

张景中 / 主编

走进 教育数学

Go to Educational Mathematics

数学的神韵

数学的抽象就是“通过有招学无招，无招胜有招”。

从复杂的不同事物中总结出共同的简单规律，

再用来解决更多的复杂问题。

这也就是数学的神韵。



科学出版社

www.sciencep.com

“十一五”国家重点图书出版规划项目

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

数学的神韵

科学出版社

北京

内 容 简 介

数学的抽象,不是远离现实的无用和无聊的说教,而是从纷纭世界的千姿百态中总结出来的共同规律,因此才能放之四海而大显身手.共同的规律往往简单.简单的方法最有威力,这是金庸的武侠小说《神雕侠侣》中的老前辈独孤求败留下的武功教材中阐述的道理,也正是数学的威力和魅力,数学的神韵.本书引入了大量故事和实例,来体现数学的神韵.百科百家、七十二行、生产生活、音乐美术、游山玩水甚至吃饭,都可以是数学的例子.诗歌、武侠、哲学,都成为讲述数学故事和数学道理的语言.书中的例子简单而又自然,贴近百姓的生活,体现的却是数学大道理.精辟的数学思想“随风潜入夜”,强大的数学方法“润物细无声”,让你在不知不觉中接受数学的熏陶,领略数学的神韵.

本书可启迪读者的思维,开阅读者的视野,供高中以上文化程度的学生以及教师、科技工作者和数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学的神韵 / 李尚志著. —北京: 科学出版社, 2010
(走进教育数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-025981-3

I. 数… II. 李… III. 数学 - 普及读物 IV. O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 202060 号

丛书策划: 李 敏

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 4 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2010 年 4 月第一次印刷 印张: 12 1/4 插页: 2

印数: 1—6 000

字数: 180 000

定价: 35.00 元

如有印装质量问题, 我社负责调换

《走进教育数学》丛书编委会

主 编 张景中

委 员 (按汉语拼音排序)

李尚志 林 群 沈文选 谈祥柏

王鹏远 张奠宙 张景中 朱华伟

总序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学？”

“教育数学和数学教育有何不同？”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务。

把学数学比作吃核桃。核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它。有些核桃，外壳与核仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到。数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃。教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味，更营养，更容易砸开吃净。

“教育数学”的提法，最早出现在笔者1989年所写的《从数学教育到教育数学》中。其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》，柯西写《分析教程》，都是教育数学的经典之作。

数学教育有很多世界公认的难点，如初等数学里的几何和三角，高等数学里面的微积分，都比较难学。为了对付这些难点，

很多数学老师、数学教育专家前赴后继，做了大量的研究，写了很多的著作，进行了广泛的教学实践。多年实践，几番改革，还是觉得太难，不得不“忍痛割爱”，少学或者不学。教育数学则从另一个角度看问题：这些难点的产生，是不是因为前人留下来的知识组织得不够好，不适于数学的教与学？能不能优化数学，改良数学，让数学知识变得更容易学习呢？

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系。英语中12个月的名字：January, February, ……。背单词要花点工夫吧？如果改良一下：一月就叫 Monthone，二月就叫 Monthtwo，等等，马上就能理解，就能记住，学起来就容易多了。生活的语言如此，科学的语言——数学——何尝不是这样呢？

ii

很多人认为，现在小学、中学到大学里所学的数学，从算术、几何、代数、三角到微积分，都是几百年前甚至几千年前创造出来的数学。这些数学的最基本的部分，普遍认为是经过千锤百炼，相当成熟了。对于这样的数学内容，除了选择取舍，除了教学法的加工之外，还有优化改革的余地吗？

但事情还可以换个角度看。这些进入了课堂的数学，是在不同的年代，不同的地方，由不同的人，为不同的目的而创造出来的，而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的。难道它们会自然而然地配合默契，适宜于教学和学习吗？

看来，这主要不是一个理论问题，而是一个实践问题。

走进教育数学，看看教育数学在做什么，有助于回答这类问题。

随便翻翻这几本书，就能了解教育数学领域里近20年来做了哪些工作。从已有的结果看到，教育数学有事可做，而且能做更多的事情。

比如微积分教学的改革，这是在世界范围内被广为关注的事。丛书中有两本专讲微积分，主要还不是讲教学方法，而是讲改革微积分本身。

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分，是第一代的微积分。这是

说不清楚的微积分. 创建者说不清楚, 使用微积分解决问题的数学家也说不清楚. 原理虽然说不清楚, 应用仍然在蓬勃发展. 微积分在说不清楚的情形下发展了 130 多年.

柯西和魏尔斯特拉斯等建立了严谨的极限理论, 巩固了微积分的基础, 形成了第二代的微积分. 数学家把微积分说清楚了. 但是由于概念和推理繁琐迂回, 对于绝大多数学习高等数学的人来说, 是听不明白的微积分. 微积分在多数学习者听不明白的情形下, 又发展了 170 多年, 直到今天.

第三代的微积分, 是正在创建发展的新一代的微积分. 人们希望微积分不但严谨, 而且直观易懂, 简易明快. 让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理, 不但知其然而且知其所以然. 不但数学家说得清楚, 而且非数学专业的多数学子也能听得明白.

第一代微积分和第二代微积分, 在具体计算方法上基本相同; 不同的是对原理的说明, 前者说不清楚, 后者说清楚了.

第三代微积分和前两代微积分, 在具体计算方法上也没有不同; 不同的仍是对原理的说明.

几十年来, 国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践. 这方面的努力, 已经有了显著的成效. 在我国, 林群院士近 10 年来在此方向做了大量的工作. 本丛书中的《微积分快餐》, 就是他在此领域的代表作.

古今中外, 通俗地介绍微积分的读物极多, 但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有. 《微积分快餐》做到了. 一张图, 一个不等式, 几行文字, 浓缩了微积分的精华. 作者将微积分讲得轻松活泼、简单明了而且严谨自封, 让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂.

丛书中还有一本《直来直去的微积分》, 是笔者学习微积分的心得. 书中从“瞬时速度有时比平均速度大, 有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发, 不用极限和实数, “微分不微, 积分不积”, 直截了当地建立了微积分基础理论. 书中概念与《微积

分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩。

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功。我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的。

前辈泰斗是我们的先驱。教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望。

两本关于微积分的书，都专注于基本思想和基本概念的革命。基本思想、基本概念，以及在此基础上建立的基本定理和公式，是这门数学的筋骨。数学不能只有筋骨，还要有血有肉。中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》，是有血有肉、丰满生动的教育数学。书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事，而作者却能推陈出新，用新的视角和方法处理老问题，找出事物之间的联系，发现不同中的相同，揭示隐藏的规律。幽默的场景，诙谐的语言，使人在轻松阅读中领略神韵，识破玄机。看看这些标题，“简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”，可以想见作者的功力非同一般！特别值得一提的是，书中对微积分的精辟见解，如用代数观点演绎无穷小等，适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习，望读者留意体味。

练武功的上乘境界是“无招胜有招”，但武功仍要从一招一式入门。解数学题也是如此。著名数学家和数学教育家项武义先生说，教数学要教给学生“大巧”，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”。我想所谓“无招胜有招”的境界，就是“大巧”吧！但是，小巧固不足取，大巧也确实太难。对于大多数学子，还要重视有章可循的招式，由小到大，以小御大，小题做大，小中见

大. 朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》, 踏踏实实地从一招一式一题一法着手, 探秘发微, 系统地阐述数学解题法门, 是引领读者登堂入室之作. 作者是数学奥林匹克领域的专家. 数学奥林匹克讲究题目出新, 不落老套. 我看了这本书里的不少例题, 看不出有哪些似曾相识, 真不知道他是从哪里搜罗来的!

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》. 竞赛数学当然就是奥林匹克数学. 华伟教授认为, 竞赛数学是教育数学的一部分. 这个看法是言之成理的. 数学要解题, 要发现问题、创造方法. 年复一年进行的数学竞赛活动, 不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液, 常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态. 早期的国际数学奥林匹克试题, 有不少进入了数学教材, 成为例题和习题. 竞赛数学与教育数学的关系, 于此可见一斑.

写到这里, 忍不住要为数学竞赛说几句话. 有一阵子, 媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音, 有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒. 我看了有关报道后第一个想法是, 中国现在值得反对的事情不少, 论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧. 再仔细读这些反对数学竞赛的意见, 可以看出来, 他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训. 就数学竞赛本身而言, 是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动. 这些热心参与数学竞赛的数学爱好者 (还有不少数学爱好者参与其他活动, 例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖), 估计不超过约两亿中小学生的百分之五. 从一方面讲, 数学竞赛培训活动过热产生的消极影响, 和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关, 这笔账不能算在数学竞赛头上; 从另一方面看, 大学招生和数学竞赛挂钩, 也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可. 对于青少年的课外兴趣活动, 积极的对策不应当是限制堵塞, 而是开源分流. 发展多种课外活动, 让更多的青少年各得其所, 把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可, 数学竞赛培训

活动过热的问题自然就化解或缓解了。

回到前面的话题。上面说到“大巧”和“小巧”，自然想到还有“中巧”。大巧法无定法，小巧一题一法。中巧呢，则希望用一个方法解出一类题目。也就是说，把数学问题分门别类，一类一类地寻求可以机械执行的方法，即算法。中国古代的《九章算术》，就贯穿了分类解题寻求算法的思想。中小学里学习四则算术、代数方程，大学里学习求导数，学的多是机械的算法。但是，自古以来几何命题的证明却千变万化，法无定法。为了找寻几何证题的一般规律，从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特，前赴后继，孜孜以求。我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出，希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人。在《几何基础》这部名著中，希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题，给出了机械化的判定算法。由于受时代的局限性，希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知。直到1977年，吴文俊先生提出了一个新的方法，可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假。这一成果在国际上被称为“吴方法”，它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮，使这个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分。

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法，都不能给出人们易于检验和理解的证明，即所谓可读证明。国内外的专家一度认为，机器证明的本质在于“用量的复杂克服质的困难”，所以不可能机械地产生可读证明。

笔者基于1974年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得，总结出用面积关系解题的规律。在这些规律的基础上，1992年提出消点算法，和周咸青、高小山两位教授合作，创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法，并在计算机上实现。最近在网上看到，面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了。本丛书中的《几何新方法和新体系》，包括了面积消点法的通俗阐述，以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统，由冷拓同志协助笔者整理而成。教育数学研究的副产

品解决了机器证明领域中的难题，对笔者而言实属侥幸。

基于对数学教育的兴趣，笔者从1974年以来，在30多年间持续地探讨面积解题的规律，想把几何变容易一些。后来发现，国内外的中学数学教材里，已经把几何证明删得差不多了。于是“迷途知返”，把三角作为研究的重点。数学教材无论如何改革，三角总是删不掉的吧。本丛书中的《一线串通的初等数学》，讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角，以三角的发展引出代数工具并探索几何，把三者串在一起的思路。

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量。其实，向量早已下放到中学，与传统的初等数学为伍了。在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量。讲了向量，自然想试试用向量解决几何问题，看看向量解题有没有优越性。可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中，方法略嫌繁琐，反而不如传统的几何方法简捷优美。如何用向量法解几何题？能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性？这自然是教育数学应当关心的一个问题。为此，本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》。书中用大量实例说明，如果掌握了向量解题的要领，在许多情形下，向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮。这要领，除了向量的基本性质，关键就是“回路法”。绕来绕去，就是回路之意。回路法是笔者的经验谈，没有考证前人是否已有过，更没有上升为算法。书稿主要由彭翥成同志执笔，绝大多数例子，也是他采集加工的。

谈起中国的数学科普，谈祥柏的名字几乎无人不知。老先生年近八旬，从事数学科普创作超过半个世纪，出书50多种，文章逾千篇。对于数学的执著和一生的爱，洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间。哪怕仅仅信手翻上几页，哪怕是对数学知之不多的中小学生，也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引。书中涉及的数学知识似乎不多不深，所蕴含的哲理却足以使读者掩卷遐想。例如，书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐，展现了古老学科的青春；书中提到海峡两

岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的“自然数高次方的不变特性”，这些生动活泼的素材，兼有冰冷的思考与火热的激情，无论读者偏文偏理，均会有所收益。

沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究和教育数学的研究。他的《走进教育数学》和本丛书同名，是一本从学术理论角度探索教育数学的著作。在书中他试图诠释“教育数学”的概念，探究“教育数学”的思想源头与内涵；提出“整合创新优化”、“返璞归真优化”等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例。笔者原来杜撰出“教育数学”的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统。经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了。这确是意外的收获。

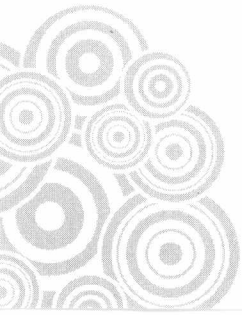
viii

浏览着这风格不同并且内容迥异的10本书，教育数学领域的现状历历在目。这是一个开放求新的园地，一个蓬勃发展的领域。在这里耕耘劳作的人们，想的是教育，做的是数学，为教育而研究数学，通过丰富发展数学而推进教育。在这里大家都做自己想做的事，提出新定义新概念，建立新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味，凡此种种，无不是为教育而做数学。

为教育而做数学，做出了些结果，出了这套书，这仅仅是开始。真正重要的是进入教材，进入课堂，产生实效，让千千万万学子受益，进而推动社会发展，造福人类。这才是作者们和出版者的大期望。切望海内外同道者和不同道者指正批评，相与切磋，共求真知，为数学教育的进步贡献力量。



2009年7月



前言

数学精微何处寻？纷纭世界有模型。
描摹万象得神韵，识破玄机算古今。
岂是空文无实效，能生妙策济苍生。
经天纬地展身手；七十二行任纵横。

这首诗最初是我为编写的一本数学建模教材写的，放在教材正文之前。

为什么数学教材要从诗开始？《三国演义》从诗开始，《红楼梦》从诗开始，数学书为什么不能从诗开始？

这首诗的题目是《咏数学建模》，主题是讲数学怎样从现实世界中产生出来。毛泽东有篇文章，一开始就问：“人的正确思想是从哪里来的？是从天上掉下来的吗？是人的头脑里固有的吗？”数学也是人的正确思想。它不是从天上

掉下来的，也不是人的头脑里固有的。数学，归根结底是从现实世界中来的，是为了描述纷纭的现实世界中的各种现象、解决现实世界中的各种问题而产生出来的。怎样描述“万象”？最开始很可能是“描摹”，就像照相机一样将风景人物依样照下来。但现实世界的万象太复杂，难以一一描摹，即使描摹下来，也对我们没有用处。必须从复杂的不同事物中发现共同点，发现相互联系，发现藏在表面现象后面的规律，这就是神韵，就是玄机。这才产生了各门科学，包括数学在内。

抽象是数学的一个主要特征，抽象也是很多学生学习数学的主要困难和障碍。怎样解决这看起来不可调和的矛盾？基于作者对数学的理解和对学生的了解，以及多年的教学经验，认为：既然抽象就是从许多不同事物中提取的共同点，那么数学的思想方法、概念原理应当通过适当的例子来体现。这些例子既要能体现数学的本质，又要能通俗易懂、引人入胜、为学生喜闻乐见，并且还能举一反三，应用到其他看起来不相干的地方去。

基于这一认识，本书引入了大量故事和实例，来体现数学的思想，显示数学的神韵。这些实例，有些是作者本人从多年的生活和工作经历中观察总结出来的，有些是大家熟悉的老故事。新故事固然给人以新鲜感受，老故事也从新的视角重新审视和处理，使读者得到新收获。百科全书、七十二行、生产生活、音乐美术、游山玩水甚至吃饭，都可以是数学的例子。诗歌、武侠、哲学，都可以是讲述数学故事和数学道理的语言。幽默的场景，诙谐的语言，

让你在轻松愉快的神游中领略数学的神韵，接受数学的熏陶。精辟的数学思想“随风潜入夜”，不知不觉地流入读者的心灵。强大的数学方法“润物细无声”，让貌似困难的问题迎刃而解。

书中涉及的问题，表面上简单，看起来像是“山寨版”，实际上暗藏玄机，体现了最正宗的数学大道理。简单的方法最有威力，这是金庸的武侠小说《神雕侠侣》中的独孤求败留下的武功教材中阐述的道理，不妨称为“独孤求败基本定理”。将复杂转化为简单，困难转化为容易，也就是“打不赢就跑，跑到打得赢的地方再打”，仿佛是《天龙八部》中段誉的逃跑功夫“凌波微步”。既要转化，又要保持一些重要的性质不变，这就是著名数学家 F. 克莱茵关于几何学的著名讲演“爱尔兰根纲领”中的思想。几何太灵活，不容易计算，转化为代数来计算；代数太抽象，计算太繁琐，转化为形象生动的几何模型来帮助理解。凡此种种，都体现了数学的神韵。

几何好懂不好算，代数好算不好懂。向量既是几何图形，又能进行运算，兼有几何与代数的优点，在一定程度上克服了两者的缺点，是实现几何与代数两者相互转化的最好的桥梁。实现这种转化的基本路线是：将几何图形的性质用向量运算的语言来描述，通过向量的代数运算来解决。如果还不能解决，再将向量运算通过坐标转化为实数的代数运算来解决，这就是解析几何。现在有些“改革”教材，口头上也说向量是沟通几何与代数的桥梁，却迟迟不修这座桥梁，将向量放在第四册，几乎到了必修教材的

最末尾，却将解析几何放在第二册，这就是铁了心拒绝通过向量这座桥梁通向解析几何，逼着学生遭受徒步涉水之苦，甚至承受淹死的危险。本书介绍了通过向量实现由几何到代数转化的一些具体实例，希望让一部分学生见识一下向量这座桥梁的威力。同时还在第四节介绍了另一方面的例子，说明几何观点也可以反过来出奇制胜地解决代数问题。

本书也讲了微积分，但不是将大学中的微积分教材照搬过来，而是用“凌波微步”的功夫重新处理，使它的形象更简明，非匀速运动用与之最接近的匀速运动来描述，曲线用与之最接近的直线来刻画，函数用与之最接近的一次函数来代替，这是微积分的主要思想，是莱布尼茨发明微积分时提出的观点。由这个观点出发，我们处理了中学物理和数学中已经提出但还不能解决的问题，或者只知其然而不知其所以然的几个问题，例如：圆锥曲线的光学性质，变速运动的速度与路程，曲线围成的面积，等等。没有学过微积分的读者可以由此入门，已经学过微积分可以从新的角度重新加以理解。

你到餐馆去，面临一份菜单，不需要将全部菜都点来品尝一遍，也不必抱怨菜单中的菜太多你不能全部吃完。只要每个顾客都能找到他喜欢的菜，就很好了。本书也是这样，不指望每个读者都学过本书涉及的全部知识，你也不必抱怨哪个地方没有学过、看不懂。事实上，哪怕是上过大学甚至读过研究生的读者也未必学过书中的全部知识，例如书中所介绍的正17边形尺规作图的理论和作法，涉及抽象代数中的伽罗瓦理论，除了代数专业的研究生外，大

多数读者就没学过。但是，没学过并不意味着读不懂，学过也不意味着懂了。本书强调的是数学思想而不是具体算法，但同时也强调数学思想不是空的，所要讲的数学思想都通过具体实例（包括具体算法）来体现。因此，不必为你有多少知识不懂而颓丧，只要你有收获，就值得高兴。不同文化层次的读者都可以从本书中得到收获，对数学的思想有所体会。学过小学算术的读者，就可以读懂前两章的前几节的内容并从中有所收获。学过高中数学的读者已经具备足够的知识读懂本书的大部分内容。有些内容你学过，但本书中利用这些知识来解决问题的例子也可以让你耳目一新，而且你可能发现本书中的叙述与你所学的书本上的叙述不一样。叙述虽然不一样，只要都是对的，就应当相互不冲突，相信本书的叙述可以帮助你以前学的东西加深理解，将以前令你讨厌的东西变得可爱，以前觉得无用的变得有用，你会更善于用它们来解决各种问题——包括实际生活中的问题和考试中遇到的问题。有些内容你以前没学过，或者没学好，或者以后才学，你可以通过本书先学一遍或者再学一遍，首先体会它的总体思想，在思想的指导下再去学它的具体操作和应用。这就是本书希望达到的目的。当然，我知道，不可能在所有读者身上都达到这个目的，但至少应当能够在大部分读者身上达到。我们希望这部分读者越多越好。



2009年11月