电 动 力 学

下 册

东北师范大学函授教育处

东北师范大学物理函授教材

电　动　力　学

下　　册

东北师范大学函授教育处

1982. 10. 长春

目　　录

（下　册）

第四章 电磁波的辐射

在第三章中讨论了自由空间中电磁波的主要性质，并没有涉及到这样的电磁波是如何产生的。在这一章中我们来讨论交变的电流或电荷分布激发电磁场的规律。

首先我们讨论研究迅变电磁场和电流电荷分布关系的一般方法。类似讨论静电场引入电势和稳恒电流磁场引入矢势，对迅变电磁场也引入标势φ和矢势$\mathbf{A}$代替$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$来描述电磁场，解出势的方程，得到变化场源及其激发的电磁场之间普遍适用的推迟势。然后将推迟势用于分布在有限区域内场源所激发的辐射问题，主要讨论了非常有用的电偶极辐射，半波天线的辐射。在第七节把推迟势用于运动区域不受限制的带电粒子的电磁场，得到李纳—维谢尔势，用它主要讨论了匀速运动带电粒子的电磁场。在最后一节讨论了辐射场的反作用，全面讨论了电磁场和电荷的相互联系的另一个方面，这一部分内容是经典电动力学所不能彻底解决的。除上述内容之外，在第8节中我们讨论了电磁场的动量及包含电磁场的体系的动量守恒定律。

本章的内容在普通物理中是没有接触过的，有其特有的处理问题方法及运算技巧，很多概念也是新的，学习过程应抓住要领，不要被繁琐的运算弄昏了头脑。

§4.1 电磁场的矢势和标势

在第二章中我们在研究静电场和稳恒电流的磁场时曾引入了电场的标势 φ 和磁场的矢势 $\mathbf{A}$，这对求解电场和磁场问题提供了便利，使问题易于解决。现在我们来研究迅速变化的电磁场，也可以对电磁场引入标势 φ 和矢势 $\mathbf{A}$，用它们来描述电磁场也是比较方便的。在这一节我们讨论如何对迅变场引入标势和矢势，并且讨论势的一般性质。

1. 矢势和标势　势的方程

为了简化讨论，突出主要之点，我们讨论真空中的电磁场。第三章中已讨论过脱离场源 ρ，$\mathbf{J}$ 而独立存在的电磁场——电磁波的主要特点，现在我们来讨论电磁场和场源——电荷和电流相互联系相互制约的普遍情况。这时的电磁场由麦克斯韦方程组描述：

$$(\text{V})\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(\text{VI})\quad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J},$$

$$(\text{VII})\quad \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho,$$

$$(\text{VIII})\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0.$$

我们讨论真空中的场及源，式中 $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$，$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$.

首先我们引入描述电磁场的矢势 $\mathbf{A}$。同第三章引入稳恒磁场的矢势相同，考虑(VIII)式

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0.$$

因为任何矢量$\mathbf{A}$的旋度的散度恒为零

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0,$$

因而若令$\mathbf{B}$是某一个矢量的旋度

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}, \tag{4.1.1}$$

则(Ⅷ)式总是能满足的，也就是说，由于(Ⅷ)式，使我们可以把$\mathbf{B}$写成(4.1.1)的形式。由(4.1.1)式所定义的$\mathbf{A}$就是电磁场的矢势。当我们用矢势$\mathbf{A}$代替$\mathbf{B}$来描述电磁场时，(Ⅷ)式自然是满足的，因而就不必再考虑它了。由于(4.1.1)式定义的$\mathbf{A}$同第二章中$\mathbf{A}$的定义相同，它们的物理意义也是相同的。

下面我们再引入描述电磁场的标势φ。由于现在$\nabla\times\mathbf{E}\neq 0$，显然不能如第二章研究静电场那样引入标势了。但是我们注意，在引入矢势之后，(Ⅴ)式可以写为

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

移项后得

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0.$$

如果我们把括号内的两项看做一个整体，它的旋度为零。于是根据在静电场中引入标势相同的理由，任何标量φ的梯度的旋度恒为零

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=0,$$

我们可以令

$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi.$$

也就是令

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad (4.1.2)$$

则(Ⅴ)式恒能满足。也就是说，根据(Ⅴ)式和(4.1.1)$\mathbf{A}$的定义，使我们可以把$\mathbf{E}$写成(4.1.2)的形式。由(4.1.2)式所定义的φ就称为电磁场的标势。当我们同时用矢势$\mathbf{A}$和标势φ代替$\mathbf{B}$和$\mathbf{E}$来描述电磁场时，就不必再考虑(Ⅴ)式了，它是自然成立的。

从定义(4.1.2)式可以看到，$\mathbf{E}$不仅与标势φ的梯度有关，还与$-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$有关。在第二章中引入的电场的电势$\varphi$具有单位正电荷在电场中势能的意义，这是因为静电场

$$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0,$$

从而

$$-\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\varphi(P_2)-\varphi(P_1)\ .$$

根据§1—8的讨论我们知道，在电磁场中移动电荷只有电场力做功，在迅变场情况，电场力做的功，不仅由φ的差决定，还与

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{l} \qquad (4.1.3)$$

有关。而上式，由于

$$\oint_L\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{l}=\frac{d}{dt}\oint_L\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\frac{d}{dt}\ (\Phi),$$

Φ为L回路所围成的曲面的磁感应通量，在变化场时上式一般地不为零，因而(4.1.3)式与积分路径有关，不是点P_1.P_2的函数。这样一来在迅变场情况下，在电磁场中移动单位正

电荷电磁力所做的功

$$\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

不再由P_1、P_2两点决定，而是与路径有关的，因而电磁力不是保守力场，不存在势能概念，标势φ也就失去了单位正电荷在电磁场中的势能的意义。

当电磁场是稳恒的时，

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=0,$$

（4.1.2）式定义的φ与$\mathbf{E}$的关系就同静电场（或稳恒电流场）时相同，那时的φ与$\mathbf{E}$的关系是（4.1.2）式的特殊情况。

在研究迅变场时，(4.1.1）和(4.1.2）所定义的φ和$\mathbf{A}$是做为一个整体来代替$\mathbf{B}$和$\mathbf{E}$描述电磁场的。在第三章讨论过迅变场的电场和磁场是彼此紧密联系相互制约的，知道了其中一个就可以了解另一个，这时的φ和$\mathbf{A}$彼此也是紧密联系相互制约的，这在下面马上就要讨论。在第五章研究相对论协变形式的电磁场规律时，我们将进一步看到，φ和$\mathbf{A}$实质构成一个统一的四维势。

上面已经说过，按(4.1.1)及(4.1.2)引入$\mathbf{A}$和φ来描述电磁场时，麦克斯韦方程组中(Ⅴ)和(Ⅴ Ⅲ)两式自然成立，不必再考虑它们了，这就是说，用$\mathbf{A}$和φ描述电磁场时，仅需考虑场方程(Ⅴ Ⅰ)和(Ⅴ Ⅱ)两式，因而就减少了场的微分方程的个数，有可能求解$\mathbf{A}$和φ要比直接求$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$要容易一些。求出$\mathbf{A}$和φ之后，再求$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$只不过是求导数问题，显然是容易的。

利用真空中**H**和**B**的关系及（4.1.1），有

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{A}.$$

再用**D**和**E**的关系及(4.1.2)，有

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}=\varepsilon_0\nabla\varphi-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

将它们代入场方程(Ⅴ Ⅰ)中，得

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mu_0\mathbf{J}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

注意到矢量分析中，

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A},$$

得到**A**和φ满足的一个场方程

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\mathbf{J}.\quad(4.1.4)$$

将**D**和**H**代入到场方程(Ⅶ)中，得

$$-\varepsilon_0\nabla\cdot\nabla\varphi-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})=\rho,$$

即

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.\quad(4.1.5)$$

(4.1.4)及（4.1.5)就是用矢势**A**和标势φ描述电磁场时的场方程。式中

$$c^2=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0},$$

就是真空中电磁波传播的速度。

当用**A**和φ描述场时，场方程的个数虽然减少了，但从

(4.1.4)，(4.1.5) 看出，方程的阶数增加了，它们都是二阶的偏微分方程。下面我们进一步研究$\mathbf{A}$和φ的性质，利用这些性质简化场方程为便于求解的形式。

在经典电动力学中可以测量的物理量是$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$（及相应的$\mathbf{D}$和$\mathbf{H}$），引入的矢势和标势没有直接的物理意义，引入它们简化场方程便于求解，最后还是要通过它们求出$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$。但是在量子理论中势是更重要的量，在量子电动力学中甚至把$\mathbf{A}$和φ做为基本量来研究电磁场的量子化及电磁场同带电粒子的相互作用。费曼在其《费曼物理学讲义》第二卷（中译本，上海科学技术出版社）§15—5中对势在量子力学中应用的有趣味的说明，读者可参阅。

2. 规范变换　规范不变性

一定的电磁场，空间每一点的$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$都是唯一的，但用来代替$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$描述电磁场的$\mathbf{A}$和φ却有一定的任意性。矢量分析理论指出，要想确定一个矢量场必须同时给出该矢量的旋度和散度（以及必须的边界条件），定义(4.1.1)式只给出了$\mathbf{A}$的旋度，因而，对应同一个电磁场，$\mathbf{A}$的选取还有一定的自由。这一点在第二章讨论稳恒电流磁场的矢势时已经讨论过了。

同第二章的讨论一样，由于任意一个标量场ψ的梯度的旋度恒为零

$$\nabla\times(\nabla\psi)=0$$

当把$\nabla\psi$加到某一确定的电磁场$\mathbf{B}$的矢势$\mathbf{A}$上时

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi, \tag{4.1.6}$$

得到的矢量$\mathbf{A}'$的旋度为：

$$\nabla\times\mathbf{A}'=\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times(\nabla\psi)=\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B},$$

依然是这个电磁场的**B**，根据(4.1.1)的规定，**A**′也可以做为同一个电磁场的矢势。

由(4.1.2)看出，电场强度**E**不仅同标势φ有关，还同矢势**A**有关，因而当对**A**做(4.1.6)的变换时，必须同时对φ做适当的变换

$$\varphi\longrightarrow\varphi',$$

使得由**A**′和φ'给出的

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}$$

仍是原来电磁场的**E**。由(4.1.6)式

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}'+\nabla\psi,$$

代入(4.1.2)式中，

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi$$

$$=-\nabla\left(\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}.$$

可见，如果令φ的相应的变换为

$$\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t},\tag{4.1.7}$$

则由**A**′和φ'求得的

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}$$

与由**A**和φ求得的是相同的。

对**A**和φ同时施行的变换

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \triangle\psi. & (4.1.6) \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\psi}{\partial t} & (4.1.7) \end{cases}$$

称为势的规范变换。式中ψ是空间坐标$\mathbf{x}$和时间的可微函数。满足规范变换的每一组$\mathbf{A}$和φ都是描述同一个电磁场$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$的。

当对势做规范变换(4.1.6)、(4.1.7)时，势所满足的场方程(4.1.4) 左端将变为

$$\nabla^2(\mathbf{A}'-\nabla\psi)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{A}'-\nabla\psi)$$

$$-\nabla\Big[\nabla\cdot(\mathbf{A}'-\nabla\psi)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi'+\frac{\partial\psi}{\partial t})\Big]$$

$$=\nabla^2\mathbf{A}'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'}{\partial t^2}\quad-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t})$$

$$-\nabla^2(\nabla\psi)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(\nabla\psi)}{\partial t^2}+\nabla[\nabla\cdot(\nabla\psi)]-$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(\nabla\psi)}{\partial t^2}.$$

由于$\nabla\times(\nabla\psi)\equiv 0$.所以

$$\nabla[\nabla\cdot(\nabla\psi)]=\nabla\times[\nabla\times(\nabla\psi)]+\nabla^2(\nabla\psi)=\nabla^2(\nabla\psi).$$

因而上式后四项之和为零，将前三项与(4.1.4) 式右端连接起来，即得

$$\nabla^2\mathbf{A}'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t})=-\mu_0\mathbf{J}.$$

可见，当对势作规模变换之后，新得到的$\mathbf{A}'$和φ'所满足的方程从形式上看同变换之前的势$\mathbf{A}$和φ的方程一样，因此我

们可以说，方程(4.1.4)对于势的规范变换(4.1.6)，(4.1.7)来说是不变的，也就是说规范变换不会改变势**A**和φ之间及它们同电流之间相互联系的规律。对(4.1.5)做类似的讨论也得到同样的结论。势的方程(4.1.4)和(4.1.5)的这种性质叫做势方程的规范不变性。

经典电动力学中可以测得的物理量是**E**和**B**(或**D**和**H**)，对一定的电磁场它们在空间每一点都是唯一确定的。但是对应同一电磁场的势**A**和φ却有一定任意性，可以对它们做规范变换，因此，当用势来描述电磁场时不仅(4.1.4)，(4.1.5)两个方程应当具有规范不变性，所有的物理量和物理规律都应该具有规范不变性。这是近代物理中的一条重要的物理原则。

3.达朗伯方程　洛仑兹规范

描述同一电磁场的**A**和φ可以做规范变换，使我们可以选择具有合适性质的**A**和φ来描述电磁场，简化场方程，并使讨论的问题具有明显的物理意义。

在讨论规范变换之前我们曾经说过，定义(4.1.1)并不能唯一确定**A**，因此还可以对**A**再附加上限制条件。我们从简化势方程的角度来考虑应附加什么样的条件合适。从势方程(4.1.4)看出，若把

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=O, \qquad (4.1.8)$$

做为对**A**和φ的附加限制条件，则方程(4.1.4)将变为：

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}. \qquad (4.1.9)$$

把(4.1.8)代入(4.1.5)，(4.1.5)将变为：

$$\nabla^2 \varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{4.1.10}$$

方程(4.1.9)及(4.1.10)称做关于**A**和φ的达朗伯方程。附加条件(4.1.8)称为势的洛仑兹条件，称满足洛仑兹条件的**A**和φ为洛仑兹规范的。

洛仑兹规范的势**A**和φ满足的方程具有十分对称的形式，方程都是达朗伯方程，每个方程只含有**A**或φ一个量，这就使我们不必去解**A**和φ的联立方程组(4.1.4)，(4.1.5)了，可以分别解**A**和φ的达朗伯方程。从这两个方程的右端看，分别与电流**J**和电荷ρ有关，其物理意义很明显，矢势的波动的源可看做是电流**J**，而标势φ的源可看做是电荷ρ。

(4.1.9)及(4.1.10)所表示的势的方程必须同洛仑兹条件一起才是电磁场的运动规律，才与麦克斯韦方程组等价，单只满足(4.1.9)及(4.1.10)的**A**和φ不一定就是客观存在的电磁场的势，只有**A**和φ同时满足洛仑兹条件，那才是客观能存在的电磁场的势。因此，在解(4.1.9)及(4.1.10)的边值问题时，还必须用洛仑兹条件定解。洛仑兹条件实质上把**A**和φ联系了起来，虽然**A**可仅由**J**解出，φ可仅由ρ解出，但**A**和φ彼此不是独立的。

附加条件也可以选取别种形式，譬如可以如第二章中研究稳恒电流磁场矢势时选取的

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=O,$$

满足这种附加条件的势称为库仑规范的。这时也可以简化场方程。但洛仑兹规范同库仑规范相比，有一个更优越之

处，它是相对论协变的，关于这点，将在第五章再加以说明。

既然洛仑兹规范这么有用，当已知的电磁场的势$\mathbf{A}$和φ不满足洛仑兹规范时，我们可以找出适当函数ψ，对已知的势做规范变换而得到满足洛仑兹条件的$\mathbf{A}$和φ。设$\mathbf{A}$和φ是满足(4.1.4)，(4.1.5)的电磁场的势，但不满足洛仑兹条件(4.1.8)，而是。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\Lambda. \qquad (4.1.11)$$

我们对$\mathbf{A}$和φ做规范变换

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi.$$

$$\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

要求$\mathbf{A}'$和φ'满足洛仑兹条件，

$$\nabla\cdot\mathbf{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\nabla\psi+$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=O.$$

由(4.1.11)式，并注意到$\nabla\cdot\nabla\psi=\nabla^2\psi$，得$\psi$所满足的微分方程

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\Lambda, \qquad (4.1.12)$$

用它的任意一个解ψ，对$\mathbf{A}$，φ做规范变换得到的$\mathbf{A}'$、φ'一定是满足洛仑兹条件的。因此，对于电磁场的势，总是可以利用规范变换找到满足洛仑兹条件的。

4. 平面电磁波的势

在第三章中我们直接从 **E**、**B** 的场方程，即麦克斯韦方程组出发解出真空中平面电磁波的**E**和**B**。在引入势**A**、φ描述电磁场后，也可以用它来研究真空中的平面电磁波。我们讨论没有电流、电荷存在的区域里的电磁场，即自由空间的电磁场，势的方程(4.1.9)、(4.1.10) 此时变为

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=O. \qquad (4.1.13)$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=O. \qquad (4.1.14)$$

同时**A**和φ之间须满足洛仑兹条件

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=O. \qquad (4.1.15)$$

(4.1.13)、(4.1.14)都是齐次波动方程，其解的形式在第三章中已讨论过了，其平面波定态解的形式为

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad (4.1.16)$$

$$\varphi=\varphi_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \qquad (4.1.17)$$

式中

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{\omega}{c}, \qquad (4.1.18)$$

ω为定态的圆频率。矢势**A**的方向由$\mathbf{A}_0$的方向决定。将(4.1.16)及(4.1.17)代入(4.1.1)及(4.1.2)可以求出电磁场的**B**和**E**，当取坐标系的Z轴沿电磁波的传播方向**k**时，

$$k_x=k_y=O, \qquad k_z=k,$$