大學叢書

變分法

何魯 著

商務印書館發行

大學叢書

變　分　法

二八八七上

周

(52832平)

大學叢書(教本) 變分法一冊

平裝 每冊定價大洋柒角
外埠酌加運費匯費

著作者 何魯

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

弁 言

此書爲余民國十八年在中央大學授變分法時所編.適合大學半年學程.最重要之參考書爲 Goursat 之高等分析及 Hadamard 與 Bolza 之兩種變分法專書.其他參考書已不復記憶.此書較他種同類之書爲易讀,且舉例較詳,讀者閱覽以後對於習題,即知所措手,由此以進讀詳盡專著,可以事半功倍.至於變分法之重要,凡研習高等算學者類能知之.無俟贅辭矣.

民國二十三年　　何魯識於重慶大學

變　分　法

目　次

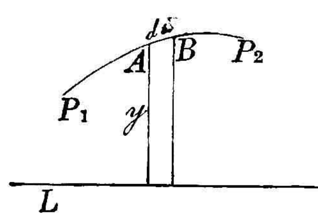
變分法

Calcul de Variation

變分法所研究者爲極大極小問題;但其性質則較普通微分學中所遇者,複雜特甚.微分學中極大極小問題係定一已知函數在某間隔內之極大或極小値,而變分法則須定一個未知函數,或多個未知函數之形,俾一定積分之値成爲極大或極小.今茲所研究者,僅限於實變數範圍,及簡單而富於致用之問題而已.

變分法舉例. 欲明此法,試先舉數例於後:

例一. 在任一平面中已與一直線L及P_1, P_2兩點,就聯P_1, P_2兩點所有之曲線中,試求其一俾繞L線所成之曲面面積爲極小者.



吾取L線爲正經緯 x軸,并令$x_1, y_1; x_2, y_2$爲P_1, P_2之位標.令

$$C: \qquad y=f(x)$$

爲經過此兩點之任一曲線之方程式,AB小弧所繞成之面積

爲 $$2\pi y ds$$

或 $$2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx$$

於是 C 線所繞成之面積爲

$$J=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+y'^2}dx$$

此面積之值視曲線 C 而變,吾人問題,即在定此曲線,亦即在定函數 $f(x)$ 俾 J 之值爲極小.

此問題爲變分法中最易問題之一種,更普通者爲已與

定積分 $$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx\quad\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$$

求定函數 y 俾此定積分爲極大或極小.

如以助變量 t 表 x 及 y,則前舉兩積分之形變爲

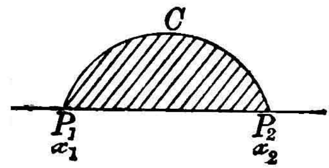
$$J=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

及 $$J=\int_{t_1}^{t_2}f(x,y,x',y')dt.$$

例二. 就聯 P_1,P_2 兩點之所有曲線中且有定長 l 者,試求其一俾其與 P_1P_2 弦所成之面積爲極大.

吾取 P_1,P_2 線爲正經緯制之 x 軸,x_1,x_2 爲 P_1,P_2 之緯量.設 C 爲聯 P_1P_2 之曲線,其長爲 l,

其方程式爲.



$$y=f(x)$$

$$f(x_1)=0,\quad f(x_2)=0$$

因此線有定長 l,則下之條件

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

爲已合,此時在定

$$J=\int_{x_1}^{x_2}y\,dx$$

之極大值.

此例乃下問題之特例:卽欲求定積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx$$

之極端值(Extremum),須定一曲線,俾第二定積分

$$K=\int_{x_1}^{x_2}g(x,y,y')dx$$

有一定值 l 也.此種問題稱爲「等周問題」.後再詳.

變分法中問題之更普通者;爲所研究之定積分,不僅含一次引數,而且含有二次三次乃至高次引數.其形如

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y',y'',\cdots y^{(n)})dx$$

此類問題在變分法歷史中頗佔重要地位.近則其價値漸減;半因更有推廣之式將此容爲特例,半因幾何學及機械學之應用上罕遇之也.

更重要之推廣,乃是定多個未知函數之形,以求一定積分之極端值.下舉之例卽屬此類.

例三. 已與一曲面

$$\phi(x,y,z)=0$$

P_1, P_2 爲此曲面上之兩點.求曲面上聯此二點之最短線.

假定所求曲線之方程式爲

$$y=f(x), \quad z=g(x)$$

f 與 g 須合下條件

$$\phi[x, f(x), g(x)]=0$$

即所求曲線須在曲面上也.

由 P_1 至 P_2 曲線之長爲

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

此時當定兩個未知函數 y, z 俾 J 爲極小.

例四. 有阻力介質中之捷線(Brachistochroue).

設有一重點沿任一空間曲線由 P_1 點行至 P_2 點經過有阻力介質其最初速度爲 v_1, 求定此曲線俾由 P_1 至 P_2 之時間爲最短.所定曲線即此介質中之捷線也.

吾取垂線爲正位標之 z 正軸,重點之質設爲 1, 令 v 爲其速率, g 爲動常數,并設阻力爲速度 v 之函數 $R(v)$.

由生力定理(Théoreme de Force Vive)

$$d\frac{v^2}{2}=g\,dz-R(v)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

爲簡單起見,令 x 爲自變數,就所有函數組

$$y=f(x), \quad z=g(x), \quad v=w(x)$$

中,其最初條件爲

$$f(x_1)=y_1 \quad g(x_1)=z_1 \quad w(x_1)=v_1$$

$$f(x_2)=y_2 \quad g(x_2)=z_2$$

者,而又合微分方程式

$$vv'=gz'-R(v)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

求定一組俾積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{v}$$

之值為極小.

更推廣之,就所有函數組 $y_1, y_2 \cdots y_n$ 中,其自變數同為 x,其最初與附加條件之形為

$$\phi_k(x, y_1, \cdots y_n, y'_1, \cdots y'_n)=0$$

$$k=1, 2, 3, \cdots m(m<n)$$

者,求一定組俾定積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x, y_1, y_2, \cdots y_n, y'_1, \cdots y'_n)dx$$

之值成為極端值.

此類問題極重要.機械學上之哈米頓(Hamilton)原理及微動原理(moindre action)等問題皆屬於此類者也.

變分法亦可應用於多重積分,如極小面積問題即其一也.

例五: 就所有曲面中以一空間曲線 L 為界者,以何者之面積為最小.

設 $$z=f(x, y)$$

為曲面之方程式,S 為 xy 平面上 L 之射影 L' 所界之區域,此時在定 z 使雙重積分

$$J=\int\int_S\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dx\,dy$$

爲極小.

一次變分 (Premiere variation).

小引. 觀上所舉例吾人即知變分法之性質.如欲明其計算方法,須先證明二小引如下:

小引一. 設 $F(x)$ 爲一連續函數在 (x_0, x_1) 間隔內爲有定值的;如積分 $\int_{x_0}^{x_1}n(x)F(x)dx$ 無論 $n(x)$ 之形式如何恆爲零.$n(x)$ 及其引數在同一間隔內爲連續函數,且有 $n(x_0)=n(x_1)=0$, 則 $F(x)$ 在 (x_0, x_1) 全間隔內亦爲零.

證: 假設 $F(x)$ 當 $x=x_2$ 時爲正,x_2 介於 x_0 及 x_1 之間;吾人即可尋一間隔 $(\xi_0\xi_1)$ 包含 $x_2(x_0<\xi_0<x_2<\xi_1<x_1)$. 如是使 $F(x)$ 常在此間隔 $(\xi_0\xi_1)$ 內爲正,現在試以下各條件定 $n(x)$.

1° $n(x)=0$ 當 $x_0\leqq x\leqq\xi_0$.

2° $n(x)=(x-\xi_0)^m(\xi_1-x)^m$, 當 $\xi_0\leqq x\leqq\xi_1$

m 爲一正整數至少等於 2.

3° $n(x)=0$, 當 $\xi_1\leqq x\leqq x_1$

此函數 $n(x)$ 爲連續的,且在 (x_0, x_1) 間隔內有一連續引數,於是相當積分 $\int_{x_0}^{x_1}n(x)F(x)dx$ 之值爲正甚明,是與原設積分恆爲零者不合;同理,假設 $F(x)$ 爲負亦有矛盾,故必也 $F(x)$ 爲零.

更推廣之,如積分

$$\int_{x_0}^{x_1}[n_1(x)\,F_1(x)+n_2\,F_2+n_3\,F_3]dx$$

恆爲零,而 n_1, n_2, n_3 與 n 所合條件相同,則 F_1, F_2, F_3 均將全等於零矣.

小引二. 設 $F(x), n(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔中爲連續函數,其中 $F(x)$ 爲有定值的.若定積分 $\int_{x_0}^{x_1} n(x)F(x)dx$ 恆爲零,無論 $n(x)$ 之形式如何,如是 $\int_{x_0}^{x_1} n(x)dx$ 亦爲零,則函數 $F(x)$ 將成爲一常數.

證: 設所與條件爲已合,吾人亦有

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-c]n(x)dx=0$$

c 爲一任意常數,吾人再選擇 c 使有

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-c]^2dx=0$$

卽可令 $n(x)=F(x)-c$. 於是亦有

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-c]^2dx=0$$

由此卽得 $F(x)=c$.

界說. 初步問題之目的. 設 $F(x, y, y')$ 爲三變數 x, y, y' 之連續函數并其引數至三次者亦爲連續,只須以 x, y 爲位標之點,在 R 平面之單式區域內,又當 y' 恆爲有限值.在吾人所研究之例中 $F(x)$ 總爲分析函數;區域 R 待題之情形而定者,可包含平面之全部或有曲線以界之.

設 $f(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內爲連續且有一引數;吾人謂此函數在此間隔內屬於(I)類.方程式 $y=f(x)$ 當 x 由 x_0 變至 x_1 時代表一 Γ 曲線之弧,其每點皆有一切線,且其角係數常連續易;吾人謂此曲線 Γ 亦屬於(I)類.如此曲線在 R 區域內,則函數 $F[x, f(x), f'(x)]$ 以 $f(x)$ 易 y, $f'(x)$ 易 y' 而得者在 (x_0, x_1) 間隔內爲連續,而積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F[x, f(x), f'(x)]dx$$

有一有限之值,此積分亦可書爲

$$J=\int_{\Gamma} F(x, y, y')dx$$

此積分須沿 Γ 曲線計算.設 A, B 爲 R 區域內之任兩點.其位標各爲 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1);且有 $x_0<x_1$

聯此兩點吾人可得無數(I)類曲線 Γ 全位於 R 區域內.

就中一曲線之代方程式必爲 $y=f(x)$,函數 $f(x)$ 爲(I)類函數在 (x_0, x_1) 間隔內爲確定,又合於條件

$$y_0=f(x_0), \quad y_1=f(x_1)$$

并且 $[x, f(x)]$ 點當 x 由 x_0 變至 x_1 恆在 R 區域內.每有一函數 $f(x)$ 合乎如是條件則有一相當積分 J.吾人所研究之問題卽爲:就 R 區內所有聯 A, B 兩點之(I)類曲線 Γ 有無其一使相當積分 J 之值較之其他曲線合乎相同條件者之相當積分之值爲大或爲小.

吾人事前不能斷定有一 Γ 曲線能答此題.今試假設

$F(x,y,y')$於y'爲有限時及x,y在R區時恆爲正.積分J對於任何曲線Γ聯A,B兩點者亦爲正;故J之值有一低界(borue-mférieure) $m\geqq 0$ 但吾人頗難斷定卽有一曲線Γ其相當積分J之值適爲m;此實有例證其不必如此,是故變分法所研究極大極小問題與普通微分學所遇者不同;蓋在微分學中如有一函數其自變數爲x者在(a,b)閉間隔內爲連續的,則此函數必有一極大或極小也.

吾人先僅從事於求相對之極大極小,是卽僅比較Γ曲線相當之積分及Γ鄰近曲線之相當積分,幷只專求極小.其極大值之求法,但將F變爲$-F$卽得.

此問題可以分析方法確定之.設$y=f(x)$爲(x_0,x_1)間隔內之(I)類函數當$x=x_0$, $f(x_0)=y_0$; $x=x_1$, $f(x_1)=y_1$, 幷且$y=f(x)$所代表之曲線Γ全在R區內,命R_ϵ爲$x=x_0$, $x=x_1$及二曲線

$$Y_1=f(x)+\epsilon,\quad Y_2=f(x)-\epsilon$$

所界之區域ϵ設爲甚小,俾R_ϵ區可以全含於R區.

凡(I)類曲線聯A,B兩點,又全位於R_ϵ區者,可以方程式$y=f(x)+\omega(x)$表之,函數$\omega(x)$在(x_0,x_1)間隔內爲連續,且有一引數幷合乎下列各條件:

(1) $\omega(x_0)=0,\quad \omega(x_1)=0,\quad |\omega(x)|<\epsilon$ 當 $x_0<x<x_1$

吾人謂函數$f(x)$給予積分J一極端值,如其可能求得一正整數ϵ使積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F[x,f(x),f'(x)]dx$$

之值小於或大於下積分

$$J'=\int_{x_0}^{x_1}F[x, f(x)+\omega(x), f'(x)+\omega'(x)]dx$$

$\omega(x)$ 爲 (x_0, x_1) 之(I)類函數合於1之各條件又不全等於零者也.

以上之諸條件定$\omega(x)$,吾甚易明可得無窮如是之函數,且可含任若干助變量者.吾人試先定一簡單形式且只含一助變量者.今設$n(x)$爲(x_0, x_1)間隔內之連續函數且有引數者,又於間隔極限值x_0, x_1爲零,則函數$\alpha n(x)$可小於ϵ,只須取α助量之值至甚小卽可.將$f(x)$易爲$f(x)+\alpha n(x)$,則積分J變爲

$$(2)\qquad J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F[(x, f(x)+\alpha n(x), f'(x)+\alpha n'(x)]dx$$

此函數$J(\alpha)$當$\alpha=0$時應爲極小,$n(x)$可爲任何形式

如吾人依戴氏(Taylor)公式將$J(\alpha)$展之,則有

$$J(\alpha)=J(0)+\frac{\alpha}{1}J_1+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}J_2+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}J_n+\alpha^n h(\alpha)$$

$h(\alpha)$與α同時趨近於零.$\alpha J_1, \alpha^2 J_2, \cdots$稱爲$J$之一次,二次$\cdots$變分;拉格蘭氏(Lagrange)以符號$\delta J, \delta^2 J, \cdots \delta^n J$表之,於是$\delta^n J=\alpha^n\left(\frac{d^n J}{d\alpha^n}\right)_{\alpha=0}$.由是觀之,欲函數$f(x)$使$J$爲極小必也$\delta J=0$, $\delta^2 J\geqq 0$.

無論$n(x)$之形式如何此二條件皆須適合,但$n(x)$及其引數在(x_0, x_1)間隔內僅爲連續函數,并於極限值時爲零卽足.對於極大之條件,但易二次變分爲負可已.

一次變分　尤拉氏(Euler)方程式. 將第(2)式依積號內求引數法引之得一次變分

$$(3)\qquad \delta J = \alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}n(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}n'(x)\right]dx$$

y 及 y' 在 $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ 中應代爲 $f(x)$, $f'(x)$, 若函數 $f(x)$ 之二次引數爲連續的,則吾人對於 $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}n'(x)dx$ 可施以積分分求法而得

$$(3)'\qquad \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}n'(x)dx=\left[n(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}n(x)\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx$$

右端之第一項爲零.因 $n(x)$ 於 x 爲上下界時爲零也.於是一次變分 δJ 成一新式

$$(4)\qquad \delta J=\alpha\int_{x_0}^{x_1}n(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx$$

欲 δJ 於 $n(x)$ 任爲何形式時恆爲零必也,依小引一, $n(x)$ 在積分內之係數在 (x_0, x_1) 間隔內爲零.由此得 $f(x)$ 應適合之第一條件.

欲函數 $f(x)$ 給予定積分 J 一個相對極端值,必也此函數適合下之微分方程式.

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

此方程式稱爲尤拉氏方程式;亦可將 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ 展開書如

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$