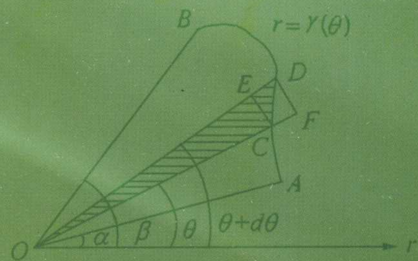
大学数学系列丛书

高等数学（文科类）

Gaodeng Shuxue

主编 廖飞 / 副主编 谢威 武江龙 / 主审 赵宝江



清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

大学数学系列丛书

高等数学

（文科类）

主　编　廖　飞
副主编　谢　威　武江龙
主　审　赵宝江

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书由从事文科高等数学教学的一线教师执笔编写，深入浅出地讲解了文科高等数学的基本知识，包括函数与极限、导数与微分、积分学、线性代数初步、概率论初步等内容。每章均配备了适量的例题和一定数量的习题，书末附有习题答案与提示，供教师和学生参考。

本书注重数学思想的介绍和基本的逻辑思维训练，从不同的侧面比较自然地引入数学的基本概念，适量给出了一些相关的证明过程及求解过程。由于文科高等数学的学时限制，在教材内容的选取与组织上，对微积分、线性代数及概率论课程的知识进行了必要的精减。本书结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂、例证适当、难度适宜，适合作为普通高等院校文科类本专科学生系统学习高等数学基本思想和方法的教材，也可作为自学考试高等数学课程的教学参考书使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：文科类/廖飞主编．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2010.8

（大学数学系列丛书）

ISBN 978－7－5121－0241－5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①廖…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第161642号

责任编辑：黎　丹

出版发行：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010－51686414

印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185×230　印张：14　字数：314千字

版　　次：2010年8月第1版　2010年8月第1次印刷

书　　号：ISBN 978－7－5121－0241－5/O・79

印　　数：1～4 000册　定价：26.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　　言

在长期的高等数学教学中，我们一直关注文科高等数学的课程建设和教材建设。经过多年的教学实践，我们认为文科的高等数学不同于理、工科的高等数学，其目的主要在于引导文科学生掌握一种现代科学的语言，学习一种理性思维的方式，提高大学生的数学修养和综合素质。基于这种认识，我们组织多年从事一线教学的骨干教师编写了这本教材。

在本教材的编写过程中，我们在保留传统高等数学教材结构严谨、逻辑清晰等风格的同时，积极吸收近年来高校教材改革的成功经验，努力做到例证适当、通俗易懂。本教材内容包括函数与极限、导数与微分、积分学、线性代数初步、概率论初步等，每章均配备了适量的习题。

数学不仅是一种重要的工具，也是一种基本的思维方式。我们在编写过程中努力兼顾了这两个方面，即在介绍数学知识的同时，强调培养学生的数学思维方式。教材中不仅渗透了一些数学的思想方法，介绍了某些在人文社会科学中十分重要的数学模型，而且融会了数学发展史、数学方法论及数学在现代社会中的应用，力图使学生对数学的基本特点、方法、思想、历史及其在社会与文化中的应用和地位有大致的认识，获得合理的、适应未来发展需要的知识结构，进而增强对科学的文化内涵与社会价值的理解，为他们将来对数学的进一步了解与实际应用提供背景的材料与基本能力，以实现为现代化社会培养具有新型知识结构与文化观念的人才的目标。

本教材特色如下。

1. 选材合理，难易程度适当，能够满足文科多种专业基础数学课的不同需要，而又不显得庞杂和艰深。

2. 能以文科学生易于理解和接受的方式，确切地描述数学定义、概念，讲解理论和方法，而又不失数学的严谨性与系统性。

3. 内容安排层次分明、条理性强，讲解通俗易懂、深入浅出，不仅利于课堂教学，也便于学生自学。

4. 例题、习题的选配照顾到了理论、方法的练习和实际应用的练习，从整体上看数学的训练是充分的。

参加本教材编写工作的有：廖飞（第 1、2、3 章）、武江龙（第 4 章）、谢威（第 5 章）等，全书由廖飞统稿。

赵宝江教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示衷心的感谢！

本教材的编写还得到韩明莲、王岚等同志的支持和帮助，在此一并表示衷心的

感谢！

本教材的出版得到了清华大学出版社和北京交通大学出版社的大力支持，尤其是黎丹责任编辑为本教材的出版做了大量的工作，在此表示衷心感谢。

本书配有教学课件和相关的教学资源，有需要的读者可以从出版社网站 http：//press. bjtu. edu. cn 下载或与 cbsld@jg. bjtu. edu. cn 联系。

由于编者水平有限，加上时间仓促，书中的疏漏、错误和不足之处在所难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2010 年 7 月

目　　录

数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了．

——恩格斯

一尺之棰，日取其半，万世不竭．

——《庄子·天下篇》

割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣．

——刘徽

数学分析是关于函数的科学．

——欧拉

第 1 章　函数与极限

客观世界处在永恒的运动、发展和变化中，对各种变化过程和变化过程中的量与量的依赖关系的研究，产生了函数与函数极限的概念．函数概念就是对运动过程中量与量的依赖关系的抽象描述，是刻画运动变化中变量之间相依关系的数学模型．极限是研究函数的主要工具，是微积分学的理论基础，是刻画变化过程中变量的变化趋势的数学模型．

本章将介绍函数与极限的基本概念、性质和运算，并利用极限描述函数的连续性．连续函数是最常见的一类函数，它具有一系列很好的性质和基本运算．微分理论将以连续函数为主要研究对象．

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

历史上，“函数”一词是由著名的德国数学家、微积分创始人之一的莱布尼茨在 1692 年的著作中首先引入的．他是针对某种类型的数学公式来使用这一术语的，尽管当时他已经考虑到变量 x 及和 x 同时变化的变量 y 之间的依赖关系，但还是没有能够给出一个明确的函数定义．其后，经瑞士数学家欧拉、德国数学家黎曼等人不断修正、扩充才逐步形成一个较为完整的函数概念．

1. 函数的概念

在生产实践和科学研究中，会碰到各种各样的量，其中有的量在整个过程中保持不变，如重力加速度 g 在物体下落过程中，总是取同一数值的量，这种量称为**常量**；还有的一些量在过程中是变化的，如在物体自由下落的过程中，时间 t 和路程 s 都是不断变化的且可以取不同数值的量，这种量称为**变量**．

同一现象中，往往有几个变量在变化着，它们的变化不是孤立的，而是互相联系并且遵循一定的变化规律．这种变量之间的依赖关系就是函数关系．现在先看几个例子，然后给出函数的定义．

【例 1－1】　考虑圆的面积 S 与它的半径 r 之间的依赖关系．众所周知，它们之间的关系由公式

$$S=\pi r^2$$

给出，当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 S 的相应数值．

【例 1－2】 考察自由落体运动．设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么在物体运动的过程中，s 与 t 之间的依赖关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出，其中 g 是重力加速度．若物体着地的时刻为 $t=T$，则当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值．

我们抛开每一个例子所包含的具体意义及表达变量之间关系的不同形式，抓住它们的共同本质，就可以概括出函数概念．

定义 1－1 如果在某个变化过程中有两个变量 x，y，并且对于 x 在某个变化范围 X 内的每一个确定的值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 叫做自变量，x 的取值范围 X 叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合 Y 叫做函数的值域．

函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 就是 x 的取值范围，因变量 y 是由对应法则 f 唯一确定的，所以定义域和对应法则是函数的两个要素或者说一个函数由定义域和对应法则唯一确定．只要两个函数的定义域和对应法则都相同，那么这两个函数就相同；如果定义域或对应法则有一个不相同，那么这两个函数就不相同．

【例 1－3】 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$ 不同，因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数．

2. 函数的表示法

常见的函数表示法有三种：解析法、图示法和表格法．

① 解析法．用数学式子表示自变量与因变量之间的对应关系，称为解析法．

显函数，如 $y=2x^2-1$.

分段函数，如 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

隐函数，如 $e^x-xy+1=0$.

② 图示法就是用函数的图形来表示自变量和因变量之间的关系．

③ 表格法就是把自变量与因变量的一些对应值用表格列出，这样函数关系就用表格表示出来．例如，三角函数表和对数表等都是用表格法表示函数的．

1.1.2 函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义．若存在正数 M，对于任意给定的 $x\in I$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 是在 I 上的**有界函数**（如图 1-1 所示），正数 M 称为 $f(x)$ 在 I 上的界，否则就称 $f(x)$ 在 I 上**无界**．

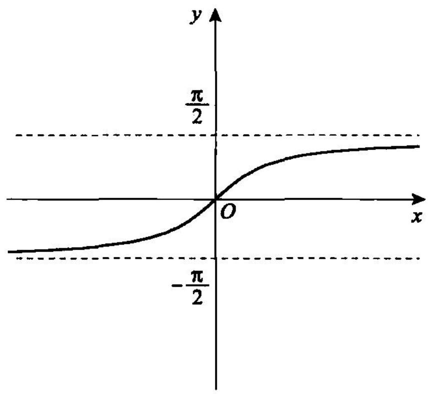


图 1-1

函数的有界性实际上就是它的值域集合的有界性．例如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$. 不难看出，有界函数的图形总是位于平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间．而 $y=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的无界函数．

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，任意的 x_1，$x_2\in I$. 若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，其图像随着自变量的增大而上升，此时称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调增区间**；若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少，其图像随着自变量的增大而下降，此时称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调减区间**．

递增函数和递减函数统称为**单调函数**．同样，可以定义无限区间上的单调函数．

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是递减的，而在 $(0,+\infty)$ 内是递增的．

3. 奇偶性

若函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意的 x 都有 $f(-x)=-f(x)$（或

$f(-x)=f(x)$)，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**（**或偶函数**）．

奇函数的图像是关于原点对称的；偶函数的图像是关于 y 轴对称的（如图 1－2 所示）．

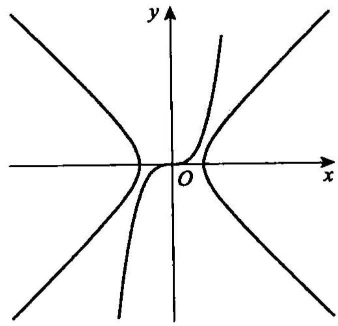


图 1－2

例如，$y=\cos x$ 在定义区间上是偶函数．而 $y=\sin x$ 在定义区间上是奇函数．

若函数既非奇函数也非偶函数，则称函数为非奇非偶函数．

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，若存在一个非零常数 T，对一切的 x 均有 $f(x+T)=f(x)$ 在 x 的定义域内成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**．并把 T 称为 $y=f(x)$ 的一个周期．应当指出的是，通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期．

对三角函数而言，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数．

1.1.3　反函数和复合函数

1. 反函数

函数可以看作是从定义域到值域的一种运算，现在讨论这种运算的逆运算，引出反函数的概念．

> **定义 1－2**　设函数 $y=f(x)$，$x\in X$，$y\in Y$．如果对于 Y 内的任一 y 值，X 内都有唯一确定的 x 值与之对应，使 $f(x)=y$，那么在 Y 上确定了一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$．相对于反函数而言，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．

通常习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量．因此将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，此时说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数．

函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 和值域 Y 分别是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域．

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称（如图 1－3 所示）．这是因为两个函数因变量与自变量互换的缘故．

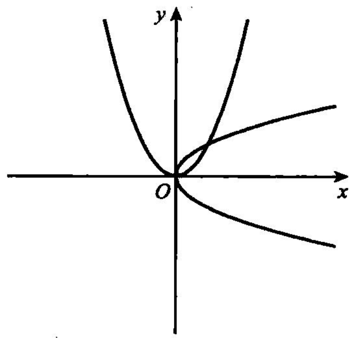


图 1－3

注意到，并非任何函数都有反函数，对于一个给定函数 $y=f(x)$，$x\in X$，$y\in Y$ 来说，它在 X 上存在反函数的充要条件是 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的．因为单调函数是一一对应的，所以单调函数一定有反函数，并且反函数也有相同的单调性．

【例 1－4】　求函数 $y=x^2(x\in[0,+\infty))$ 的反函数．

解　因为函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以它存在反函数．由 $y=x^2$ 得 $x=\sqrt{y}$，$y\geqslant 0$，于是函数 $y=x^2(x\in[0,+\infty))$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}(x\in[0,+\infty))$．

2. 复合函数

如果某个变化过程中同时出现几个变量，其中第一个变量依赖于第二个变量，第二个变量又取决于第三个变量，则第一个变量实际上是由第三个变量所确定．这类多个变量的连锁关系导出了数学上复合函数的概念．在中学数学里，就遇到过这样的函数，如 $\ln(\sin x)$，可以看成是将 $u=\sin x$ 代入到 $y=\ln u$ 之中而得到的．像这样在一定条件下，将一个函数“代入”到另一个函数中的运算称为函数的复合运算，而得到的函数称为复合函数．一般有下面的定义．

定义 1－3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，而且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域的一部分上取值时，所对应的 $u=\varphi(x)$ 的值在 $y=f(u)$ 的定义域内变化，则称 $y=f(\varphi(x))$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数．称 u 为中间变量，函数 $u=\varphi(x)$ 称为内层函数，函数 $y=f(u)$ 称为外层函数．

函数 f 与函数 g 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即

$$f\circ g=f[g(x)]$$

注意到，并不是任意两个函数都能构成复合函数，只有当内层函数的值域与外层函数的定义域交集不空时，两函数才能进行复合运算．

【例 1－5】 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

解 由

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0\\ 1, & f(x)\geqslant 0\end{cases}$$

易知当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x<0$，而 $f[f(x)]=1+f(x)=1+(1+x)=2+x$. 当 $x\geqslant -1$ 时，无论 $-1\leqslant x<0$ 及 $x\geqslant 0$，均有 $f(x)\geqslant 0$，从而 $f[f(x)]=1$. 所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}$$

【例 1－6】 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

解 令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，代入已知表达式，得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$$

复合函数可以由两个以上的函数构成．例如，由函数 $y=5^u$，$u=v^3$，$v=2x-1$ 复合而成的函数为

$$y=5^{(2x-1)^3}$$

反过来也能将一个比较复杂的函数分解成几个简单函数的复合．例如，函数 $y=\log_2\sqrt{1+x^2}$ 可以看作由以下三个函数

$$y=\log_2 u,\ u=\sqrt{v},\ v=1+x^2$$

复合而成．