初中数理化教与学指导丛书

初二代数

北京市西城区教育教学研究中心 编

教育科学出版社

·chuerdaishu

初中数理化教与学指导丛书

初二代数

北京市西城区教育教学研究中心 编

教育科学出版社

（京）新登字第111号

初中数理化教与学指导丛书

初　二　代　数

北京西城区教育教学研究中心 编　责任编辑 宋炳忠

教育科学出版社出版、发行（北京·北太平庄·北三环中路46号）

各地新华书店经销　　北京顺义燕华印刷厂印装

开本：787×1092毫米　1/32　印张：6.625　字数：150千

1992年10月第1版　　1992年10月第1次印刷

印数：00,001—10,500册

ISBN 7-5041-0934-7/G·893　　定价：3.00元

前　言

教学过程是一个知识传递的过程，这个过程要靠师生双方的协同活动来完成。教师如何教，学生如何学，才能使知识的传递更加有效，这是一个很值得探索的问题。

多年来，我们北京市西城区教育教学研究中心的各理科教研室，组织本区教研员和有经验的教师，针对初中数理化的教学，进行了探索和研究，并取得了一些有益的经验。实践证明，这些经验对解决初中数理化教与学中存在的问题，培养教师的教与学生的学的能力，提高教学质量，都大有好处。

在这个基础上，我们编写了初中数理化教与学指导丛书。全套丛书共八册，分别为《初一代数》、《初二代数》、《初三代数》、《初二几何》、《初三几何》、《初二物理》、《初三物理》、《初中化学》。

《丛书》中的章节基本与教材相对应，对教材中大的章分为若干个单元，单元的划分以利于教与学两个方面为原则。每章（或每单元）的内容均由“重点、难点、疑点解析”、“解题方法指导”、“思考与训练”三部分组成。

“重点、难点、疑点解析”阐述分析本章（本单元）的知识及内在联系，指明重点、难点和疑点，并说明如何在教与学中去解决这些问题，以便有效地把教师的教落实到学生的学。

“解题方法指导”选择本章（本单元）典型问题进行分析，题型全，分析活，突出基本技能、基本方法的训练，阐明了思路，归纳出方法，便于学生自学和提高分析与解决问

题的能力。

“思考与训练”从各类题型中精选部分习题，题目的选择由易到难，循序渐进，可用于教师检查教学效果或学生自检自测。

每章之后都有小结，并附有本章的自我检查题及答案。

为便于教师指导学生和检查学生综合掌握本科知识的情况，在代数、几何、物理、化学初三分册的最后均安排了总复习综合指导与思考训练题。

参加数学分册编写的有李松文、方珊、欧阳东方、刘绍贞、郑廉、马淑玲、马成瑞、凌文伟、康英琴、刘际蓁等同志。鉴于时间仓促和编者水平有限，《丛书》难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

北京市西城区教育教学研究中心

1992年2月

初 二 代 数

目 录

第九章　数的开方

在掌握了有理数的加、减、乘、除和乘方运算的基础上，本章主要学习数的开方运算（主要是有理数的开平方运算与开立方运算），而后引入实数的概念，从而把数的范围从有理数扩大到实数，建立实数和数轴上的点的一一对应关系。

本章内容的重点是平方根、立方根的概念和性质，因为乘方运算与开方运算互为逆运算，所以对于平方根和立方根的概念的理解是从乘方运算入手的，学习中应予以注意。

本章的难点是算术根的概念和符号的使用，以及无理数概念的建立。在算术中只出现过圆周率π，并介绍π为无限不循环小数，没有出现无理数的概念。学习了数的开方之后，出现了许多无限不循环小数，即无理数。无理数和有理数有本质的区别，有理数是整数和分数的统称（有理数都可以用即约分数$\frac{p}{q}$表示，其中p、q为整数，$q\neq0$），而无理数既不是整数也不是分数，是无限不循环小数；有限小数和无限循环小数都是可以化为分数的。有理数和无理数统称为实数，全体实数和数轴上的所有点是一一对应关系。

本章新概念多，又比较抽象、难理解，正确地使用算术根的符号也不容易，又都是很重要的基础知识，要给予充分的重视。这章共分四个单元：平方根；立方根；平方根表、立方根表及笔算开方；实数。

第一单元　平方根

重点、难点、疑点解析

由于生产和生活实际的需要，仅有加、减、乘、除与乘方运算就不够用了，例如已知一块正方形草地的面积是2，求草地的边长，用什么运算？这就需要引进一种新的运算：开方运算。

1. 平方根

如果正方形的边长为3，面积为S，则$S=3^2$、$\therefore S=9$. 用的是平方运算。

如果已知正方形面积为 9，求正方形的边长 x，就是求一个平方后等于 9 的数 x.

即$x^2=9$，求 x.

一般有，如果一个数的平方等于 a，这个数就叫做 a 的平方根，也叫二次方根。

比如，$x^2=4$，x 叫做 4 的平方根。

$\because$　$2^2=4$，$(-2)^2=4$.

$\therefore$　2，-2 都是 4 的平方根。

又如，$(\pm 5)^2=25$，$\therefore \pm 5$都是25的平方根。

$\because \left(\pm\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$，$\therefore \pm\dfrac{2}{3}$都是$\dfrac{4}{9}$的平方根。

由平方运算可知：不等于零的两个互为相反的数的平方是同一个正数，所以，一个正数的平方根有两个，是互为相反数的关系。

由于 $0^2=0$，$\therefore$ 0 的平方根仍是 0.

因为正数、负数的平方数都是正数，所以负数没有平方根。

平方根的定义：若一个数的平方等于$a(a\geqslant0)$，这个数就叫做a的平方根。正数的平方根有两个，它们互为相反数；零的平方根是零；负数没有平方根。

求一个数（正数或零）的平方根的运算叫做开平方运算。

如果求$a(a\geqslant0)$的平方根，用符号“$\pm\sqrt[2]{a}$”表示，这里a叫做被开方数，2 叫做根指数，当根指数是 2 时，可省略不写，就记作“$\pm\sqrt{a}$”，读作正、负二次根号下a.

2. 算术平方根

一个正数有两个平方根，其中哪个正的平方根，就叫做这个正数的算术平方根。

正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术根。零的算术平方根是零。算术平方根用符号“$\sqrt{a}$”（$a\geqslant0$）表示。

如，9 的算术平方根是 3，即$\sqrt{9}=3$.

3 的算术平方根是$\sqrt{3}$.

需要注意的是：“$\pm\sqrt{a}$”是a的平方根的符号；“$\sqrt{a}$”是算术平方根的符号，使用时要严格加以区别。

本单元教材的重点是平方根、算术平方根的概念和求法，难点是对算术平方根概念的理解。

解题方法指导

例1 求下列各数的平方根：

(1) 49；(2) 2.89；(3) $1\frac{7}{9}$.

解：(1) $\because$ $(\pm7)^2=49$，$\therefore$49的平方根是±7.

即$\pm\sqrt{49}=\pm7$.

(2) $\because 1\frac{7}{9}=\frac{16}{9}$，$\left(\pm\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$，$\therefore$ $1\frac{7}{9}$的平方根是$\pm\frac{4}{3}$，即$\pm\sqrt{1\frac{7}{9}}=\pm\frac{4}{3}$.

(3) $\because$ $(\pm1.7)^2=2.89$，$\therefore$ 2.89的平方根是±1.7，

即$\pm\sqrt{2.89}=\pm1.7$.

说明：1. 求平方根时，根号前的"±"号一定要写，若不写只表明是两个平方根中的那一个正根了，如$\sqrt{49}=\pm7$是错的。

2. 平方运算和开平方运算互为逆运算。

3. 从平方运算入手，来求平方根的方法，只适用于被开方数是简单的完全平方数，对于一般数的开方就要查平方根表解决。

例2 求下列各数的算术平方根：

(1) 121； (2) 0.64； (3) $\frac{81}{256}$.

解：(1) $\because 11^2=121$，$\therefore$121的算术平方根是11，

即$\sqrt{121}=11$.

(2) $\because 0.8^2=0.64$，$\therefore$0.64的算术平方根是0.8，

即$\sqrt{0.64}=0.8$.

(3) $\because$ $\left(\frac{9}{16}\right)^2=\frac{81}{256}$，$\therefore\frac{81}{256}$的算术平方根是$\frac{9}{16}$，

即$\sqrt{\frac{81}{256}}=\frac{9}{16}$.

例3 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{144}$； (2) $-\sqrt{2.25}$； (3) $\pm\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

解： (1) $\because 12^2=144$，$\therefore \sqrt{144}=12$.

(2) $\because (1.5)^2=2.25$，$\therefore \sqrt{2.25}=1.5$.

$\therefore -\sqrt{2.25}=-1.5$.

(3) $\because \left(\pm\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1\frac{9}{16}$，$\therefore \pm\sqrt{1\frac{9}{16}}=\pm\frac{5}{4}$.

另法：先求 $1\frac{9}{16}$ 的算术平方根。

$$\because \left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1\frac{9}{16}，\therefore \sqrt{1\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}，$$

$$\therefore \pm\sqrt{1\frac{9}{16}}=\pm\frac{5}{4}.$$

说明：由上述例题可知，必须注意根据题目的要求，严格区分符号；另外，只要求出一个正数的算术平方根，再解决其它问题就容易了。

例4 求 $(-6)^2$的平方根和算术平方根。

解： $(-6)^2$的平方根是$\pm\sqrt{(-6)^2}=\pm\sqrt{36}=\pm 6$.

$(-6)^2$ 的算术平方根是 $\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=6$.

说明：正数 a 的平方根有两个为$\pm\sqrt{a}$，其中$\sqrt{a}$ 是 a 的算术平方根。

例5 如果a为正整数，$\sqrt{14-a}$ 为整数，求$\sqrt{14-a}$ 的最大值及此时a的值。

解：$\because 14-a\geqslant 0$，$\therefore a$ 是不大于 14 的正整数，又$\because \sqrt{14-a}$ 为整数，$\therefore 14-a$是在0到14之间的完全平方数，它们是0，1，4，9.

当$14-a$取最大值9时，相应的$\sqrt{14-a}$ 的值也最大，即当$a=14-9=5$ 时，相应的 $\sqrt{14-a}=\sqrt{9}=3$最大。

说明：1. 在求平方根时，往往采用平方运算，所以1至20的整数的平方值应当牢记，对求平方根运算是有益的。

2. 整数的平方称为完全平方数，完全平方数的个位数字只能是0、1、4、5、6、9这六个数。如果一个整数的末位数是2、3、7、8，那么这个数肯定不是完全平方数。

思考与训练

一、判断正误：

1. 4的平方根是－2； ( )
2. 25的平方根是±5； ( )
3. －25的平方根是－5； ( )
4. 0的平方根是0； ( )
5. 9^2的平方根是±9； ( )
6. －3是9的一个平方根； ( )
7. －4是16的算术平方根的相反数； ( )
8. $(-3)^2$的算术平方根是3. ( )

二、求下列各数的平方根：

9. 0.09；
10. $\frac{169}{361}$；
11. $5\frac{19}{25}$；
12. 3.24.

三、求下列各数的算术平方根：

13. 64；
14. 1.96；
15. 0.0121；
16. $\sqrt{256}$.

四、求下列各式的值：

17. $-\sqrt{0.25}$；
18. $-\left(-\sqrt{\frac{225}{36}}\right)$；
19. $\pm\sqrt{169}$；
20. $\sqrt{(-12)^2}$；
21. $\sqrt{5^2+12^2}$；
22. $\sqrt{1\,960\,000}$.

5. 填空：

23. 如果一个正数的平方根是k，那么这个数的另一个平方根是______，这个数的算术平方根是______.

24. 如果$\sqrt{90a}$是整数，那么a可取的最小的正整数是____.

六、求下列各式中的x值：

25. $2x^2=18$；

26. $36x^2=25$；

27. $49x^2-196=0$；

28. $(x-1)^2=9$.

七、选择题（每题只有一个结论正确）：

29. 下列说法中，正确的是（　　）。

(A) 因为$(-3)^2$的底数为负数，所以$(-3)^2$没有平方根；

(B) 因为-4的平方是16，所以16的平方根是-4；

(C) 因为零既不是正数也不是负数，所以零没有平方根；

(D) 因为-9是负数，所以-9没有平方根。

30. $\sqrt{25}$的平方根是（　　）.

(A) 5；　(B) ± 5；　(C) -5；　(D) $\pm\sqrt{5}$.

31. 下列各式中正确的是（　　）。

(A) $\sqrt{(-2)^2}=-2$；　(B) $\sqrt{(-2)^2}=\pm 2$；

(C) $\sqrt{(-2)^2}=2$；　(D) $-\sqrt{(-2)^2}=2$.

32. 如果$\sqrt{x-2}+|y^2-9|=0$，则x与y的值分别是（　　）.

(A) 2和3；　(B) 2和-3；

(C) 2和± 3；　(D) -2和± 3.

八、解答下列各题：

33. 写出绝对值小于$\sqrt{18}$的所有整数。

34. 如果一个自然数的算术平方根为m，试用m的代数式表示下一个自然数的算术平方根。

答案或提示

1. ×； 2. √； 3. ×； 4. √； 5. √； 6. √；
7. √； 8. √； 9. ± 0.3； 10. $\pm\frac{13}{19}$； 11. $\pm\frac{12}{5}$；
12. ± 1.8； 13. 8； 14. 1.4； 15. 0.11； 16. 4；
17. -0.5； 18. $\frac{25}{6}$； 19. ± 13； 20. 12； 21. 13； 22. 1 400； 23. $-k$，$|k|$； 24. 10； 25. ± 3；
26. $\pm\frac{5}{6}$； 27. ± 2； 28. 4或-2； 29. (D)；
30. (D)； 31. (C)； 32. (C)； 33. $\because\sqrt{18}<5$，$\therefore$这些数是0，± 1，± 2，± 3，± 4； 34. 设自然数n的算术平方根为m，则$m^2=n$，n下面一个自然数为$n+1$，即为m^2+1. 所以它的算术平方根为$\sqrt{m^2+1}$.

第二单元 立方根

重点、难点、疑点解析

如果已知正方体的体积是8立方厘米，求正方体的边长x. 就是$x^3=64$，求x，这就要用到开立方运算，即求立方根。

1. 立方根

如果$x^3=a$，则x叫做a的立方根（也叫三次方根），a叫x的立方数。a的立方根用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号下a”，求立方根的运算，叫做开立方。

如果$x>0$，则$x^3=a>0$；

如果$x=0$，则$x^3=a=0$；

如果$x<0$，则$x^3=a<0$.

立方根的定义：如果 $x^3=a$，则 x 叫做 a 的立方根。一个正数（$a>0$）的立方根是一个正数；一个负数（$a<0$）的立方根是一个负数；零的立方根仍是零。

2. n次方根

把平方根和立方根的概念加以推广，我们叙述 n 次方根的定义：如果$x^n=a$(n是大于1的整数)，那么x叫做 a 的 n 次方根。求 a 的 n 次方根的运算，叫做把 a 开 n 次方，a 叫做被开方数，n 叫做根指数。

n 次方根有哪些性质呢？由于$(\pm 3)^2=9$，所以9有两个互为相反数的平方根，这前面已经讲到。大家知道，只有3这个数的立方是27，所以27的立方根只有一个3。一般地，当n是偶数且$a>0$时，如果$x^n=a$，那么 $(-x)^n$也是a，所以a有两个互为相反数的n次方根；当n是奇数时，对任何实数a，只有一个数x，使得$x^n=a$，所以a只有一个n次方根；为$a=0$时，不管n是偶数或奇数，只有$0^n=0$. 所以零的n次方根只有零。

细心的同学会发现：为什么当n为偶数时，被开方数需要条件$a\geqslant 0$呢？这是因为任何数的偶次方都不会小于零，因此，问什么数的平方等于-9是毫无意义的。而开奇次方却没有这个$a\geqslant 0$的要求，这就是说：任何实数都可以开奇次方，而只有非负数才可以开偶次方。

我们还规定：不论n是奇数还是偶数，正n次方根叫做a的n次算术根；零的n次算术根仍然是零。

规定了非负数的算术根，不但使一个正数的两个平方根容易区别，也保证了运算结果的唯一性。在开方运算中，对算术根的非负性要十分重视，否则会出现严重错误。

本单元的重点是立方根的概念与求法，难点是对 n 次算