



普通高等教育“十一五”国家级规划教材 计算机系列教材

离散数学习题解答

(第2版)

邓辉文 编著



清华大学出版社

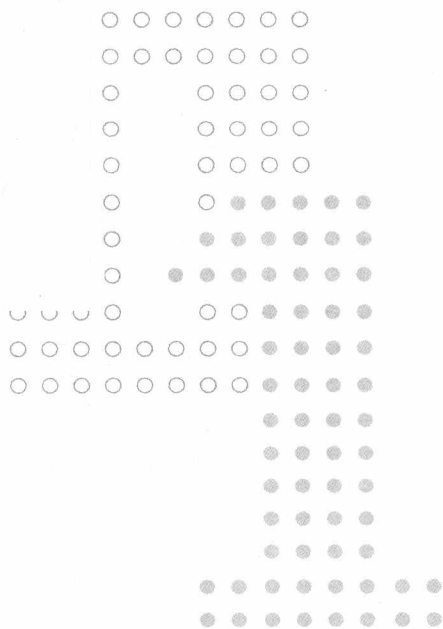


普通高等教育“十一五”国家级规划教材 计算机系列教材

邓辉文 编著

离散数学习题解答

(第2版)



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

清华大学出版社出版的《离散数学(第2版)》(ISBN 978-7-302-21193-8)是一本介绍离散数学经典内容的教材,全书共分8章,分别介绍集合、映射与运算,关系,命题逻辑,谓词逻辑,代数结构,图论,几类特殊的图及组合计数.每节后面都有精选习题,本书是其教学辅导用书,对教材中的每个题目都给出了详尽的解答.

本书适合于选用清华大学出版社出版的《离散数学(第2版)》的广大师生作为辅导用书,也可供计算机专业考研学生、程序员及相关专业技术人员参考.目前,已经完成10套考试用套题.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解答/邓辉文编著. —2版. —北京:清华大学出版社,2010.3

(计算机系列教材)

ISBN 978-7-302-21229-4

I. 离… II. 邓… III. 离散数学—高等学校—解题 IV. O158-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第174313号

责任编辑:汪汉友

责任校对:李建庄

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×260

印 张:11

字 数:268千字

版 次:2010年3月第2版

印 次:2010年3月第1次印刷

印 数:1~4000

定 价:19.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。
联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:035296-01

前 言

离散数学是计算机及相关专业的核心课程,是教育部 2008 年“高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案”研究中 8 门核心课程之一,在专业教学体系中起着重要的基础理论支撑作用,学好离散数学对于与计算机有关的其他专业课程的学习起着事半功倍的作用.

根据 IEEE-CS/ACM Computing Curricula 2005 和 2009 年 8 月在青岛召开的“全国高等学校离散数学暑期师资培训与教学研讨会”的会议精神,在原书的基础上将初等数论知识融入在第 1 章和第 2 章,加强了内容的历史发展和进一步待思考问题的概要说明,并做了如下改动.

(1) 在第 1 章中加入了数论的基本内容,如素数、素因数分解、模运算、最大公因数、最小公倍数和 Euler 函数等.同时还给出了常见的证明方法:直接法、举反例法、数学归纳法和反证法等.

(2) 在第 2 章中,将整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的整除、模同余关系作为 $\mathbf{Z}$ 上的关系,很自然地引入,同时还介绍了线性同余方程或线性同余方程组.

(3) 由于教学时数和多数学校的教学现状,精简了代数结构内容.

(4) 由于组合计数在算法分析和设计中的重要性,组合计数是离散数学课程实施方案中的核心知识单元,属于必学内容,因此新增加“组合计数”一章.

学好离散数学,一方面要深刻理解其有关概念,掌握重要结论,另一方面要多做练习,以加深对离散数学内容的学习,这对于在计算机其他专业课程的学习中熟练应用有关离散数学内容是至关重要的.

虽然作者编写的《离散数学(第 2 版)》教材附录中有习题参考答案,但答案过于简单,使用过程中多有不便.本书在教材的基础上,对其中的每个题目都进行了详尽的解答,希望能便于大家做完练习后参考,能起到举一反三、加深对课本内容的学习和理解的作用,也为自学者提供方便.书末附有两套自测题及其参考答案.

本书适合于选用上述教材的所有师生,由于教材内容均是经典内容,也可供所有学习离散数学的学生、计算机程序员和计算机等级考试应试者作为参考用书.有些题目选自历年的硕士研究生入学考题,因此本书也可作为计算机专业考研学生和计算机工作者的参考书.

希望本书能成为广大读者的知心朋友.作者虽尽心努力,由于编者水平有限,书中的疏漏和不足之处,欢迎大家批评指正,特此致谢.

编 者

2009 年 10 月

第 1 版前言

离散数学是计算机及其相关专业的重要基础专业课,学好离散数学对于与计算机有关的其他专业课程的学习起着事半功倍的作用.

学好离散数学,一方面要深刻理解其有关概念,掌握重要结论,另一方面要多做练习,以加深对离散数学内容的学习,这对于在计算机其他专业课程的学习中熟练应用有关离散数学内容是至关重要的.

虽然作者编写的《离散数学》教材附录中有习题参考答案,但答案过于简单,使用过程中多有不便.本书在教材的基础上,对其中的每个题目都进行了详尽的解答,希望能便于大家做完练习后参考,能起到举一反三、加深对课本内容的学习和理解的作用,也为自学者提供方便.书末附有两套自测题及其参考答案.

本书适合于选用上述教材的所有师生,由于教材内容均是经典内容,也可供所有学习离散数学的学生、计算机程序员和计算机等级考试应试者作为参考用书.有些题目选自历年的硕士研究生入学考题,因此本书也可作为计算机专业考研学生和计算机工作者的参考书.

希望本书能成为广大读者的知心朋友.作者虽尽心努力,由于编者水平有限,书中的疏漏和不足之处,欢迎大家批评指正,特此致谢.

编 者

2006 年 8 月

目 录

第 1 章 集合、映射与运算	1
1.1 集合的有关概念	1
【习题 1.1】	1
1.2 映射的有关概念	3
【习题 1.2】	3
1.3 运算的定义及性质	6
【习题 1.3】	6
1.4 集合的运算	10
【习题 1.4】	10
1.5 集合的划分与覆盖	14
【习题 1.5】	14
1.6 集合对等	16
【习题 1.6】	16
第 2 章 关系	18
2.1 关系的概念	18
【习题 2.1】	18
2.2 关系的运算	23
【习题 2.2】	23
2.3 关系的性质	25
【习题 2.3】	25
2.4 关系的闭包	28
【习题 2.4】	28
2.5 等价关系	31
【习题 2.5】	31
2.6 相容关系	36
【习题 2.6】	36
2.7 偏序关系	38
【习题 2.7】	38
第 3 章 命题逻辑	43
3.1 命题的有关概念	43
【习题 3.1】	43

3.2	逻辑联结词	44
	【习题 3.2】	44
3.3	命题公式及其真值表	45
	【习题 3.3】	45
3.4	逻辑等值的命题公式	49
	【习题 3.4】	49
3.5	命题公式的范式	57
	【习题 3.5】	57
3.6	联结词集合的功能完备性	64
	【习题 3.6】	64
3.7	命题逻辑中的推理	66
	【习题 3.7】	66
第 4 章	谓词逻辑	72
4.1	个体、谓词、量词和函词	72
	【习题 4.1】	72
4.2	谓词公式及命题的符号化	73
	【习题 4.2】	73
4.3	谓词公式的解释及类型	76
	【习题 4.3】	76
4.4	逻辑等值的谓词公式	81
	【习题 4.4】	81
4.5	谓词公式的前束范式	83
	【习题 4.5】	83
4.6	谓词逻辑中的推理	85
	【习题 4.6】	85
第 5 章	代数结构	91
5.1	代数结构简介	91
	【习题 5.1】	91
5.2	群	93
	【习题 5.2】	93
5.3	环和域	97
	【习题 5.3】	97
5.4	格与布尔代数	102
	【习题 5.4】	102

第 6 章 图论	107
6.1 图的基本概念	107
【习题 6.1】	107
6.2 节点的度数	109
【习题 6.2】	109
6.3 子图、图的运算和图同构	111
【习题 6.3】	111
6.4 路与回路	113
【习题 6.4】	113
6.5 图的连通性	116
【习题 6.5】	116
6.6 图的矩阵表示	119
【习题 6.6】	119
6.7 赋权图及最短路径	122
【习题 6.7】	122
第 7 章 几类特殊的图	124
7.1 欧拉图	124
【习题 7.1】	124
7.2 哈密尔顿图	127
【习题 7.2】	127
7.3 无向树	130
【习题 7.3】	130
7.4 有向树	134
【习题 7.4】	134
7.5 平面图	139
【习题 7.5】	139
7.6 平面图的面着色	143
【习题 7.6】	143
7.7 二部图及其匹配	144
【习题 7.7】	144
第 8 章 组合计数	147
8.1 排列组合与二项式定理	147
【习题 8.1】	147
8.2 生成函数	148
【习题 8.2】	148

8.3 递归关系	149
【习题 8.3】	149
附录 A 自测题 1	154
附录 B 自测题 1 参考答案	156
附录 C 自测题 2	158
附录 D 自测题 2 参考答案	160

第 1 章 集合、映射与运算

1.1 集合的有关概念

【习题 1.1】

1. 用列举法表示下列集合:

(1) $\{x|x \in \mathbf{R}, x^2 - 5x + 6 = 0\}$;

(2) $\{2x|x \in \mathbf{N}\}$.

解 (1) $\{x|x \in \mathbf{R}, x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$.

(2) $\{2x|x \in \mathbf{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2x, \dots\}$.

2. 写出 35 的所有因数集合及 D_{35} .

解 35 的所有因数集合为 $\{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$, $D_{35} = \{1, 5, 7, 35\}$.

3. 比较集合 $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ 和 $\{\{\emptyset\}\}$ 的不同之处.

解 $\emptyset$ 是空集, 它里面没有元素; $\{\emptyset\}$ 是由空集 $\emptyset$ 组成的集合, 它里面有一个元素 $\emptyset$; $\{\{\emptyset\}\}$ 里面有一个元素为 $\{\emptyset\}$, 但 $\{\emptyset\}$ 与 $\emptyset$ 是不同的.

4. 判定下列断言是否成立, 说明理由:

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

(2) $\emptyset \in \emptyset$;

(3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$;

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

解 (1) 成立, 因为空集是任意集合的子集.

(2) 不成立, 因为空集中不含任意元素.

(3) 成立, 因为空集是任意集合的子集.

(4) 成立, 因为 $\{\emptyset\}$ 含有元素 $\emptyset$.

5. 设 A 和 B 是集合, 试举出使 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$ 同时成立的例子.

解 例如 $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, \{a, b\}, c\}$, 这时 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$ 同时成立.

6. 对于任意集合 A, B, C , 判定下列断言是否成立, 说明理由:

(1) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$, 则 $A \notin C$;

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$, 则 $A \subseteq C$;

(3) 若 $A \in B$ 且 $B \in C$, 则 $A \in C$;

(4) 若 $A \in B$ 且 $B \in C$, 则 $A \subseteq C$.

解 (1) 不成立. 例如, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{a, b, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, 这时有 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$, 而 $A \in C$.

(2) 不成立. 例如, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{b, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, 这时有 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$, 而 $A \subseteq C$ 不成立.

(3) 不成立. 例如, $A=\{a,b\}$, $B=\{\{a,b\},c\}$, $C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$, 这时有 $A\in B$ 且 $B\in C$, 而 $A\notin C$.

(4) 不成立. 例如, $A=\{a,b\}$, $B=\{\{a,b\},c\}$, $C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$, 这时有 $A\in B$ 且 $B\in C$, 而 $A\subseteq C$ 不成立.

7. 分别计算:

(1) $P(P(\emptyset))$;

(2) $P(\{a,b,c\})$;

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})$.

解 (1) 因为 $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$, 所以 $P(P(\emptyset))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

(2) $P(\{a,b,c\})=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})=\{\emptyset,\{\{a,b,c\}\}\}$.

8. 试用乘法原理证明主教材定理 1-4.

证 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 对于 S 的任意子集 A , S 中的元素 x_1 可以属于 A , 也可以不属于 A , 有 2 种选取方式; 同样, 在元素 x_1 定下来以后, 再考虑 S 中的元素 x_2 , 它可以属于 A , 也可以不属于 A , 有 2 种选取方式; $\cdots$ 一直下去, 对于 S 中的最后一个元素 x_n , 它可以属于 A , 也可以不属于 A , 有 2 种选取方式. 于是, 根据乘法原理知, S 的子集共有 $\overbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}^{n\uparrow}=2^n$ 个.

9. 证明主教材定理 1-5.

证 根据笛卡儿积的定义知, $A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$. 由于这样的有序对 (x,y) 的第一位置元素 $x\in A$ 有 m 种选取方式, 第二位置元素 $y\in B$ 有 n 种选取方式, 因此根据乘法原理, $A\times B$ 中的有序对共有 mn 个, 所以 $|A\times B|=mn$.

10. 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$, 试分别计算:

$$A\times A, A\times B, B\times A, A\times B\times A, (A\times B)\times A$$

解 计算结果分别为

$$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

$$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

$$A\times B\times A=\{(a,1,a),(a,1,b),(a,2,a),(a,2,b),(a,3,a),(a,3,b),\\(b,1,a),(b,1,b),(b,2,a),(b,2,b),(b,3,a),(b,3,b)\}$$

$$(A\times B)\times A=\{((a,1),a),((a,1),b),((a,2),a),((a,2),b),((a,3),a),((a,3),b),\\((b,1),a),((b,1),b),((b,2),a),((b,2),b),((b,3),a),((b,3),b)\}$$

11. 对于任意集合 A,B,C , 由 $A\times B=A\times C$ 能否得出 $B=C$, 为什么? 若 $A\neq\emptyset$ 呢?

解 若 $A=\emptyset$, 取 $B=\{a,b\}$, $C=\{c,d\}$, 根据笛卡儿积的定义知 $A\times B=\emptyset$ 且 $A\times C=\emptyset$, 这时 $A\times B=A\times C$, 但 $B\neq C$.

若 $A\neq\emptyset$, 则存在元素 $a\in A$, 这时由 $A\times B=A\times C$ 可以得出 $B=C$; 对于任意 $x\in B$, 因为 $(a,x)\in A\times B$, 所以 $(a,x)\in A\times C$, 根据笛卡儿积的定义知 $x\in C$, 即有 $B\subseteq C$. 同理可得 $C\subseteq B$. 故 $B=C$.

12. 设 $|S|=n$, 给出一种列出 S 的所有子集的方法.

解 设 $S=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 将 S 的所有子集 A 用长度为 n 的 0,1 字符串表示, 其中字符串的第 i 位取 1 的充要条件是 $x_i \in A$.

于是, 可以按从小到大的顺序列出所有长度为 n 的 0,1 字符串, 再写出对应的子集, 就可以将 S 的所有子集 A 列举出来.

注: 此方法可用计算机实现.

1.2 映射的有关概念

【习题 1.2】

1. 分别计算 $\lceil 1.5 \rceil, \lceil -1 \rceil, \lceil -1.5 \rceil, \lfloor 1.5 \rfloor, \lfloor -1 \rfloor, \lfloor -1.5 \rfloor$.

解 $\lceil 1.5 \rceil = 2, \lceil -1 \rceil = -1, \lceil -1.5 \rceil = -1, \lfloor 1.5 \rfloor = 1, \lfloor -1 \rfloor = -1, \lfloor -1.5 \rfloor = -2$.

2. 下列映射中, 哪些是双射? 说明理由.

(1) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = 3x$;

(2) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = |x| + 1$;

(3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 1$;

(4) $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$;

(5) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}, f(x) = (x, x+1)$.

解 (1) 对于任意对 $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $3x_1 = 3x_2$, 于是 $x_1 = x_2$, 所以 f 是单射. 由于对任意 $x \in \mathbf{Z}, f(x) \neq 2 \in \mathbf{Z}$, 因此 f 不是满射, 进而 f 不是双射.

(2) 由于 $2, -2 \in \mathbf{Z}$ 且 $f(2) = f(-2) = 3$, 因此 f 不是单射. 又由于 $0 \in \mathbf{N}$, 而任意 $x \in \mathbf{Z}$ 均有 $f(x) = |x| + 1 \neq 0$, 于是 f 不是满射. 显然, f 不是双射.

(3) 对于任意对 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$, 于是 $x_1 = x_2$, 所以 f 是单射. 对于任意 $y \in \mathbf{R}$, 取 $x = (y-1)^{1/3}$, 这时

$$f(x) = x^3 + 1 = [(y-1)^{1/3}]^3 + 1 = (y-1) + 1 = y$$

所以 f 是满射. 进而 f 是双射.

(4) 由于 $(1, 2), (2, 1) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 且 $(1, 2) \neq (2, 1)$, 而 $f(1, 2) = f(2, 1) = 4$, 因此 f 不是单射. 又由于 $0 \in \mathbf{N}$, 而任意 $(x_1, x_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 均有 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1 \neq 0$, 于是 f 不是满射. 显然, f 就不是双射.

(5) 由于 $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $(x_1, x_1+1) = (x_2, x_2+1)$, 于是 $x_1 = x_2$, 因此 f 是单射. 又由于 $(0, 0) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, 而任意 $x \in \mathbf{N}$ 均有 $f(x) = (x, x+1) \neq (0, 0)$, 于是 f 不是满射. 因为 f 不是满射, 所以 f 不是双射.

3. 对于有限集合 A 和 B , 假定 $f: A \rightarrow B$ 且 $|A| = |B|$, 证明: f 是单射的充要条件是 f 是满射. 对于无限集合, 上述结论成立吗? 举例说明.

证 ($\Rightarrow$) 因为 f 是单射, 所以 $|A| = |f(A)|$. 由于 $|A| = |B|$, 所以 $|f(A)| = |B|$. 又因为 B 有限且 $f(A) \subseteq B$, 故 $f(A) = B$, 即 f 是满射.

($\Leftarrow$) 若 f 是满射, 则 $f(A) = B$. 由于 $|A| = |B|$, 于是 $|A| = |f(A)|$. 又因为 A 和 B 是有限集合, 因此 f 是单射.

对于无限集合, 上述结论不成立. 例如 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = 2x$, f 是单射, 但 f 不是满射.

4. 设 $f:A \rightarrow B$, 试证明:

(1) $f \circ I_B = f$;

(2) $I_A \circ f = f$.

特别地, 若 $f:A \rightarrow A$, 则 $f \circ I_A = I_A \circ f = f$.

证 (1) 对于任意 $x \in A$, 由于 $f(x) \in B$, 所以 $(f \circ I_B)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$, 因此 $f \circ I_B = f$.

(2) 对于任意 $x \in A$, 由于 $I_A(x) = x$, 所以 $(I_A \circ f)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$, 于是有 $I_A \circ f = f$.

由(1)和(2)知, 若 $f:A \rightarrow A$, 则 $f \circ I_A = I_A \circ f = f$.

5. 试举出一个例子说明 $f \circ f = f$ 成立, 其中 $f:A \rightarrow A$ 且 $f \neq I_A$. 若 f 的逆映射存在, 满足条件的 f 还存在吗?

解 令 $A = \{a, b, c\}$, $f(a) = f(b) = f(c) = a$, 即对于任意 $x \in A$, $f(x) = a$, 显然 $f:A \rightarrow A$ 且 $f \neq I_A$. 而对于任意 $x \in A$, 有 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(a) = a$, 因此 $f \circ f = f$.

若 $f \circ f = f$ 且 f 的逆映射 f^{-1} 存在, 由第3题知 $f \circ f = f = f \circ I_A$, 所以 $f^{-1} \circ (f \circ f) = f^{-1} \circ (f \circ I_A)$, 于是利用主教材定理 1-12 有 $(f^{-1} \circ f) \circ f = (f^{-1} \circ f) \circ I_A$, 进而 $I_A \circ f = I_A \circ I_A$, 因此 $f = I_A$. 所以若 f 的逆映射存在, 满足条件的 f 不存在.

6. 设 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$. 若 f 和 g 是满射, 则 $f \circ g$ 是满射, 试证明.

证 因为 f 是满射, 所以 $f(A) = B$. 又因为 g 是满射, 所以 $g(B) = C$. 于是 $(f \circ g)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$, 因此 $f \circ g$ 是 A 到 C 的满射.

另证 对于任意 $z \in C$, 因为 g 是满射, 于是存在 $y \in B$ 使得 $g(y) = z$. 又因为 f 是满射, 存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$. 因此, $(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, 所以 $f \circ g$ 是 A 到 C 的满射.

7. 设 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$. 试证明: 若 $f \circ g$ 是单射, 则 f 是单射. 试举例说明, 这时 g 不一定是单射.

证 对于任意 $x_1, x_2 \in A$, 假定 $f(x_1) = f(x_2)$, 则显然 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 即 $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. 因为 $f \circ g$ 是单射, 所以 $x_1 = x_2$, 于是 f 是单射.

例如 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, 令 $f(a) = 1, f(b) = 2, g(1) = \alpha, g(2) = \beta, g(3) = \beta$, 则显然有 $(f \circ g)(a) = g(f(a)) = g(1) = \alpha, (f \circ g)(b) = g(f(b)) = g(2) = \beta$, 于是 $f \circ g$ 是 A 到 C 的单射, 但 g 显然不是单射.

8. 设 $f:A \rightarrow B$, 若存在 $g:B \rightarrow A$, 使得 $f \circ g = I_A$ 且 $g \circ f = I_B$, 试证明: f 是双射且 $f^{-1} = g$.

证 因为 $f \circ g = I_A$, 而 I_A 是单射, 所以 f 是单射. 又因为 $g \circ f = I_B$, 而 I_B 是满射, 所以 f 是满射. 因此 f 是双射.

由于 f 是双射, 所以 f^{-1} 存在. 因为 $f \circ g = I_A$, 于是 $f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ I_A$. 而 $(f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ I_A$ 且 $I_B \circ g = f^{-1}$, 所以有 $f^{-1} = g$.

9. 设 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$. 若 f 和 g 是双射, 则 $f \circ g$ 是双射且 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

证 根据主教材中定理 1-10(1)(2)知, $f \circ g$ 是双射. 下证 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. 因为

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I_B \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I_A,$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ I_B \circ g = g^{-1} \circ g = I_C,$$

在上面的推导中多次利用了主教材中定理 1-12. 由第 7 题知, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

10. 设 G 是集合 A 到 A 的所有双射组成的集合, 证明:

- (1) 任意 $f, g \in G$, 有 $f \circ g \in G$;
- (2) 对于任意 $f, g, h \in G$, 有 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
- (3) $I_A \in G$ 且对于任意 $f \in G$, 有 $I_A \circ f = f \circ I_A = f$;
- (4) 对于任意 $f \in G$, 有 $f^{-1} \in G$ 且 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$.

证 (1) 由主教材中定理 1-10.

(2) 由主教材中定理 1-12.

(3) 由第 3 题.

(4) 由主教材中定理 1-9.

11. 若 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, 问 A 到 B 的满射、单射、双射各有多少个? 试推广你的结论.

解 将 A 中的 3 个元素对应到 B 中的 2 个元素, 相当于将 3 个元素分成 2 部分, 共有 3 种分法; 在计算 A 到 B 的满射个数时还需要将 B 中元素进行排列, 共有 2 种排列方式, 于是 A 到 B 的满射共有 $3 \times 2 = 6$ 个(请自己分别写出 A 到 B 的 6 个满射).

由于 $|A| = 3$, $|B| = 2$, 所以 A 到 B 的单射没有, 进而 A 到 B 的双射也没有.

假设 $|A| = m$, $|B| = n$.

(1) A 到 B 的满射 若 $m < n$, 不存在满射; 若 $m \geq n$, 先将 m 个元素划分成 n 个块(参见 1.5 节), 共有 $S(m, n)$ 种方式; 再将 B 中元素进行全排列, 共有 $n!$ 种方式, 于是 A 到 B 的满射共有 $S(m, n) \cdot n!$ 个.

(2) A 到 B 的单射 若 $m > n$, 不存在单射; 若 $m \leq n$, 由于 B 中任意选取 m 个元素, 再将其进行全排列都得到 A 到 B 的单射, 故 A 到 B 的单射共有 $C_n^m \cdot m!$ 个.

(3) A 到 B 的双射 若 $m \neq n$, 不存在双射; 若 $m = n$, 此时 B 中元素的任意一个排列均可得到一个 A 到 B 的双射, 因此 A 到 B 的双射共有 $m!$ 个.

12. 设 A, B, C, D 是任意集合, f 是 A 到 B 的双射, g 是 C 到 D 的双射, 令 $h: A \times C \rightarrow B \times D$, 对任意 $(a, c) \in A \times C$, $h(a, c) = (f(a), g(c))$. 证明: h 是双射.

证 对于任意 $(a_1, c_1) \in A \times C$, $(a_2, c_2) \in A \times C$, 假定 $h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2)$, 即 $(f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2))$, 于是 $f(a_1) = f(a_2)$ 且 $g(c_1) = g(c_2)$, 根据已知条件有 $a_1 = a_2$ 且 $c_1 = c_2$, 进而 $(a_1, c_1) = (a_2, c_2)$, 因此 h 是单射.

任意 $(b, d) \in B \times D$, 则 $b \in B, d \in D$, 由于 f 是 A 到 B 的双射且 g 是 C 到 D 的双射, 于是存在 $a \in A, c \in C$ 使得 $f(a) = b, g(c) = d$, 因此 $h(a, c) = (f(a), g(c)) = (b, d)$, 所以 h 是满射.

故 h 是双射.

13. 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow A$. 证明: 若 $f \circ g \circ h = I_A, g \circ h \circ f = I_B, h \circ f \circ g = I_C$, 则 f, g, h 均可逆. 求出 f^{-1}, g^{-1}, h^{-1} .

证 因为恒等映射是双射, 多次使用主教材中定理 1-12 即可得结论.

解 由于 $f \circ g \circ h = I_A$, 所以 f 是单射且 h 是满射. 由于 $g \circ h \circ f = I_B$, 所以 g 是单射且 f 是满射. 由于 $h \circ f \circ g = I_C$, 所以 h 是单射且 g 是满射. 于是 f, g, h 是双射, 因此 f, g, h 均可逆.

由于 $f \circ g \circ h = I_A$, 所以 $f^{-1} = g \circ h$ 且 $h^{-1} = f \circ g$, 进而 $g^{-1} = h \circ f$.

14. 已知阿克曼(Ackermann)函数 $A: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ 的定义为

$$(1) A(0, n) = n + 1, n \geq 0;$$

$$(2) A(m, 0) = A(m - 1, 1), m > 0;$$

$$(3) A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1)), m > 0, n > 0.$$

分别计算 $A(2, 3)$ 和 $A(3, 2)$.

解 由已知条件有 $A(0, 1) = 2, A(1, 0) = A(0, 1) = 2$, 于是

$$A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 2 + 1 = 3,$$

$$A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 3) = 3 + 1 = 4,$$

由此可进一步得出

$$A(1, n) = n + 2,$$

$$A(2, 0) = A(1, 1) = 3,$$

$$A(2, 1) = A(1, A(2, 0)) = A(1, 3) = 3 + 2 = 5,$$

$$A(2, 2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 5) = 5 + 2 = 7,$$

$$A(2, 3) = A(1, A(2, 2)) = A(1, 7) = 7 + 2 = 9.$$

因此有

$$A(2, n) = 2n + 3,$$

$$A(3, 0) = A(2, 1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5,$$

$$A(3, 1) = A(2, A(3, 0)) = A(2, 5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13,$$

$$A(3, 2) = A(2, A(3, 1)) = A(2, 13) = 2 \cdot 13 + 3 = 29.$$

所以有 $A(2, 3) = 9, A(3, 2) = 29$.

1.3 运算的定义及性质

【习题 1.3】

1. 分别判定取绝对值运算 $||$ 、加法运算 $+$ 、减法运算 $-$ 、取大运算 $\max$ 、取小运算 $\min$ 是否为自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的代数运算.

解 因为对于任意 $x \in \mathbf{N}, |x| \in \mathbf{N}$, 所以取绝对值运算 $||$ 是 $\mathbf{N}$ 上的 1 元代数运算. 又因为对于任意 $x, y \in \mathbf{N}$, 有 $x + y, \max(x, y), \min(x, y) \in \mathbf{N}$, 因此加法运算 $+$ 、取大运算 $\max$ 、取小运算 $\min$ 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代数运算.

而对于 $2, 3 \in \mathbf{N}$, 由于 $2 - 3 = -1 \notin \mathbf{N}$, 所以减法运算 $-$ 不是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代数运算.

2. 证明: 集合 $A = \{3^n | n \in \mathbf{N}\}$ 关于数的加法运算不封闭.

证 由于 $3^1, 3^2 \in A$, 而 $3^1 + 3^2 = 12 \notin A$, 所以 A 关于数的加法运算不封闭.

3. 设 $A = \{a, b, c\}$, 求出 A 上的 2 元代数运算的个数.

解 考虑 A 关于 2 元代数运算 $*$ 的运算表, 在运算表中需要填运算结果的有 $3 \times 3 = 9$ 个位置, 而显然每个位置填 a, b, c 中任意一个元素均可, 于是任意一种填充元素的方法都是 A 上一种代数运算, 因此 A 上的 2 元代数运算的个数为 3^9 .

4. 将十进制数 365 转换成八进制.

解 因为 $365 = 45 \times 8 + 5, 45 = 5 \times 8 + 5$, 于是

$$365 = 45 \times 8 + 5 = (5 \times 8 + 5) \times 8 + 5 = 5 \times 8^2 + 5 \times 8 + 5,$$

因此, $365 = (555)_8$.

5. 分别计算 $16(\bmod 3)$, $-16(\bmod 3)$, $0(\bmod 3)$.

解 因为 $16 = 5 \times 3 + 1$, $-16 = (-6) \times 3 + 2$, $0 = 0 \times 3 + 0$, 所以 $16(\bmod 3) = 1$, $-16(\bmod 3) = 2$, $0(\bmod 3) = 0$.

6. 利用素因数分解计算 $\gcd(36, 48)$ 和 $\text{lcm}(36, 48)$.

解 因为 $36 = 2^2 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$, 于是 $\gcd(36, 48) = 2^2 \times 3 = 12$, $\text{lcm}(36, 48) = 2^4 \times 3^2 = 144$.

7. 使用欧几里得算法, 计算 $\gcd(14, 158)$ 并求出整数 x 和 y 使得 $\gcd(14, 158) = 14x + 158y$.

解 因为 $158 = 11 \times 14 + 4$, $14 = 3 \times 4 + 2$, $4 = 2 \times 2$, 所以 $\gcd(14, 158) = 2$. 由于 $2 = 14 - 3 \times 4$, $4 = 158 - 11 \times 14$, 于是 $2 = 14 - 3 \times (158 - 11 \times 14) = 14 \times 4 + 158 \times (-3)$.

8. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 试根据所给定的运算表 1-1 和表 1-2 分别讨论其幂等性、交换性以及是否有单位元素, 若有, 请指出 A 中各元素的逆元素.

解 (1) 在表 1-1 中, 由于 $3 * 3 = 2$, 于是 $*$ 不满足幂等性. 因为 $*$ 运算表是对称的, 所以 $*$ 满足交换性. 又因为对于任意 $x \in A$, 有 $1 * x = x * 1 = x$, 因此 1 是 $*$ 运算的单位元素. 从运算表可知, 1 的逆元为 1, 2 和 3 都没有逆元.

(2) 在表 1-2 中, 由于对于任意 $x \in A$, 有 $x * x = x$, 于是 $*$ 满足幂等性. 因为 $2 * 3 = 2 \neq 3 * 2 = 1$, 所以 $*$ 不满足交换性. 又因为对于任意 $x \in A$, 有 $1 * x = x * 1 = x$, 因此 1 是 $*$ 运算的单位元素. 从运算表可知, 1 的逆元为 1, 2 和 3 都没有逆元(3 的右逆元为 2, 2 的左逆元为 3).

表 1-1

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	2

表 1-2

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	2
3	3	1	3

9. 整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的取大运算 $\max$ 和取小运算 $\min$ 相互可吸收. 试证明之.

证 由于 $\max$ 和 $\min$ 运算可交换, 且对于任意 $x, y \in \mathbf{Z}$, 无论 $x = y$, $x > y$ 还是 $x < y$, 显然都有

$$\max(x, \min(x, y)) = x$$

以及

$$\min(x, \max(x, y)) = x$$

所以 $\mathbf{Z}$ 上的取大运算 $\max$ 和取小运算 $\min$ 相互可吸收.

10. 设 $\mathbf{R}[x]$ 表示实数集 $\mathbf{R}$ 上的所有关于 x 的一元多项式组成的集合, 试验证:

(1) 多项式的加法运算和多项式的乘法运算均满足结合律;

(2) 多项式的乘法运算对多项式的加法运算可分配.

解 (1) 对于任意 $A(x), B(x), C(x) \in \mathbf{R}[x]$, 显然有

$$(A(x)+B(x))+C(x)=A(x)+(B(x)+C(x)),$$

$$(A(x)B(x))C(x)=A(x)(B(x)C(x)),$$

所以多项式的加法运算和多项式的乘法运算均满足结合律.

(2) 对于任意 $A(x), B(x), C(x) \in \mathbf{R}[x]$, 由于多项式的乘法运算满足交换律且显然有

$$A(x)(B(x)+C(x))=A(x)B(x)+A(x)C(x)$$

多项式的乘法运算对多项式的加法运算可分配.

11. 设 $M_n(\mathbf{R})$ 表示实数集 $\mathbf{R}$ 上的所有 n 阶方阵组成的集合.

(1) 试验证: 矩阵的乘法运算对矩阵的加法运算可分配.

(2) $M_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵乘法的单位元素是什么? $M_n(\mathbf{R})$ 中哪些元素关于乘法运算有逆元?

解 (1) 显然, 对于任意 $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$, 根据线性代数知

$$A(B+C)=AB+AC \text{ 且 } (B+C)A=BA+CA$$

因此, 矩阵的乘法运算对矩阵的加法运算可分配.

(2) 由于 n 阶单位矩阵 $E \in M_n(\mathbf{R})$, 且对于任意 $A \in M_n(\mathbf{R})$, 根据线性代数知

$$EA=AE=A$$

所以, n 阶单位矩阵 E 是 $M_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵乘法的单位元素.

同样根据线性代数知, $M_n(\mathbf{R})$ 中只有可逆矩阵才有逆元.

12. 令 $Z_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, Z_m 上的两个 2 元运算分别是模 m 的加法运算“ $+$ ”和模 m 的乘法运算“ $\cdot$ ”: 任意 $x, y \in Z_m, x+_m y = (x+y) \bmod m, x \cdot_m y = (xy) \bmod m$.

(1) 写出 Z_6 关于 $+$ 和 $\cdot$ 的运算表.

(2) 证明: $\cdot_m$ 运算对 $+$ 运算可分配.

解 (1) Z_6 关于 $+$ 和 $\cdot$ 的运算表分别见表 1-3 和表 1-4.

表 1-3

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

表 1-4

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4