刘 耀 段炎伏

新编高等数学习题课教程

兰 州 大 学 出 版 社

新编高等数学习题课教材

刘 耀 段炎伏 编著

兰州大学出版社
1989 · 兰州

新编高等数学习题课教材

刘　耀　段炎伏　编著

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

中科院近物所科技印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

开本：787×1092毫米 1/32　印张：19.5

1989年9月第1版　1989年9月第1次印刷

字数：438千字　印数：1—5000册

ISBN7-311-00242-7／O·34　定价：6.83元

前　　言

习题课的任务是通过对一些问题的讨论，深入理解课程的内容；通过例题和习题掌握解题方法，提高学生分析问题和解决问题的能力；习题课还应根据不同专业的要求，适当加深对教材的理解，扩大知识面；习题课上应注意启发学生的思维，鼓励学生的创新精神。

本教材是为《新编高等数学》配套用的，例题、问题、练习题共选了1500多个。为了便于自学，例题占的比例较大，练习题均给出答案或提示。

徐军民同志为本教材提供了许多宝贵资料。

由于我们水平不高，时间仓促，错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1988年8月

目 录

（一）函　　数

关于函数重点地需要弄清下面几个问题：

1.决定函数的要素

函数乃是定义域到值域的一种单值对应，这里有三个要素：定义域、值域，对应规则。为什么说函数决定的是定义域和对应规则两个要素？函数的定义域一般根据什么原则确定？

问题1　下列各对函数是否相同？为什么？

（1）　$f(x)=\mathrm{sgn}x$　，　$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

（2）　$f(x)=\mathrm{tg}^{-1}x$，　$g(x)=\mathrm{ctg}^{-1}\dfrac{1}{x}$

（3）　$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x$，　$g(x)=\ln\sqrt{x}$

（4）　$f(x)=x^2$　，　$g(t)=t^2$

例1　设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,1]$，试求函数$f(x+a)+f(x-a)$的定义域（$a>0$）。

解　由$0\leqslant x+a\leqslant 1$　同时$0\leqslant x-a\leqslant 1$

得　$a\leqslant x\leqslant 1-a$，　故若$a\leqslant\dfrac{1}{2}$，定义域为$[a,\ 1-a]$；

若　$a>\dfrac{1}{2}$，定义域是空集。

例2　若$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，已知当$y=1$时，$z=x$，试求$f(x)$的分析表达式及$z$的分析表达式。

解 以 $y=1$ 时 $z=x$ 代入得 $x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$，令 $\sqrt[3]{x}-1=t$，则 $x=(t+1)^3$，得 $f(t)=(t+1)^3-1$，从而 $f(x)=(x+1)^3-1$，于是 $z=\sqrt{y}+(\sqrt[3]{x}-1+1)^3-1$，

即 $z=\sqrt{y}+x-1$

例 3 已知$f(x)$是一次函数，且$f\{f[f(f(x))]\}=16x-5$，求$f(x)$的分析表达式。

解 设$f(x)=Ax+B$，则

$16x-15=A\{A[A(Ax+B)+B]+B\}+B$，比较系数得

$A=2$，$B=-1$或$A=-2$，$B=3$

故 $f(x)=2x-1$ 或 $f(x)=-2x+3$

2.把初等函数"拆"成基本初等函数

初等函数乃是由五类基本初等函数经有限次四则运算，有限次基本初等函数复合组成的函数之统称。如何把一个初等函数用基本初等函数的组合形式表示出来呢？

例 1 把$y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$拆成基本初等函数

解 设$u=a^2-x^2$，$v=\dfrac{x}{a}$，则

$y=\dfrac{1}{2}x\cdot u^{\frac{1}{2}}+\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}v$，$y$用基本初等函数 x，$u^{\frac{1}{2}}$ $\sin^{-1}v$和常数的四则运算表示出来了。

例 2 设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n\text{重}}(x)]\}$

解 记 $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

归纳假设 $f_k(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{k\text{重}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\quad(k\geqslant1)$，

则 $f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$，

故对一切自然数n有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ 。

3.复合函数和函数的分段表示

初等函数能拆成基本初等函数，这就使较复杂的函数变得容易处理，由此也看出掌握复合函数概念的重要性。有些函数虽不是初等函数，但它可能用初等函数分段表示出来，注意分段函数是一个函数而不是几个函数。

例1 若$f(x)=\mathrm{sgn}x$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，求$f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$，$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$。

解 $f[f(x)]=\mathrm{sgn}[\mathrm{sgn}x]=\mathrm{sgn}\left(\begin{cases}1 & \text{当}x>0\\ -1 & \text{当}x<0\\ 0 & \text{当}x=0\end{cases}\right)$

$$=\begin{cases}1 & \text{当}x>0\\ -1 & \text{当}x<0\\ 0 & \text{当}x=0\end{cases}=\mathrm{sgn}x$$

$$\varphi[\varphi(x)]=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=x\qquad(x\neq0)$$

$$f[\varphi(x)]=sgn\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}1 & 当x>0\\-1 & 当x<0\end{cases}\quad(x\neq0)$$

$$\varphi[f(x)]=\frac{1}{\mathrm{sgn}x}\quad(x\neq0)$$

$$=\begin{cases}1 & 当x>0\\-1 & 当x<0\end{cases}$$

例2 在区间〔0，2〕上有3克重的物质均匀分布着，此外又有1克重的物质集中在$x=3$处，设x在$(-\infty,+\infty)$内变化，试将区间$(-\infty,x)$一段的质量M表示为x的函数。

解 设M代表开区间$(-\infty,x)$上分布的质量，而质量仅在〔0，2〕上均匀分布着3克，在$x=3$处集中着1克，可见x经过0，2，3三点时，质量分布的规律有变化，因此M对x的函数应分段表示，分点在$x=0$，2，3，故设$M=f(x)$，则

$$f(x)=\begin{cases}0 & 当-\infty<x\leqslant0\\ \frac{3}{2}x & 当\ 0<x\leqslant2\\ 3 & 当\ 2<x\leqslant3\\ 4 & 当\ x>3\end{cases}$$

4.函数的图象

在直角坐标系里，函数$y=f(x)$的图象有什么特点？什么样的曲线段必是某函数的图象？

例1 已知函数$y=f(x)$的图象，作下列各函数的图象。(1)$y=-f(x)$，(2)$y=f(-x)$，(3)$y=-f(-x)$。

解 (1) $y=-f(x)$与$y=f(x)$在同一x处函数值正好

异号，可见只要把$y=f(x)$的图象关于x轴对称画出，就是$y=-f(x)$的图象；

（2） $y=f(-x)$在点x的函数值与$y=f(x)$在$-x$点的函数值相同，可见把$y=f(x)$的图象关于y轴对称画出，就是$y=f(-x)$的图象，能一般的讲$f(-x)$，函数$f(x)$的定义域必是关于原点对称的。

（3） $y=-f(-x)$的图象可看作（1），（2）两步的迭加，即把$y=f(x)$的图象先关于y轴对称画出，得$y=f(-x)$的图象，再把$y=f(-x)$的图象关于x轴对称画出，就得到$y=-f(-x)$的图象。

问题1 利用$y=e^x$的图象如何画出$y=e^{-x}$的图象？利用$y=e^x$、$y=e^{-x}$的图象如何画出双曲正弦 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$、双曲余弦 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$的图象？再设法画出双曲正切 $y=thx=\dfrac{shx}{chx}$的图象。

问题2 $y=f(x)$的图象具有什么特点时，就能保证其反函数$x=f^{-1}(y)$存在？在直角坐标系oxy中，函数$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图象是否是同一图象？$y=f(x)$的图象与$y=f^{-1}(x)$的图象有什么关系？

问题3 反双曲函数$y=\mathrm{sh}^{-1}x$，$y=\mathrm{ch}^{-1}x$，$y=\mathrm{th}^{-1}x$是怎样形式的函数？试画出它们的图象。

练 习 题

1．指出下列函数的定义域和值域

(1)x的符号函数：$sgn x=\begin{cases}1 & 当\ x>0\\ -1 & 当\ x<0\\ 0 & 当\ x=0\end{cases}$；

(2)取整函数$[x]$，符号$[x]$表示不超过x的最大整数；

(3)迪锐赫莱函数：$D(x)=\begin{cases}1 & 当\ x为有理数\\ 0 & 当\ x为无理数\end{cases}$

2. 设$f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求$f(x)$的定义域和$f[f(-7)]$。

$([-7, 2)\cup(2, 3)$； $\dfrac{1}{lg2}+\sqrt{48})$

3. 设$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq1)$，验证$f\{f(f[f(x)])\}=x$。

4. 证明定义在对称区间$(-l, l)$上的函数$f(x)$，一定可以表成奇函数和偶函数的和。

5. 若$f(x)$在$[a, b]$上单调增加，$g(u)$在$[f(a), f(b)]$上单调增加，试证复合函数$g[f(x)]$在$[a, b]$上单调增加。

6. 画出$y=x\sin\dfrac{1}{x}$的草图。

7. 验证$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$，$\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=\mathrm{ch}2x$，$1-\mathrm{th}^2x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$.

8. 已知$y=f(x)$的图象，求(1) $y=\dfrac{1}{2}\{|f(x)|+f(x)\}$，

(2) $y=\dfrac{1}{2}\{|f(x)|-f(x)\}$ 的图象。

9. 设$f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x)$

10.一物体受压缩弹簧的推力而运动，若这弹簧一端固定于原点，原长$2l$，压缩后长度为l，弹性系数为k，试将物体所受之力表为距离之函数　（$F=k(2l-x)$，$l\leqslant x\leqslant 2l$）

指出下列各题证明中的错误

1.证明$|Z|\leqslant a$与$-a\leqslant Z\leqslant a$等价

证　当$Z\geqslant 0$，则$|Z|=Z\leqslant a$，$-a\leqslant Z\leqslant a$ 成立；
当$Z\leqslant 0$，则$|Z|=-Z\leqslant a$，得$Z\geqslant -a$，$-a\leqslant Z\leqslant a$也成立，
故$|Z|\leqslant a$与$-a\leqslant z\leqslant a$ 等价。

*2.证明 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\ldots x_n}$，（$x_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$）等号仅当$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$时成立。

证　用数学归纳法，$n=2$时，由$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0$，

得$x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{x_1x_2}$，即$\dfrac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$，等号仅当$x_1=x_2$时成立；设$n\leqslant k$时，$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_k}$，$(k\geqslant 1)$等号仅当$x_1=x_2=\cdots=x_k$时成立。

现证$n=k+1$时结论为真，分两种情况：

情况1　$k+1$为偶数，设$k+1=2m$

则$$\sqrt[2m]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_{2m}}=\sqrt{\sqrt[m]{x_1\cdot x_2\cdots x_m}\cdot\sqrt[m]{x_{m+1}\cdots x_{2m}}}$$

$$\leqslant\frac{\sqrt[m]{x_1\cdots x_m}+\sqrt[m]{x_{m+1}\cdots x_{2m}}}{2}\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}+\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right]$$

$=\dfrac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{2m}}{2m}$ 且等号仅当$x_1=x_2=\cdots=x_{2m}$时成立，故

结论对n为偶数时均成立；

情况2 $k+1$为奇数，设$k+1=2m-1$，

则$\sqrt[2m-1]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_{2m-1}}=\sqrt[4m-2]{x_1{}^2\cdot x_2{}^2\cdots\cdots x^2{}_{2m-1}}$

$$\leqslant\frac{2x_1+2x_2+\cdots+2x_{2m-1}}{4m-2}\text{（根据情况1）}$$

$$=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{2m-1}}{2m-1}$$

且等号仅当$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_{2m-1}$时成立，

综合两种情况，由数学归纳法知对一切自然数n，均有

$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$且等号仅当诸$x_i$都相等时成立。

（二）极限概念

1.极限定义的理解

极限理论是数学分析这门学科的理论基础，说在某个极限过程中，变量X以A为极限，是指当过程进行得充分晚之后，变量X的值和数A可以任意接近。即对任意给定的正数ε，总存在一个时刻，使得在此时刻之后，不等式$|X-A|<\varepsilon$恒成立。就以数列为例，比如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，是指对任给的

$\varepsilon > 0$，总存在N（比如$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$），当$n>N$时，不等式$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$总是成立的。

描述极限过程有一个基本变量，比如数列的极限，基本变量是n。数列的极限就是讨论n按1，2，3，4，…… 这样的次序取值的前提下，某数列x_n能否向某个数无限趋近的问题，其它极限过程也是一样，比如$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$，极限过程$x\to 2$，并不是说$x$以2为极限，而是人为地规定了基本变量$x$取值的先后次序，$|x-2|$愈小表示过程进行得愈晚，这样一来，变量$x^2$就处在无限地运动之中，它无限地向4趋向，说$x^2$的极限为4，极限过程是人们处理问题的一种方法，极限过程$x\to 2$，规定过程要无限地进行下去，就没有终结的"时刻"，因此必须$|x-2|>0$。

考察极限的定义$\lim X=A$："$\forall\varepsilon>0$，总$\exists$时刻，使得在此时刻之后，$|X-A|<\varepsilon$恒成立"。

"$\forall\varepsilon>0$"是个前提，表示ε已经取定了，尽管它可以任意给，但在论证中ε已指一个正的常数；对此ε，要求"$\exists$时刻"，这个时刻是否存在，在论证极限时要论证的人找出这个时刻，或用某种推理肯定有这样一个时刻，这个时刻是有条件的，就是要在此时刻"之后"，不等式$|X-A|<\varepsilon$恒能成立。可见，在论证极限为某值时，对给定的ε，设法找出满足要求的"时刻"就成了关键。为了数学推导的方便，对于不同的极限过程，所谓"时刻"、"之后"应该用数值或数学式子表示出来。

问题1 用《$\varepsilon-N$》，《$\varepsilon-\delta$》，《$\varepsilon-G$》等述语给出下面七种极限的定义：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 。

问题2 极限定义中存在"时刻"，说如果存在一个满足要求的时刻，必存在无穷多个满足要求的时刻，这话对不对？为什么？

例1 试证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=A$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=A$

必要性：由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|x_n-A|<\varepsilon$恒成立，现在考察 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$，

记 $m=2n-1$，m看作基本变量，极限过程指m按1，3，5，……这样的次序取值，对上面给定的$\varepsilon>0$，存在$2N-1$这个时刻，当$m>2N-1$时（从而$n>N$），$|x_m-A|<\varepsilon$，即$|x_{2n-1}-A|<\varepsilon$恒成立，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=A$；

同样道理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=A$ 。

充分性：由 $\lim\limits_{n\to\infty} X_{2n-1}=A$知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，当$n>N_1$时，$|x_{2n-1}-A|<\varepsilon$恒成立；

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=A$ 知，对前面给定的ε，$\exists N_2$，当$n>N_2$时，$|x_{2n}-A|<\varepsilon$恒成立。

取$N=\max\{N_1, N_2\}$，当$n>2N$时（从而 $n>2N_1-1$，$n>2N_2$），$|x_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$。

由例1可见若某数列x_n的子列x_{2n-1}或x_{2n}有一个没有极限，或这两个子列虽都有极限，但极限不相等，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$必不存在，如 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ 不存在。

例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$

证 对$a\geqslant 1$，记$\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n$，则$\alpha_n\geqslant 0$，

但 $a=(1+\alpha_n)^n>n\alpha_n$，所以$|\sqrt[n]{a}-1|=\alpha_n<\dfrac{a}{n}$，

$\forall\varepsilon>0$，取$N\geqslant\dfrac{a}{\varepsilon}$，则当$n>N$时，$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$恒成立，故对$a\geqslant 1$时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；

对$a<1$，记$\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{1+\alpha_n}$，则$\alpha_n>0$，