

名师指点丛书 名师指点丛书 丛书主编 牛宝彤

丛书顾问 张志公

郝德志 赵俊礼 主编

初中 数学

重点 难点 热点 疑点

答问

经济日报出版社

名师指点丛书 张志公 顾问
牛宝彤 主编

初中数学 重点 难点 答问
热点 疑点

郝德志 赵俊礼 主编

经济日报出版社

责任编辑：朱 兰

责任校对：和 成

图书在版编目 (CIP) 数据

初中数学重点、难点、热点、疑点问答/郝德志主编. 北京:
经济日报出版社, 1996. 1

ISBN 7-80127-126-2

I. 初… II. 郝… III. 数学-初中-问答-教学参考资料
IV. G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 01626 号

名师指点丛书

初中数学 ^{重点 难点} _{热点 疑点} 问答

郝德志 赵俊礼主编

经济日报出版社出版发行

(北京市体育馆路龙潭西里 54 号)

全国新华书店经销

河北省永清县第一胶印厂印刷

787×1092 毫米 1/32 160 千字 7.25 印张

1996 年 4 月第 1 版 1996 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—11000 册

ISBN 7-80127-126-2/G·56 定价 8.50 元

要把金针度与人（总序）

牛宝彤

韩愈《师说》：“师者，传道授业解惑也。”由此看来，“解惑”是教师的职责之一。人非圣贤，孰能无惑？正在长身体长知识的中学生，对所学的各门功课产生这样那样的问题，是正常现象。有了问题，就要问老师。但由于时间、空间的限制，当面问老师也不那么方便和容易。譬如在深夜或假期里有了问题，而老师又不在身边；再如边远地区的学生想当面向京津沪的名师请教，由于路途遥远，就不那么容易。如果把同学们提出的问题加以筛选，请京津沪及全国各地的名师给予解答，并且编辑成书，同学们随时可以翻阅，如同当面向名师请教，该是多么好啊！基于这种想法，我们编纂了这套“名师指点丛书”，献给广大立志为国成才，渴望求知解惑的中学生，兴许他们是会欢迎的。

本丛书分学科编写，采用“答问”形式，解答重点、难点、热点、疑点等方面的问题。“重点”依据“教学大纲”和“考试大纲”；“难点”是指中学生在学习中感到困难的地方，因人而异，同学们在阅读时可各取所需；“热点”指当前中学生学习中的热门话题，特别是中考、高考有关的问题；“疑点”是指教材本身实际存在的常使一般中学生迷惑不解的问题，譬如“语文”中的《林教头风雪山神庙》“风雪”是什么词？《为了忘却的记念》“忘却”与“记念”是否矛盾？“掌柜是一副凶脸孔”（《孔乙己》），掌柜是人，怎么是“脸孔”？……诸如此类的问题，各学科都有，学生常常迷惑不解，一些青年教师解答起来也往往感到棘手，本丛书就是试图回答以上

几方面的问题，目的是为中学生“解惑”，并不要求面面俱到。

本丛书的读者对象是全国广大中学生，同时也可供中学青年教师及学生家长参考。

本丛书的“问题”多是广大中学生提出的，或是有经验的中学教师提供的。“答问式”稿件是约请全国各地特级、高级教师和一些有成就的中青年教师编写的，注重科学性和可读性。由于稿件并非出自一人之手，所以在文笔、风格等方面不强求一律，允许百花齐放，八仙过海。但有一点是统一的，那就是稿件必须“言之有物”，教给学生真知识真本领，切实为中学生解难答疑。元代名诗人元次山诗曰：

晕碧裁红点缀匀，一回拈出一回新；

鸳鸯绣了从君看，莫把金针度与人。

这种态度是不足取的，应当反其道而行之：“要把金针度与人”。这才是本丛书作者、编者的共同心愿。至于这心愿是否实现，只好留待读者评说了。我们热诚欢迎大家提出宝贵意见，以便再版时修订。

本丛书设主编一人，各分册设主编、组编及编委若干人。层层把关，保证质量。他们多是德高望重的一代名师，为本丛书的成书作出了杰出的贡献。譬如：

京津沪的特级教师：王维翰、刘宗华、赵俊礼、季如生、孙贵恕、赵德民、吴正禄、杨鹤龄、陈隆涛、姜菲、王培德、张鼎言、阎治身、李济森、马绍纲、孔繁纲、周锡安，教授及专家学者：张志公、徐仲华、崔天绥、王静文、汪惠清、张仲英、金淑媛；

河北省特级教师赵文州，副教授王兰州；

辽宁省特级教师周宗棠，市教委主任杨宋卿；

吉林省特级教师贾万里；

黑龙江省特级教师王全和；
山东省特级教师赵振伟；
浙江省特级教师张渡；
江西省特级教师韩振铁；
福建省特级教师黄金镇；
湖北省特级教师郑其烨、张世清，校长郝德志；
河南省特级教师谷同来、杨书忠，校长及市县教委主任
李树领、徐秉信、王国珍、张川；
贵州省特级教师王有志；
四川省特级教师解子宜；
陕西省特级教师方家驹。

限于篇幅，热情为本丛书撰稿的众多特级、高级教师就不一一列举了。

本丛书是集体劳动的结晶，受到全国各地数以千计的中学教师及教育行政干部的支持与鼓励，得到了经济日报出版社朱兰、赵润庭等同志的热切关怀和真诚的协助，特别是全国著名的教育家、语言学家、本丛书顾问张志公教授，著名语言学家徐仲华教授的关怀与指教，在这里深表谢忱。最后，聊剥元次山诗，以表心愿：

提问作答点缀匀，一问一答一回新；

丛书编成从君看，要把金针度与人。

牛宝彤

1995年7月于北京

中国人民公安大学木樨斋

序 言

为了帮助同学们学好初中数学，我们邀请了全国部分重点中学学术水平高超、业务功底过硬、教学经验丰富的特级教师和高级教师，精心编写了这本书。

本书紧扣现行初中数学教材和数学教学大纲，以专题问答的形式出现，从不同的角度、不同的侧面，对初中数学的重点和难点作了精辟独到的分析，加深了对概念准确深刻的理解；对基本知识、基本技能和基本的数学方法作了比较详尽的介绍，所选例题平中见奇，拙中见巧，具有一定的深度，突出了知识向能力的转化，以便同学们更好的理解和思考。可以说，它是全国许多名师多年教学心血的结晶，因而具有很高的指导与实用价值，相信对读者会起到自学解惑、探求规律、启迪智慧、培养能力的作用。

本书语言通俗易懂，阐述深入浅出，重在指点迷津，既可作为初中生学习指导和复习的导读材料，又可作为中学数学教师备课的参考书。

本书是《名师指点丛书》中的一本，是在丛书主编统筹部署下开展编辑工作的。在体例上，与丛书其他各本大体保持一致。由于编者水平，难免有不足之处，敬请广大读者批评、指正。

愿本书成为广大初中师生和数学爱好者的良师益友。

郝德志

一九九六年三月

目 录

要把金针度与人 (总序)	牛宝彤
序言	郝德志

一 代数部分

1. 数轴上的点都表示有理数吗?	(1)
2. 负号与减号相同吗?	(1)
3. 什么是相反数? 零的特征与作用是什么?	(3)
4. 绝对值是去掉正负号的数吗?	(4)
5. 怎样理解有理数的加法法则?	(5)
6. 什么叫倒数? 1 的特征是什么?	(8)
7. 多项式乘法与多位数乘法为什么类似?	(9)
8. 怎样认识整式与分式?	(11)
9. 方程 $3x+2y=6$ 的解集与 $3x+2=6$ 的解有什么本质差异?	(13)
10. 怎样解关于 x 的方程 $ax=b$?	(15)
11. 等式与不等式的变形与它们的解集的异同点是什么?	(16)
12. 怎样解一元一次不等式组?	(18)
13. 为什么解分式方程时必须验根?	(21)
14. 解分式方程 (组) 有什么技巧?	(24)
15. 怎样突破列方程解应用题这一难点?	(31)
16. $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$ 是否恒成立?	(36)
17. 怎样才能学好二次根式?	(37)
18. 怎样才能学好一元二次方程的根与判别式?	(41)
19. 求二次函数解析式有几种常用的方法?	(45)

20. 怎样应用二次函数的图象及性质解题?	(50)
21. 什么是新形式的二次函数? 怎样利用它解题? ...	(55)
22. 换元法为什么是一种重要的数学方法?	(58)
23. 如何运用换元法分解因式?	(59)
24. 如何运用换元法解方程(组)?	(62)
25. 如何应用配方法解题?	(74)
26. 如何应用待定系数法解题?	(83)
27. 怎样用数形结合思想分析问题?	(90)
28. 在代数中如何运用分类讨论思想?	(96)
29. 如何应用构造法解题?	(101)
30. 你了解统计的有关知识吗?	(107)
31. 错解选择题的主要原因是什么?	(108)
32. 用方程思想求函数解析式	(112)

二 几何部分

33. 如何突破“几何入门难”?	(116)
34. 怎样比较角的大小?	(120)
35. 什么叫两个角互余与互补?	(122)
36. 定理为什么要证明?	(124)
37. 证明三角形内角和定理有哪些常用的方法?	(126)
38. 怎样学会证明?	(128)
39. 判定定理与性质定理有什么区别与联系?	(130)
40. 怎样巧用角平分线证题?	(131)
41. 怎样应用等腰三角形的性质解题?	(135)
42. 怎样从等腰三角形的性质推出轴对称的性质?	(137)
43. 怎样学好多边形?	(141)
44. 怎样通过引中位线证题?	(143)

45. 怎样学好平行四边形?	(146)
46. 怎样学好梯形?	(148)
47. 怎样作辅助线证题?	(150)
48. 三角形一定有外接圆和内切圆吗?	(152)
49. 什么样的四边形有外接圆和内切圆?	(154)
50. 怎样判定一条直线与圆相切?	(155)
51. 切线有什么性质? 什么是圆幂定理?	(155)
52. 怎样巧用辅助圆解几何题?	(157)
53. 怎样求平面几何中最大(小)值?	(161)
54. 几何证题中有哪些常见错误?	(163)
55. 几何证明中易犯哪几种逻辑错误?	(166)
56. 怎样用方程思想解直角三角形?	(173)
57. 怎样用方程思想解几何题?	(177)
58. 在几何中如何运用分类讨论思想?	(181)
59. 如何运用求根公式证明几何题?	(188)
60. “旋转变换”在几何解题中有哪些应用?	(190)
61. 怎样一题多解、一题多证?	(197)
62. 如何运用“类比与联想”解题?	(205)
63. 怎样巧用“类比与联想”证题?	(212)
64. 怎样用转化思想解题?	(215)

1. 数轴上的点都表示有理数吗？

数轴是规定了正方向、原点和单位长度的一条直线。有了数轴，所有的有理数都可以用数轴上的点来表示。如图 1：

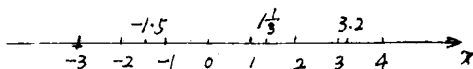


图 1-1

但是反过来讲，数轴上的点表示的就不都是有理数。如图 2：

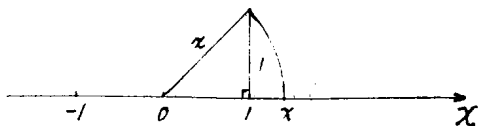


图 1-2

数轴上表示数 x 的点离开原点的距离是以 1 个单位长为边长的等腰直角三角形的斜边的长度，它满足的关系式是 $x^2 = 1^2 + 1^2$ ，即 $x^2 = 2$ ， x 不是有理数。还有许多不是有理数的数（称做无理数），都可以在数轴上找到一个确定的点与之对应，所以数轴上的点表示的不都是有理数。（崔文玲）

2. 负号与减号相同吗？

1. 负号与减号的区别：

负号与减号使用的是同一符号“-”号，但表示的意义不同。负号是性质符号，放在小学学过的算术数（零除外）的前面，表示该数是一个负数，如 -2 ， $-1\frac{1}{2}$ ， $-3.5\cdots$ 。而减号是运算符号，处在两数之间，如 $(+3) - (-2)$ ，表示+

3 减去 -2。但是要注意，在中学数学里，前面带有负号的数不一定是负数。在一个数的前面放上一个“-”号则变成了这个数的相反数。如 -3 这个数，我们既可以理解为它是一个负数，又可以理解为它是 3 的相反数，这种理解就不会出现“-a 是负数”的错误了。-a 不一定是负数，它表示的是 a 的相反数，当 a 是正数时，它的相反数 -a 表示的是一个负数，如 $a=5$ 时， $-a=-5$ ；当 a 是负数时，它的相反数 -a 表示的是一个正数，如 $a=-5$ 时， $-a=-(-5)=+5$ ；当 a 是零时，-a 表示零的相反数，还是零。

2. 负号与减号的联系

性质符号和运算符号表示的意义虽不同，但在一定条件下二者可以统一。如 $3-5$ ，可以理解为减号，读作 +3 减去 +5，也可以理解为负号，读作 +3 与 -5 的和。若当减号则不再当负号，若当负号则不该再当减号，若读作“正 3 减负 5”就错了。

为什么 $(+3) - (-5)$ 等于 $3+5$ 呢？我们知道，有了相反数的概念之后，有理数的减法可以转化成加法。减法法则是“减去一个数等于加上这个数的相反数”。因此在有理数运算中加减法均可以统一成加法，在统一成加法的基础上，省略去加号，变成省略加号的代数式和。如 $(+3) - (-5)$ ，先依减法法则转化成 $(+3) + (+5)$ ，再省略去加号变成省略加号的代数式和 $3+5$ ，从而有 $(+3) - (-5) = 3+5$ ，成立。又如 $(+3) - (-5)$ ，省略加号后变成了 $3-5$ ，这时若读成 3 减去 5 时发现不够减，怎么办？换个角度理解，读作 3 与 -5 的和，依有理数加法法则进行运算。法则是“异号两数相加，取绝对值大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值”。从而有 $3-5=3+(-5)=- (5-3)=-2$ 。

3. 什么是相反数？零的特征与作用是什么？

“只有符号不同的两个数叫做互为相反数，规定零的相反数还是零”。从定义看，相反数是成对出现的，它不能单独存在。每个正数都对应着一个负数，作为这个正数的相反数，每个负数都对应着一个正数，作为这个负数的相反数，这两个数互为相反数。此处的相反可以理解成“符号相反，数字相同”。在数轴上互为相反数的两个点位于原点两旁且到原点的距离相等。从运算上看互为相反数的两个数相加和为零。反之，两个数的和为零，则这两个数互为相反数，故有下述情况成立： a 、 b 互为相反数 $\Leftrightarrow a+b=0$ 。

在实数中“零”是一个特征明显、作用十分重要的数。首先零不再是表示没有，而是有其确定的意义。在实际生活中它是区别具有相反意义的量的中界，如温度计中的 0°C 。在代数里零是正数和负数的分界数，零既不是正数也不是负数。在十进位制的数的表示中，零起到补位作用，如 207，3.01…。一个正整数的右边添上一个零，这个数就扩大十倍；一个正纯小数的小数点后面第一个非零数字前面添上一个零，这个数就缩小十倍。在近似数的表示中，零也是一个不容忽略的数，如 2.5 和 2.50 表示的就不是同一种意义，2.5 表示精确到十分位的近似数，是介于 2.45 与 2.54 之间的数的近似值，而 2.50 表示的是精确到百分位的近似数，是介于 2.495 和 2.504 之间的数的近似值。不论是概念上还是运算上，零的特征是相当明显的。零是整数，是偶数，是合数。零大于一切负数小于一切正数，零是绝对值最小的数。零的绝对值是零，零的相反数还是零。零与任何数相加还得这个数，零与任何

数相乘，积永远是零，零除以任何一个非零数的商还是零，零的任何正数次幂都是零，零的平方根和算术平方根还是零。两数之积是零其中至少有一个是零。解高次方程中的分解降次法就是源于这个特征。如 $x(x-1)(2x+1)=0$ ，求 x 。转化为 $x=0$ 或 $x-1=0$ 或 $2x+1=0$ 求出 x 。（崔文玲）

4. 绝对值是去掉正负号的数吗？

绝对值是随正负数的引入后应运而生的一个重要的数学概念。因为正负数的引入是为了区别和表示具有相反意义的量，而在实际生活中有时又无需考虑某些量的方向或意义，如汽车的耗油量或公共汽车的票价，它们只与汽车行驶的路程有关，而与汽车行驶的方向无关，这时汽车的行程只需用正数表示即可，这个数就是“绝对值”。绝对值的概念在代数中是这样来定义的：“正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。”一个数 a 的绝对值可用 $|a|$ 来表示，根据定义则有：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

在数轴上表示一个数的点离开原点的距离就是这个数的绝对值，如数轴上表示 $+3$ 和 -3 的点到原点的距离都是三个单位长，所以有 $|+3|=3$ ， $|-3|=3$ 。

由于一个数的绝对值是不考虑赋予该数的性质或意义，所以一个正数或一个负数去掉它前面的正负号后所得的数就是原来这个数的绝对值，零的绝对值还是零。但如若笼统地说绝对值就是去掉正负号的数是不够妥当的，如 $-a$ 去掉负号后的数是 a ，而 a 不一定是一 a 的绝对值，因为 a 不一定是

正数。

有理数的绝对值就是我们小学算术中的数，换言之，小学算术里学过的数就是中学里学习的有理数中的正整数、正分数和零。绝对值的概念把中学的有理数与小学的算术数沟通起来，中学里研究有理数的运算除确定符号外，余下的绝对值运算转化成小学里学过的数的运算，因此绝对值是一个非常重要的概念，务必要理解掌握好。（崔文玲）

5. 怎样理解有理数的加法法则？

有理数可以理解为由性质符号和绝对值两个部分构成的。因而在研究有理数的运算法则时，就必须回答以下两个问题：一是运算结果的符号如何确定？二是运算结果的绝对值如何确定。

由于有理数可按

$$\text{有理数} \begin{cases} \text{正（有理）数} \\ 0 \\ \text{负（有理）数} \end{cases}$$

分类，所以研究两个有理数相加，可分以下几种情况：

1. 两个正数相加，
 2. 两个负数相加，
 3. 一个正数与一个负数相加，
 4. 一个负数与一个正数相加，
 5. 一个正数与零相加，
 6. 一个负数与零相加，
- 即同号两数相加；
即异号两数相加；
即一个数与零相加。

下面，以在一条东西向的直线上两次运动的结果为例，说明有理数加法法则（这里规定向东为正，向西为负）。

- （1）向东走 3 米，再向东走 2 米，结果两次一共向东走

了5米。这是求两次向东运动的合成的问题，可用加法来解答：

$$(+3) + (+2) = +5.$$

这个运算用数轴表式如下图：

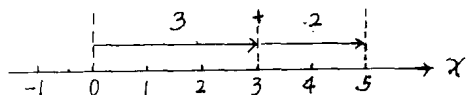


图 5-1

(2) 向西走3米（即向东走-3米），再向西走2米（即向东走-2米），结果一共向西走了5米（即向东走-5米）。用加法解答是：

$$(-3) + (-2) = -5.$$

这个运算用数轴表示如下图：

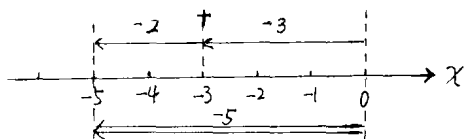


图 5-2

上面两个例子是求同向走的和，结果是方向不变，两次所走的路程相加。从算式上看，就是同号（符号相同）两数相加，结果符号不变，绝对值相加。这里的“同号两数”即具有相同意义的两个量。

(3) 向东走3米，再向西走+2米（即向东走-2米）。结合图 5-3 可知，结果两次一共向东走了1米。用加法解答是：

$$(+3) + (-2) = +1. \quad (\text{见图 5-3})$$

(4) 向东走2米，再向西走3米（即向东走-3米），结

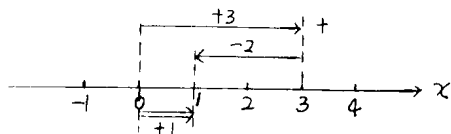


图 5-3

由图 5-4 可知，结果两次一共向西走了 1 米（即向东走了一米）。用加法解答是：

$$(-2) + (-3) = -1。$$

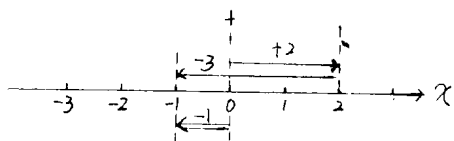


图 5-4

这两个例子是求异向两次行走的和，也就是绝对值不等的异号两数相加，和的符号怎样确定？和的绝对值是怎样确定的？显然，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值。这里的“异号两数”即具有相反意义的两个量。

如果是特殊的异号两数，即两数互为相反数，相加的和是什么？例如，向东走 5 米，再向西走 5 米，结合图 5-5 可知，结果两次一共向东走了 0 米。

$$(+5) + (-5) = 0。$$

这就是互为相反数的两个数，相加得零。

(5) 向东走 5 米，再向西走 0 米，结果两次一共向东走了 5 米。