

(九) 含有 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ ($c>0$) 的积分

微 积 分

金子瑜 主 编
郭希泰

河北人民出版社

微 积 分

金子瑜 主编
郭希泰

河 北 人 民 出 版 社

主 编	金子瑜 (河北农业大学)
	郭希泰 (内蒙古农牧学院)
副主编	罗筱筠 (山东农业大学)
	白富志 (保定职工大学)
	张柏樑 (湛江农业专科学校)
主 审	高察伦 (四川农学院)
副主审	冯秉常 (吉林农业大学)
	刘襄成 (四川农学院)
	胡修伟 (北京市职工大学)
编写者	王景武 (甘肃农业大学)
	宋耀东 (河南农业大学)
	朱志梁 (河北农业大学)
	俞良甫 (河北农业大学)
	孟昭凤 (河北农业大学)
	王兆生 (河北农业大学)
	张德培 (河北农业大学)
	陈文光 (河北农业大学)
	汪 蕾 (河北农业大学)
	周裕拯 (内蒙古林学院)
	李前范 (四川绵阳农业专科学校)
	杜受仪 (四川农学院)
	张学武 (河北农业大学昌黎分校)
	杨庆熙 (西南农学院)
	刘桂阳 (山东莱阳农学院)

前 言

随着四个现代化建设的需要和我国教育事业的蓬勃发展，作为一门理论性的基础课的数学，是起着奠基作用的，因之数学教材的建设也是急需的。

河北农大等七所院校，于两年前根据“1982年8月数学教学大纲编审会北京会议审订的高等农业院校数学课程教学大纲”的要求，编写了《微积分》、《线性代数及其计算方法》和《概率论与数理统计》三本数学教材。经两年来部分院的试用，认为教材编得较好，但也提出了一些意见，故于今年一月上旬我们邀请廿一所院校的数学教师代表在保定召开了编审会议，对上述三本教材，根据形势的发展和大专院校的需要，又进行了反复的讨论和认真的修改，定稿成为现在的三本书。

改编后的教材结构紧凑，语言简炼，深入浅出。为了使读者便于巩固加深基本概念，掌握计算方法，提高计算技能，书中在每章节的后面都配有足够的练习题与补充题，供教师与读者选用。练习题以基本训练为主，并在书后附有答案。其中难度较大的题，都给了简要的提示。书后附有某些计算的 BASIC 语言程序。

书中部分章节前注有“*”或“**”符号的，是供不同专业的需要选用。

这套教材适于作高等农、林、医等院校本科，职工大学和工类专科的教科书，或农林科研技术人员掌握数学方法，提高计算技术的参考书，也能作自学用书。而其中《线性代数及其计算方

法》和《概率论与数理统计》二书也可作工科的教科书。

兰州大学数学系刘沂年教授，曾参加本书的编写工作会议，审阅了部分章节，提出了宝贵意见，对本书的编写工作给予很大支持，在此表示感谢。

由于水平所限，编写中的错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编 者

1985年8月

目 录

前 言

第一章 函数	(1)
§ 1.1 函数概念	(1)
习题 1-1	(9)
§ 1.2 函数的几种特性	(10)
一、奇偶性	(10)
二、单调增减性	(11)
三、有界性	(11)
四、周期性	(12)
习题 1-2	(12)
§ 1.3 复合函数、反函数、初等函数	(13)
一、复合函数	(13)
二、反函数	(15)
三、基本初等函数	(18)
四、初等函数	(18)
习题 1-3	(19)
补充题	(19)
第二章 函数的极限与连续	(21)
§ 2.1 极限概念	(21)
一、数列极限	(21)
二、函数的极限	(25)
习题 2-1	(32)

§ 2.2	函数极限的性质与运算法则	(33)
	一、极限的性质	(33)
	二、极限运算法则	(35)
	三、关于极限不等式	(38)
	习题 2-2	(41)
§ 2.3	两个重要极限	(42)
	习题 2-3	(47)
§ 2.4	无穷小量	(48)
	一、无穷小量	(48)
	二、无穷小量的比较	(50)
	习题 2-4	(51)
§ 2.5	函数的连续性	(52)
	一、函数连续性的概念	(52)
	二、函数的间断点	(55)
	三、连续函数的运算	(58)
	四、初等函数的连续性	(58)
	五、连续函数在闭区间上的性质	(59)
	习题 2-5	(61)
	补充题	(62)
第三章	导数与微分	(65)
§ 3.1	导数概念	(65)
	一、变化率问题举例	(65)
	二、导数定义	(67)
	三、导数的几何意义	(69)
	四、函数的可导性与连续性的关系	(71)
	习题 3-1	(71)
§ 3.2	基本初等函数的导数	(72)
	一、按定义求导数举例	(72)
	二、反函数的导数	(75)

三、导数基本公式	(76)
习题 3-2	(77)
§ 3.3 函数的和、差、积、商的求导法则	(78)
习题 3-3	(80)
§ 3.4 复合函数的求导法则	(81)
习题 3-4	(85)
§ 3.5 微分	(87)
一、微分定义	(87)
二、微分的几何意义	(90)
三、微分公式与微分运算法则	(91)
四、微分在近似计算中的应用	(94)
习题 3-5	(97)
§ 3.6 隐函数及参数方程所表示的函数的微分法	(98)
一、隐函数微分法	(98)
二、参数方程所表示的函数的微分法	(100)
习题 3-6	(101)
§ 3.7 高阶导数与高阶微分	(102)
一、高阶导数	(102)
二、高阶微分	(105)
习题 3-7	(106)
§ 3.8 相关变化率	(107)
习题 3-8	(109)
补充题	(110)
第四章 微分学的基本定理和应用	(112)
§ 4.1 中值定理	(112)
一、罗尔定理	(112)
二、拉格朗日中值定理	(113)
三、柯西中值定理	(117)
习题 4-1	(119)

§ 4.2	罗比塔法则	(120)
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式		(120)
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式		(123)
三、其它类型的未定式		(125)
习题 4-2		(127)
§ 4.3	函数单调增减性的判定法	(128)
习题 4-3		(130)
§ 4.4	函数的极值	(131)
习题 4-4		(137)
§ 4.5	关于最大值、最小值的应用问题	(137)
习题 4-5		(140)
§ 4.6	曲线的凹凸与拐点	(141)
习题 4-6		(144)
§ 4.7	函数图形的描绘	(145)
习题 4-7		(147)
*§ 4.8	方程的近似解	(147)
一、弦位法		(149)
二、切线法 (牛顿法)		(150)
三、综合法		(151)
习题 4-8		(153)
§ 4.9	台劳公式	(153)
习题 4-9		(159)
§ 4.10	台劳级数	(159)
一、级数的一般概念		(159)
二、台劳级数		(162)
习题 4-10		(167)
**§ 4.11	有关级数的一些基本知识	(168)

一、级数收敛的判别法	(171)
二、幂级数	(179)
习题 4-11	(185)
补充题	(186)
第五章 不定积分	(188)
§ 5.1 原函数与不定积分	(188)
一、原函数	(188)
二、不定积分的定义	(190)
三、基本积分表	(193)
四、不定积分的性质	(194)
习题 5-1	(196)
§ 5.2 换元积分法	(198)
一、第一类换元积分法	(198)
二、第二类换元积分法	(207)
习题 5-2	(212)
§ 5.3 分部积分法	(216)
习题 5-3	(220)
§ 5.4 几种特殊类型函数的积分举例	(220)
一、有理函数的积分举例	(220)
二、三角函数的有理式积分举例	(225)
三、简单无理函数积分举例	(227)
习题 5-4	(229)
§ 5.5 积分表的使用	(230)
习题 5-5	(232)
补充题	(232)
第六章 定积分	(234)
§ 6.1 定积分的概念和基本性质	(234)
一、定积分问题举例	(234)
二、定积分定义	(237)

三、定积分的几何意义	(239)
四、定积分的性质	(240)
习题 6-1	(243)
§ 6.2 微积分基本定理	(244)
习题 6-2	(249)
§ 6.3 定积分的换元积分法与分部积分法	(251)
一、定积分的换元积分法	(251)
二、定积分的分部积分法	(254)
习题 6-3	(256)
§ 6.4 定积分的应用	(259)
一、平面图形的面积	(260)
二、体积	(264)
三、平面曲线的弧长	(266)
四、变力所作的功	(268)
五、液体压力	(269)
六、平均值	(270)
习题 6-4	(272)
§ 6.5 定积分的近似计算	(274)
一、矩形法	(275)
二、梯形法	(276)
三、抛物线法	(276)
习题 6-5	(280)
§ 6.6 广义积分与伽玛函数	(281)
一、广义积分	(281)
二、广义积分敛散性判别法	(287)
三、 Γ -函数	(292)
习题 6-6	(294)
补充题	(295)
第七章 向量代数与空间解析几何	(297)

§ 7.1	向量及其线性运算	(297)
	一、向量的概念	(297)
	二、向量的加法	(298)
	三、向量和数量的乘积	(300)
	习题 7-1	(302)
§ 7.2	空间直角坐标系与向量的坐标表示	(303)
	一、空间点的直角坐标	(303)
	二、向量及其线性运算的坐标表示	(305)
	三、向量的模及方向的坐标表示	(308)
	习题 7-2	(311)
§ 7.3	向量的乘法	(312)
	一、数量积	(312)
	二、向量积	(315)
	三、三向量的混合积	(318)
	习题 7-3	(321)
§ 7.4	平面方程	(322)
	一、平面的点法式方程	(322)
	二、平面的一般方程	(323)
	三、过已知三点的平面方程	(324)
	四、两平面的夹角	(326)
	习题 7-4	(327)
§ 7.5	空间直线的方程	(329)
	一、空间直线的点向式方程与参数方程	(329)
	二、直线的一般方程	(330)
	三、直线与直线、直线与平面的一些问题	(331)
	习题 7-5	(333)
§ 7.6	空间曲面与曲线	(335)
	一、曲面方程	(335)
	二、空间曲线的方程	(340)

三、几种常见的二次曲面	(342)
四、曲线在坐标面上的投影	(346)
习题 7-6	(347)
补充题	(349)
第八章 多元函数及其微分法	(352)
§ 8.1 多元函数的概念	(352)
一、多个自变量的函数关系举例	(352)
二、二元函数及其定义域	(353)
三、二元函数的几何意义	(357)
四、多元函数的定义	(358)
习题 8-1	(359)
§ 8.2 多元函数的极限与连续	(360)
一、多元函数的极限	(360)
二、多元函数的连续性	(362)
习题 8-2	(363)
§ 8.3 偏导数和全微分	(364)
一、偏导数	(364)
二、偏导数的几何意义	(367)
三、全微分	(368)
习题 8-3	(376)
§ 8.4 复合函数及隐函数微分法	(377)
一、复合函数微分法	(377)
二、隐函数微分法	(383)
习题 8-4	(388)
§ 8.5 高阶偏导数	(390)
习题 8-5	(392)
§ 8.6 几何方面的应用	(393)
一、空间曲线的切线与法平面	(393)
二、曲面的切平面与法线	(395)

习题 8-6.....	(398)
§ 8.7 多元函数极值	(399)
一、极值的定义及其求法	(399)
二、最大值和最小值	(403)
三、条件极值——拉格朗日乘数法	(405)
习题 8-7.....	(410)
补充题.....	(411)
第九章 多元函数的积分	(414)
§ 9.1 二重积分概念	(414)
一、二重积分问题举例	(414)
二、二重积分的定义	(417)
三、二重积分的性质	(419)
习题 9-1.....	(420)
§ 9.2 二重积分的计算	(421)
一、直角坐标系中二重积分的计算法	(421)
二、极坐标系中二重积分的计算法	(429)
三、二重积分的一般变量变换	(434)
习题 9-2.....	(440)
§ 9.3 广义二重积分	(443)
习题 9-3.....	(447)
§ 9.4 二重积分的应用	(447)
一、曲面面积	(448)
二、重心	(451)
习题 9-4.....	(454)
*§ 9.5 三重积分、对弧长的曲线积分、对面积的	
曲面积分	(455)
一、积分概念	(455)
二、三重积分的计算	(458)
三、对弧长的曲线积分的计算	(469)

四、对面积的曲面积分的计算	(471)
习题 9-5	(473)
**§ 9.6 对坐标的曲线积分与对坐标的曲面积分	(475)
一、对坐标的曲线积分	(475)
二、对坐标的曲面积分	(487)
习题 9-6	(492)
补充题	(493)
第十章 微分方程	(495)
§ 10.1 一般概念	(495)
习题 10-1	(501)
§ 10.2 可分离变量的一阶微分方程	(502)
习题 10-2	(505)
§ 10.3 一阶线性微分方程	(506)
习题 10-3	(510)
§ 10.4 特殊类型的二阶微分方程	(511)
一、 $y'' = f(x, y')$ 型的二阶方程	(511)
二、 $y'' = f(y, y')$ 型的二阶方程	(514)
习题 10-4	(516)
§ 10.5 二阶常系数线性微分方程	(516)
一、二阶常系数齐次线性微分方程	(516)
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	(521)
习题 10-5	(527)
§ 10.6 常系数线性微分方程组解法举例	(528)
习题 10-6	(530)
补充题	(531)
附表 积分表	(534)
习题答案	(546)

第一章 函 数

函数是数学中的一个重要的基本概念。本书中所要讨论的微分学、积分学、微分方程等内容,都将以函数作为主要研究对象。一元函数的有关内容在中学已经学过,本章仅对一元函数的内容加以整理,并给适当地补充,使读者便于复习,并对它有较系统深入地理解,有利于今后高等数学的学习。

§1.1 函数概念

一切客观事物本来是相互联系和有内部规律的。函数关系所表达的变量之间的相互依赖关系,正是从量的侧面来反映客观事物在运动变化过程中,变量之间所存在的相互联系、相互制约的关系。虽然不同的函数关系所包含的具体意义和形式不同,但它们共同的实质,却可以用函数概念来加以概括性的描述。

下面将给出实数集上实值函数的概念,并用 R 表示全体实数的集合, D 表示 R 的子集。

定义 1.1 如果有一个确定的对应规律 f , 使得对于 D 中的每一个实数 x , 都有一个唯一确定的实数 y 与之相对应, 并记 $y=f(x)$, 则称 f 是 D 到 R 的函数, 也称 f 是定义于 D 上的(实值)函数。用

$$f: D \longrightarrow R \quad (\text{或 } D \xrightarrow{f} R),$$

或

$$f: x \rightarrow f(x) = y, (x \in D, y \in R)$$

来表示, 称集合 D 为函数 f 的**定义域**, 称 x 为**自变量**, 称 y 为**因变量**, 当 x 取遍 D 中的一切数时, 与之对应的数 y 的全体组成的集合 F 常记为 $f(D)$, 即

$$F = f(D) = \{y = f(x) | x \in D\}.$$

且称 F 为函数 f 的**值域**.

由于每一个 $y \in F$ 都至少有一个元素 $x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 所以 f 又称为 D 到 F 上的函数. 如果 $F = R$, 则称 f 为 D 到 R 上的**函数**; 如果 F 为真子集, 则称 f 为 D 到 R 内的**函数**. 如果对于每一个 $y \in F$, 只有唯一的 $x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 即当 $x_1 \neq x_2$, $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ 时, $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称函数 f 是 D 到 F 上的一对一函数 (或一一对应).

定义 1.1 所描述的变量 x 与 y 之间的对应关系, 通常称为**函数关系**.

由于 y 是通过函数关系依赖于 x , 习惯上常常简单地表述为“ y 是 x 的函数”, 并用 $y = f(x)$ 来表示. 为了方便, 我们仍遵循这一习惯, 但我们应该根据上述的定义完整地理解它. 它的含义是有对应规律 f 存在, 使得对于定义域 D 上的每一个 x 都有确定的 y 与之对应. 即, 当用字母 f 表示函数时, 如果 $x \in D$ 对应着 $y \in F$, 就写为 $y = f(x)$. 今后也用到“已给函数 $y = f(x)$ ”等词句, 其含义也均应如此理解.

此外, 要说明的一点是, 在定义中要求对于每一个 $x \in D$, 按对应规律 f , 有一个唯一确定的实数 y 与之对应. 按这一规定来定义的函数, 通常称为**单值函数**. 如果去掉唯一性的限制, 而对于 $x \in D$, 按对应规律 f , 有多个实数值 y 与之对应时, 则称函数 f 为**多值函数**. 由于我们主要讨论单值函数, 今后如不作特别的声明, 所遇到的函数均指单值函数.

由定义知, 一个函数为对应规律 f 和定义域 D 所完全决定