高职高专院校规划教材

主　编　姚克俭
副主编　王茗倩　刘春洁　苏丽红

高等数学

Advanced Mathematics

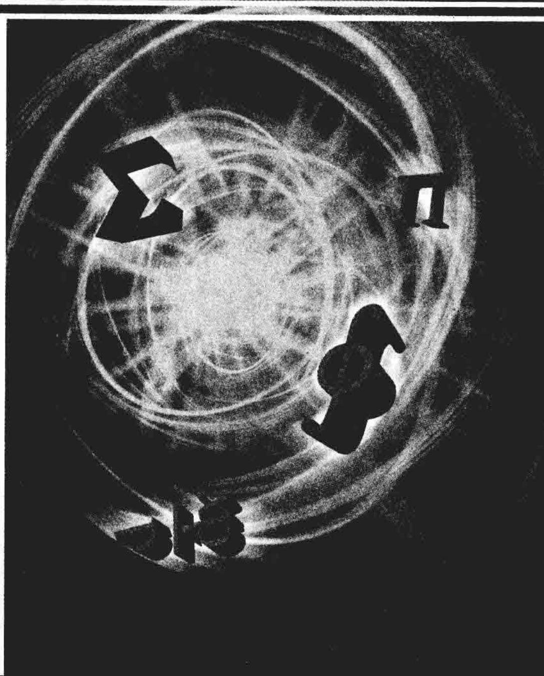
哈爾濱工業大學出版社

高职高专院校规划教材

主　编　姚克俭
副主编　王茗倩　刘春洁　苏丽红
主　审　孔祥华　安　然

高等数学

Advanced Mathematics



哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书根据高等职业技术教育课程改革的需要，在教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》的基础之上修订而成。

考虑到高职高专层次的特点，作者认真研究了与各专业主干课程有关的高等数学的教学内容，注重以应用为目的，以必需、够用为原则，精心选择教学内容。其主要内容有：基础模块——极限与连续，导数与微分，不定积分与定积分，多元函数微积分；应用模块——导数应用，微分方程，定积分的应用，数项级数，MATLAB 数学软件基础等。

该教材可作为高职高专工科及管理类各专业的通用教材，也可以作为高职本科各专业的试用教材，同时还可以作为相关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/姚克俭主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.6

ISBN 978-7-5603-3047-1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①姚…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 130361 号

策划编辑　赵文斌　杜　燕
责任编辑　刘　瑶
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　东北林业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 15.25　字数 355 千字
版　　次　2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－3047－1
印　　数　1～5 000 册
定　　价　28.00 元

前　言

本书根据教育部的相关要求，结合现代高等职业技术教育的办学理念，充分考虑到高职高专学生的特点以及不同专业课程的需要，在高等职业技术课程改革要求下，编写而成。

本教材是黑龙江建筑职业技术学院近几年课程体系改革实验的结晶，充分吸取了数学教学改革的科研成果，体现教学内容的实用性，结合各专业的特点，将专业案例引入教学之中，利用高等数学解决专业实际问题，激发学生学习的积极性与主动性。本书引入高等数学应用软件 MATLAB 的使用方法，大大地提高了学生的计算速度，极大地提高了学生高等数学应用能力的培养与训练。

本书由黑龙江建筑职业技术学院副教授姚克俭担任主编，王茗倩、刘春洁、苏丽红担任副主编。本书共 10 章：第 8 章、第 9 章、附录 A 由姚克俭编写；第 2 章、第 6 章、第 7 章由王茗倩编写；第 1 章、第 4 章由刘春洁编写；第 3 章由安然编写；第 5 章、第 10 章、附录 B 由苏丽红编写。全书由孔祥华、安然担任主审，由姚克俭、孔祥华修改定稿。本书的编写和出版得到了黑龙江建筑职业技术学院领导的大力支持。王富彬教授对本书的编写提出了宝贵意见。对此我们一并表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2010 年 6 月

目　　录

第 1 章　函数极限与连续

函数是近代数学的基本概念之一."高等数学"就是以函数为主要研究对象的一门课程.下面将在中学代数关于函数知识的基础上进一步讨论函数,对函数进行较系统的复习和深入的探讨.极限是贯穿"高等数学"始终的一个重要概念,它是这门课程的基本推理工具.连续则是函数的一个重要性态,连续函数是高等数学研究的主要对象.本章将介绍函数、极限以及连续函数的基本知识,为以后的学习奠定基础.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

1.函数

【定义 1.1】　设 D 为一个非空实数集合,若存在确定的对应法则 f,使得对于数集 D 中的任意一个数 x,根据 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

其中 D 称为函数 f 的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0,因变量 y 能够得到一个确定的值,那么就称函数 f 在 x_0 处有定义,其因变量的值或函数 f 的函数值记为

$$y|_{x=x_0} \quad 或 \quad f(x)|_{x=x_0} \quad 或 \quad f(x_0)$$

实数集合 $B=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.这里的 $f(x)$ 是函数 f 在 x 的函数值,$f(x)$ 与 f 二者并不相同,但是,人们往往通过函数值研究函数,因此通常也称 $f(x)$ 是 x 的函数,或者说 y 是 x 的函数.本书也将采用这种习惯的叙述方式.

不难看出,函数是由定义域与对应法则所确定的,因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应的法则都分别相同时,才表示同一函数,而与自变量及因变量用什么字母表示无关.例如,函数 $y=f(x)$ 可以用 $y=f(\theta)$ 来表示.

正因如此,在给出一个函数时,一般都应标明其定义域,也就是自变量取值的允许范围.这是由所讨论的问题的实际意义确定的.凡未标明实际意义的函数,其定义域是使该式子有意义的自变量的取值范围.例如,$y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域.其中有一种不等式,以后会经常遇到,即满足不等式

$$|x-x_0|<\delta, \quad \delta>0$$

的一切 x,称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$.它的几何意义为:以 x_0 为中心、δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

对于不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 称为点 x_0 的 δ 的空心邻域,记作 $U(\hat{x}_0,\delta)$.

对于在同一问题中所遇到的不同函数,应该采用不同的记号,如 $f(x)$,$\varphi(x)$,$F(x)$,$\Phi(x)$ 等.

有时会遇到给定 x 值,对应的 y 值有多个情况,为了叙述方便称之为多值函数.而符合上述定义的函数称为单值函数.对于多值的情形,可以限制 y 的值域使其变为单值再进行研究.例如,$y = \arcsin x$,则可以限制 $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,而使它转化为单值函数 $y = \arcsin x$,从而对 $y = \arcsin x$ 进行研究,了解 $y = \arcsin x$ 的性态.

【例 1】 求下列函数的定义域.

(1)$y = x^2 - 2x + 3$;

(2)$y = \sqrt{x+3} - \dfrac{1}{x^2-1}$;

(3)$y = \dfrac{1}{\ln(1-x)}$;

(4)$y = \sqrt{x^2-4} + \arcsin\dfrac{x}{2}$.

解 (1) 函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 为多项式函数,当 x 取任何实数时,y 都有唯一确定的值与之对应,故所求函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(2) 若使$\sqrt{x+3}$有意义,需 $x+3 \geqslant 0$,即 $x \geqslant -3$;若使$\dfrac{1}{x^2-1}$有意义,需 $x^2-1 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$,所以函数的定义域为$(-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 若使$\dfrac{1}{\ln(1-x)}$有意义,需 $1-x>0$ 且 $\ln(1-x)\neq 0$,即 $x<1$ 且 $x\neq 0$,所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,1)$.

(4) 若使$\sqrt{x^2-4}$有意义,需 $x^2-4\geqslant 0$,即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$;若使 $\arcsin\dfrac{x}{2}$ 有意义,需$\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1$,即 $-2\leqslant x\leqslant 2$,所以函数的定义域为$\{x \mid x = \pm 2\}$.

【例 2】 设有容积为 $10\ \mathrm{m}^3$ 的无盖圆柱形桶,其底用铜制造,侧壁用铁制造,已知铜价是铁价的 5 倍,试建立做此桶所需的费用 y 与桶的底面半径 r 之间的函数关系.

解 设铁价为 k,铜价为 $5k$,所需费用为 y,桶的体积为 V,侧壁高为 h.

由容积与底面半径及高的关系,有 $V=\pi r^2 h$,则 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$,侧面积为$2\pi rh = 2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{2V}{r}$,又知 $V = 10\ \mathrm{m}^3$,得侧面积为$\dfrac{20}{r}$,故所需费用与桶的底面半径 r 之间的函数关系为$y = \dfrac{20k}{r} + 5\pi r^2 k$.

1.1.2 函数的表示方法

函数 $y(x)$ 的具体表达方式是不尽相同的,这就产生了函数的不同表示法.函数的表示通常有 3 种:公式法、表格法和图示法.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫做函数的公式法.例 2 中的函数是以公式表示的.公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格法，如三角函数、对数函数、企业历年产值的表格等. 表格法的优点是所求的函数容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫做函数的图示法. 这种方法在工程技术上应用较普遍. 图示法的优点是直观形象，可以看到函数的变化趋势.

1.1.3 函数的几种特性

1. 有界性

设有函数 $y = f(x), x \in D, x \subseteq D$. 若 $\exists M > 0$，使 $\forall x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $y = f(x)$ 在 X 上有界. 若这样的 M 不存在（即对充分大的 $M > 0$，都 $\exists x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$），则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

若 $X = D$，则称 $y = f(x)$ 为有界函数. 有界函数在几何上可以用两条平行线（平行于 x 轴）夹住. 如 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界；$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但在 $(0,1)$ 内无界，由此可知，有界与区间有关.

2. 单调性

设有函数 $y = f(x), x \in D, I \subseteq D$. 对 $\forall x_1 < x_2 \in I$，若有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 在 I 上单调递增；若有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 在 I 上单调递减.

注意：单调性与区间有关. 如 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内非单调，但在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减.

【例 3】 证明：$y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增.

证明 $\forall x_1 < x_2 \in (-\infty, +\infty)$，$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$，当 x_1, x_2 同号时，右边二因子均正数，故 $x_2^3 > x_1^3$；当 x_1, x_2 异号时，$x_1^3 < 0, x_2^3 > 0$，故 $x_2^3 > x_1^3$. 故对 $\forall x_1 < x_2 \in (-\infty, +\infty)$，有 $x_1^3 < x_2^3$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增.

【例 4】 讨论函数 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 的单调性.

解 该函数的定义域为 $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. 在 $[-1,1]$ 上任取 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，则

$$f(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2}, \quad f(x_2) = \sqrt{1 - x_2^2}$$

则

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{1 - x_1^2} - \sqrt{1 - x_2^2} = \frac{(1 - x_1^2) - (1 - x_2^2)}{\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}} =$$

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}} = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}}$$

因为 $x_1 < x_2$，所以 $x_2 - x_1 > 0$. 另外，恒有 $\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} > 0$，所以若 $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$，则 $x_1 + x_2 < 0$，从而 $f(x_1) - f(x_2) < 0, f(x_1) < f(x_2)$. 若 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$，则 $x_1 + x_2 > 0$，从而 $f(x_1) - f(x_2) > 0, f(x_1) > f(x_2)$，所以在 $[-1,0]$ 上 $f(x)$ 为增函数，在 $[0,1]$ 上 $f(x)$ 为减函数.

3. 奇偶性

设有函数 $f(x), D = (-l, l)$. 若对 $\forall x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

若对 $\forall x \in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.不满足上述两条的为非奇非偶函数.

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,$f(x)=x^3$ 为奇函数.$f(x)=x^2+x$ 是非奇非偶函数.

注意:奇函数的图形对称于原点,偶函数的图形对称于 y 轴.函数为奇函数或偶函数时,其定义域必定是关于原点对称的.

【例 5】 讨论下述函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{16^x+1}+2^x}{2^x}$;

(2) $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(3) $f(x)=\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-x^2}$;

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2+x, x<0 \\ x-x^2, x>0 \end{cases}$.

解 (1) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$.由于

$$f(-x)=\frac{\sqrt{16^{-x}+1}+2^{-x}}{2^{-x}}=2^x\sqrt{\frac{1}{16^x}+1}+1=$$

$$2^x\frac{\sqrt{1+16^x}}{4^x}+1=\frac{\sqrt{16^x+1}+2^x}{2^x}=f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 由于$\begin{cases} 1-x\neq 0 \\ \dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0 \end{cases}$,所以函数的定义域为 $-1\leqslant x<1$,是关于原点的非对称区间,所以此函数为非奇非偶函数.

(3) 由于$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0 \\ 1-x^2\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -1 \\ -1\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$,所以函数的定义域为 $x=\pm 1$,则

$$f(-x)=\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

且

$$f(\pm 1)=0$$

所以此函数为既奇且偶函数.

(4) 显然函数的定义域关于原点对称.

当 $x>0$ 时,$-x<0$,则

$$f(-x)=x^2-x=-(x-x^2)$$

当 $x<0$ 时,$-x>0$,则

$$f(-x)=-x-x^2=-(x^2+x)$$

即

$$f(-x)=-f(x)$$

所以此函数为奇函数.

4.周期性

设有函数 $y=f(x), x\in D$.若 $\exists\, l\neq 0$,使 $f(x+l)=f(x)(x, x\pm l\in D)$,则称 $f(x)$

为周期函数，l 为周期.(注:本书周期函数的周期均指最小正周期.)

例如，$y = \sin x, y = \cos x$ 的周期都为 2π；$y = \cos 4x$ 的周期为$\frac{\pi}{2}$.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数：$y = C$（C 为常数）.

(2) 幂函数.

1) 形如 $y = x^a$ 的函数，其中 a 为常数.

2) 幂函数的定义域、值域和几何特性根据 a 的取值而定. a 的取值见表 1.1.

表 1.1

$y = x^a$	$y = x^2$	$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$y = x^3$
D_f	$x \in \mathbf{R}$	$x \neq 0$	$x \geqslant 0$	$x \in \mathbf{R}$
D_R	$y \geqslant 0$	$y > 0$	$y \geqslant 0$	$y \in \mathbf{R}$
几何特性	偶函数	偶函数	单调增	奇函数，单调增

3) 运算法则.

①$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$；

②$x^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{x^b}$；

③$x^a x^b = x^{a+b}$.

其中 a，b 均为正整数.

(3) 指数函数.

1) 形如 $y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）.

2) $x \in \mathbf{R}, y > 0$.

3) 当 $x = 0$ 时，$y = 1$，则图象一定过点(0,1).

4) 几何特性. 当 $0 < a < 1$ 时，函数单调递减；当 $a > 1$ 时，函数单调递增.

5) 曲线无限接近 x 轴，但不与 x 轴相交，见图 1.1.

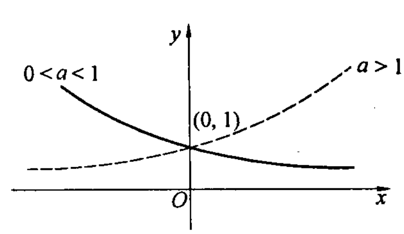


图 1.1

(4) 对数函数.

1) 形如 $y = \log_a x(a > 0$ 且 $a \neq 1)$.

2) $x > 0, y \in \mathbf{R}$.

3) 当 $x = 1$ 时，$y = 0$，则图象一定过点$(1,0)$.

4) 几何特性.当 $0 < a < 1$ 时，函数单调递减；当 $a > 1$ 时，函数单调递增.

5) 曲线无限接近 y 轴，但不与 y 轴相交，见图 1.2.

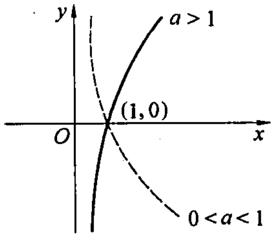


图 1.2

6) 两种特殊的对数.

① 当 $a = 10$ 时，$y = \log_{10} x = \lg x$(常用对数).

② 当 $a = \mathrm{e}$ 时，$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x$(自然对数，$\mathrm{e} \approx 2.718$).

7) 运算法则.

①$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

②$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

③$\log_a x^y = y\log_a x$;

④$a^{\log_a x} = x$.

(5) 三角函数.

$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 的特性见表 1.2. $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 的图象见图 1.3.

表 1.2

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
D_f	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$	$x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$($90°$ 的奇数倍)	$x \neq k\pi$($90°$ 的偶数倍)
D_R	$-1 \leqslant y \leqslant 1$	$-1 \leqslant y \leqslant 1$	$y \in \mathbf{R}$	$y \in \mathbf{R}$
单调性	无	无	单调增	单调减
有界性	有	有	无	无
奇偶性	奇	偶	奇	奇
周期性	2π	2π	π	π

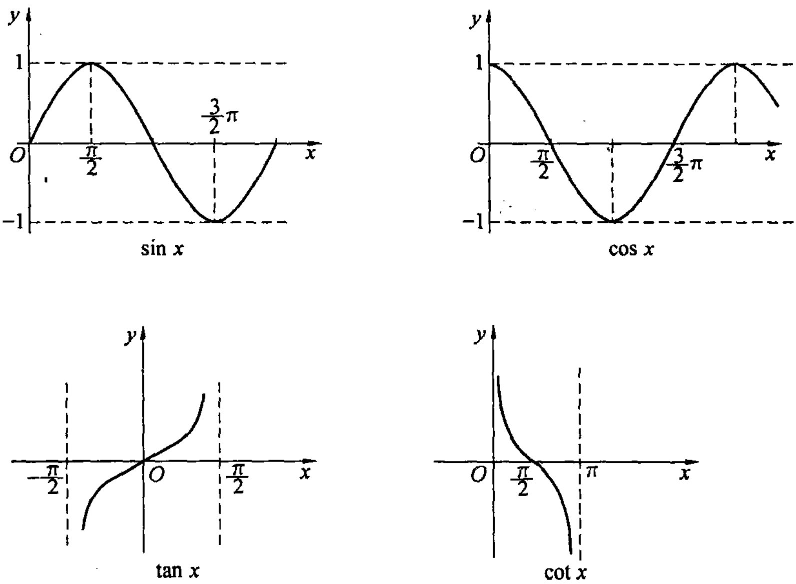


图 1.3

1) 常用公式.

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ $\qquad$ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$

2) 两种特殊的三角形式求周期.

① $y = A\sin(\omega x + \theta)$, $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

② $y = |\sin x|$, $T = \pi$.

通过以上 5 种基本函数有限次地加、减、乘、除、乘方、开方、复合,就构成了初等函数.

2. 复合函数

(1) 复合函数的定义.

【引例】 设 $y = f(u) = \sqrt{u}$,而 $u = 1 - x^2$,则 $y = \sqrt{1 - x^2}$. 故该函数由 $y = f(u) = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 - x^2$ 复合而成.

【定义 1.2】 设 $y = f(u)$,定义域为 D_1. $u = \varphi(x)$,定义域为 D_2. $W_2 = \{u \mid u = \varphi(x), x \in D_2\}$. 若 $D_1 \cap W_2 \neq \varnothing$,则称由 x 经过 u 到 y 的函数,$y = f[\varphi(x)]$ 是由 $y = f(u)$,$u = \varphi(x)$ 复合而成的函数,u 称为中间变量.

注意:交集非空是检验两个函数能否复合的根据.另外,复合过程也可以为多次复合.

【例 6】 $y=f(u)=u^2, u=\varphi(x)=\sin x$ 是否可以复合?$y=\arcsin u, u=2+x^2$ 是否可以复合?

解 $y=f(u)=u^2, u=\varphi(x)=\sin x$,可以复合成 $y=\sin^2 x$,而 $y=\arcsin u, u=2+x^2$ 不可以复合,因为 $D_1=[-1,1], W_2=[2,+\infty), D_1\cap W_2=\varnothing$.

(2) 复合函数的分解.

【例 7】 分解下列函数为简单函数.

(1) $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x^2}$;

(2) $y=\log_a\sqrt{x}$;

(3) $y=5^{\sin(2x+1)^2}$.

解 (1) $y=\operatorname{arccot} u, u=\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y=\log_a u, u=\sqrt{x}$.

(3) $y=5^u, u=\sin V, V=(2x+1)^2$.

3. 分段函数

用几个式子来表示一个函数称为分段函数.

例如,$f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ x, x\leqslant 0\end{cases}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$;$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

【例 8】 求函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ 的定义域.

解 定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $D_R=\{-1,0,1\}$.

【例 9】 $y=[x]$,表示不超过 x 的最大整数.

如:$[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4$. 定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $D_R=\mathbf{Z}$.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次运算和有限次复合而成的,并且可以用一个式子表示的函数叫做初等函数,如 $y=\sqrt{1-x^2}, y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 等.

初等函数是用一个表达式表示的函数.分段函数不是初等函数.显然,基本初等函数是初等函数的特殊情况.

【例 10】 试求由函数 $y=u^3, u=\tan x$ 复合而成的函数.

解 将 $u=\tan x$ 代入 $y=u^3$ 中,即得所求复合函数 $y=\tan^3 x$.

有时,一个复合函数可能由 3 个或更多的函数复合而成. 例如,由函数 $y=2^u$, $u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 可以复合成函数 $y=2^{\sin(x^2+1)}$,其中 u 和 v 都是中间变量.

【例 11】 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\cos^2 x$;

(2) $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$;

(3) $y=e^{\sin\sqrt{x-1}}$.

解 (1) $y=u^2, u=\cos x$.

(2) $y=\sqrt{u},\ u=\cot v,\ v=\frac{x}{2}$.

(3) $y=e^u, u=\sin v, v=\sqrt{w}, w=x-1$.

1.2 极限的概念

1.2.1 数列的极限

【定义 1.3】 设函数 $u_n=f(n)$,其中 n 为正整数,那么按其自变量 n 增大的顺序排列的一串数 $f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$ 称为数列,记作$\{u_n\}$或数列 u_n.

数列的有界性、单调性等定义与函数的相应定义基本一致.即若存在一个常数 M $(M>0)$,使得 $|u_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$ 恒成立,或存在两个数 M 和 m,使得 $m\leqslant u_n\leqslant M$($M$ 称为上界,m 称为下界),则称数列 u_n 为有界数列,或称数列有界;若数列 u_n 满足 $u_n\leqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 或 $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,则分别称$\{u_n\}$为单调递增数列或单调递减数列,这两种数列统称为单调数列.

例如

$$\{u_n\}:2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots \tag{1.1}$$

为单调递减数列.

$$\{u_n\}:0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,1-\frac{1}{n},\cdots \tag{1.2}$$

为单调递增数列.

$$\{u_n\}:1,2,1,\frac{3}{2},1,\cdots,1+\frac{1+(-1)^n}{n},\cdots \tag{1.3}$$

是有界数列,但不是单调数列.

数列变化趋势问题是本节所研究的问题.数列(1.1)、(1.2)、(1.3)都有一种共同的现象,即当 n 无限变大时,它们都无限地接近于1,这就是极限现象.显然,数列 u_n 无限地接近于1,可用数列 u_n 与1之差的绝对值可以任意小来描述.如果用符号 ε 表示任意小的正数,那么就可用 $|u_n-1|<\varepsilon$ 表示.于是,数列 u_n 的极限现象可表述为:当 n 无限变大时,就有 $|u_n-1|<\varepsilon$.

一般的,当 n 无限变大时,数列 u_n 无限接近于一个常数 A 的极限现象可定义如下

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A$$

或当 $n\to\infty$ 时

$$u_n\to A$$

数列(1.1)、(1.2)、(1.3)的极限可分别表示为

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1+(-1)^n}{n}) = 1$$

说明:(1) 在数列 u_n 趋向于 A 的过程中,它的变化较为复杂.例如,数列(1.1)是大于1而趋向于1;数列(1.2)是小于1,而趋向于1;而数列(1.3)是忽大于1,忽等于1,忽小于1.还可以举出其他变化的例子.这种变化的多变性如果不注意,就容易在概念上发生错误.

(2) 对于 n 无限变大,也可用一个式子表示.如果记 N 为一个充分大的正整数,那么 $n > N$ 就表示 n 无限大. N 表示 n 无限变大的程度.因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ 就是指:当 $n > N$ 时,恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$.

(3) 数列极限的几何解释.如果把数列 u_n 中每一项用数轴 Ox 上一个点来表示,那么数列 u_n 趋向于 A 可解释为:存在一个充分大的正整数 N,当 $n > N$ 时,点 u_n 都落点 A 的 ε 邻域内,而不管 ε 多小,数列 u_n 都会密集在点 A 的周围.

并非所有数列都有极限,例如

数列 u_n:$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

数列 u_n:$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

数列 u_n:$1, -4, 9, \cdots, (-1)^{n-1}n^2, \cdots$

当 $n \to \infty$ 时,它们均不与一个常数 A 无限接近,所以这些数列没有极限,没有极限的数列称为发散数列或数列发散.

有界数列与收敛数列有什么关系?初学者容易混淆这两个概念.先看数列 $u_n = (-1)^{n-1}$,它是有界的,但是发散的,所以有界数列不一定是收敛的.反之是否成立呢?我们有下述定理.

【定理 1.1】 若数列收敛,则数列有界.

证明略.

说明:显然对于有限个数 $u_n(n = 1,2,\cdots,N)$,其中必有一个最大值 M 和最小值 m,使 $m \leqslant u_n \leqslant M$.也就是说,对于有限个数讲一定是有界的,而对于无穷多个数就不一定有界了.数列是无穷多项的,所以数列不一定有界,但是收敛数列一定有界.为什么?可以分两步来解释:第一步,从数列第一项开始到有限项 N,共有 N 个有限项,它是有界的;第二步,从第 N 项之后,有无穷多项,由于数列 u_n 收敛, $u_n \to A$,即当 $n > N$,有 $|u_n - A| < \varepsilon$,也就是第 N 项之后均有 $A - \varepsilon < u_n < A + \varepsilon$.所以,从第 N 项之后也是有界的.于是总体来讲,收敛数列是有界的.

1.2.2 函数的极限

1. $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

先来看大家都熟悉的一个例子.当 x 无限接近于1时,函数 $f(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$ 趋向于

何值?显然,当 $x \neq 1$ 时,函数 $f(x)=\frac{2(x^2-1)}{x-1}=2(x+1)$ 趋向于4.这就是函数的极限.怎样描述函数的极限呢?可仿照数列的极限,用 ε 表示任意小的正数,那么当 x 无限接近于1时,函数 $f(x)=\frac{2(x^2-1)}{x-1}$ 无限接近于4.可表示为:当 x 无限接近于1时,恒有 $|f(x)-4|<\varepsilon$.

一般的,当 x 无限接近于 x_0 的定义如下:

【定义1.4】 当 x 无限接近于 x_0 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$(ε 是任意小的正数),则称当自变量 x 趋向于 x_0 时,函数 $f(x)$ 趋向于 A,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A$$

或当 $x \to x_0$ 时

$$f(x) \to A$$

说明:(1) 与数列极限相类似,在 $f(x)$ 趋向于 A 的过程中,可以有大于 A 的,可以有小于 A 的,也可以有等于 A 的.

(2) 从上面例子 $f(x)=\frac{2(x^2-1)}{x-1}$ 看到,x 是不能等于1的,因为当 $x=1$,函数没有定义.一般的,当自变量 $x \to x_0$ 时,x 可以不等于 x_0.

(3) 自变量 $x \to x_0$ 也可以用不等式表示.如果用 δ 记作充分小的正数,那么 x 无限接近 x_0,可由 x_0 的 δ 空心邻域表示,即 $0<|x-x_0|<\delta$,其中 δ 表示 x 与 x_0 接近的程度.这样,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 就是指:当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) 几何解释.$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 是指:当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

作两条直线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$,不管它们之间的距离有多小,只要 x 进入 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内,曲线 $y=f(x)$ 就会落在这两条直线之间.

有时仅需要考虑自变量 x 大于 x_0 而趋向于 x_0(或 x 小于 x_0 而趋向于 x_0)时,函数 $f(x)$ 趋向于 A 的极限,此时称 A 是函数 $f(x)$ 的右极限(或左极限),记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A \quad \text{或} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)=A$$

左、右极限统称为函数 $f(x)$ 的单侧极限.显然当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 的极限存在的充分必要条件是:$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在且相等,即

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A$$

以下是几种重要现象:

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在,但函数 $f(x)$ 在 x_0 处可以没有定义.

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处虽然有定义,且在 x_0 处有极限,但两者不相等,即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义,也有极限,且两者相等.

除了上述3种情况外,以后还会遇到其他情况,但这3种是主要情况.第三种情况我们