 l, m 交於 A, 則 A 在 m 內, 卽在 (P) 內, 卽 l 與 (P) 相交, 與假設矛盾. 故 $l \parallel m$. *Q. E. D.*

§ 536. **定理一七三** 相交二直線各與一平面平行，則此二線所決之平面必與此平面平行.

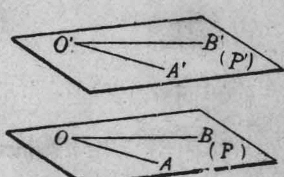


〔假設〕 l, m 交於 A, 決一平面 (Q). $l \parallel (P)$, $m \parallel (P)$.

〔終決〕 $(Q) \parallel (P)$.

〔證〕 設若 (Q) 與 (P) 交於一直線 x. 則因 $l \parallel (P)$, $\therefore l \parallel x$. 又因 $m \parallel (P)$, $\therefore m \parallel x$. 然 l, m, x 皆在 (Q) 內, $\therefore l \parallel m$ 與假設矛盾.

$\therefore (Q) \parallel (P)$. *Q. E. D.*



§ 537. **定理一七四** 兩個角之兩雙邊各平行，則此兩角所決之平面平行.

〔假設〕 空間二角 $\angle AOF$ $\angle A'O'B'$ 各決平面 (P), (P'). $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$.

〔終決〕 $(P) \parallel (P')$.

〔證〕 $\because\ OA \parallel O'A'$, $\therefore\ OA \parallel (P')$

$\because\ OB \parallel O'B'$, $\therefore\ OB \parallel (P')$.

$\therefore\quad (P) \parallel (P')$. *Q. E. D.*

§ **538.** **公法三** 過不共線之三點作一平面.

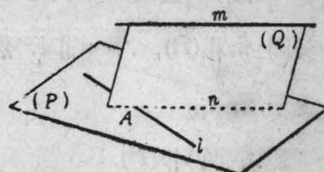
〔註〕 在平面幾何學中,公法一用直尺, 公法二用圓規, 爲一切作圖題之根據. 立體幾何學中之作圖題,不著平面幾何學之有所依據. 故公法三不用任何器具,僅理想中認爲可作而已.

§ **539.** **系一** 過一直線及線外一點作一平面.

§ **540.** **系二** 過相交二直線作一平面.

§ **541.** **系三** 過平行二直線作一平面.

§ **542.** **作圖題二四** 過一所設直線作一平面令與其他一所設直線平行.



已設 空間任意二直線 l, m.

求作 一平面過 l, 平行於 m.

〔解法〕 過 m 及 l 上任意點 A 作平面 (Q). 〔公法三系一〕

在 (Q) 內過 A 作 $n \parallel m$. 〔作圖題四〕

過 l, n 作平面 (P). 〔公法三系二〕

則 (P) 卽所求之平面.　$Q.E.F.$

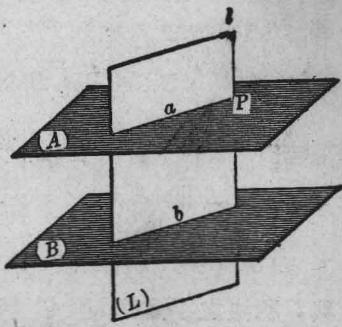
〔證〕 $\because n \parallel m, \therefore (P) \parallel m$. 又 (P) 過 l.

$\therefore (P)$ 爲所求之平面.　$Q.E.D.$

〔討論〕 若 l, m 平行,則有無數解答. 若 l, m 相交則無解答 l, m 不平行,不相當,則有一個解答.

§ 543　系　過一所設點作一平面,介與所設二直線各平行.

§ 544　**定理一七五**　一直線平行於二平行平面之一,則必平行於其二.



〔假設〕 $(A) \parallel (B), l \parallel (A)$.

〔終決〕 $l \parallel (B)$.

〔證〕 在 (A) 內任意取一點 P, P 與 l 決一平面 (L). (L), (A) 之交界爲 a. 若 (L), (B) 不相交, 則 l 與 (B) 不相交, 卽 $l \parallel (B)$. 若 (L), (B) 相交, 其交界爲 b, 則 $\because (A) \parallel (B), \therefore a \parallel b$. 但 $l \parallel (A), \therefore l \parallel a$. 又因 l, a, b 在同一平面 (L) 內. $\therefore l \parallel b. \therefore l \parallel (B)$.　$Q.E.D.$

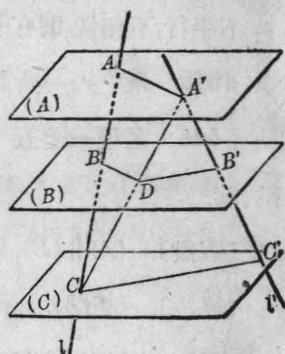
§ 545.　系一　一直線與二平行平面之一相交, 則必與其二亦相交.

§ 546.　系二　一平面平行於其他二平行平面之一, 則必平行於其二.

§547. 系三 一平面與其他二平行平面之一相交，則必與其二亦相交.

§548. 系四 過平面外一點之平行面，有一無二.

§549. 定理一七六 二直線爲諸平行平面所截，其間對應線分成比例.



〔假設〕 $(A) \parallel (B) \parallel (C)$, l 交 (A), (B), (C) 於 A, B, C, l' 交 (A), (B), (C) 於 A', B', C'.

〔終決〕 $AB : A'B' = BC : B'C'$.

〔證〕 A' 與 l 所決之平面交 (B) 於 BD, 則 $BD \parallel AA'$,

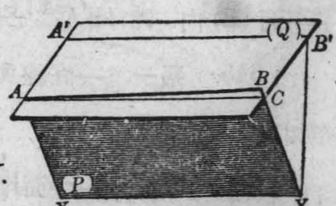
$$\therefore AB : BC = A'D : DC.$$

C 與 l' 所決之平面交 (B) 於 DB', 則 $DB \parallel CC'$,

$\therefore A'D : DC = A'B' : B'C'$. $\therefore AB : BC = AB' : B'C'$.

$$\therefore AB : A'B' = BC : B'C' \qquad Q.E.D.$$

§550. 定理一七七 一直線平行於二平行線之一，則必平行於其二.



〔假設〕 $AB \parallel XY$, $A'B' \parallel XY$.

〔終決〕 $AB \parallel A'B'$.