普通高等教育“十五”国家级规划教材配套辅导

高等数学 第五版 [上 册]

同步辅导与习题精解

胡新启 湛少锋 主编
众邦考试教育研究所 策划

同济大学应用数学系主编《高等数学》第五版同步辅导

众高校名师倾力推荐
高等数学教学新突破

- 课堂同步学习与考研复习并重
- 数十载教学生涯潜心积累
- 最行之有效的学习方法
- 最宝贵的试题资料

中国科学技术大学出版社

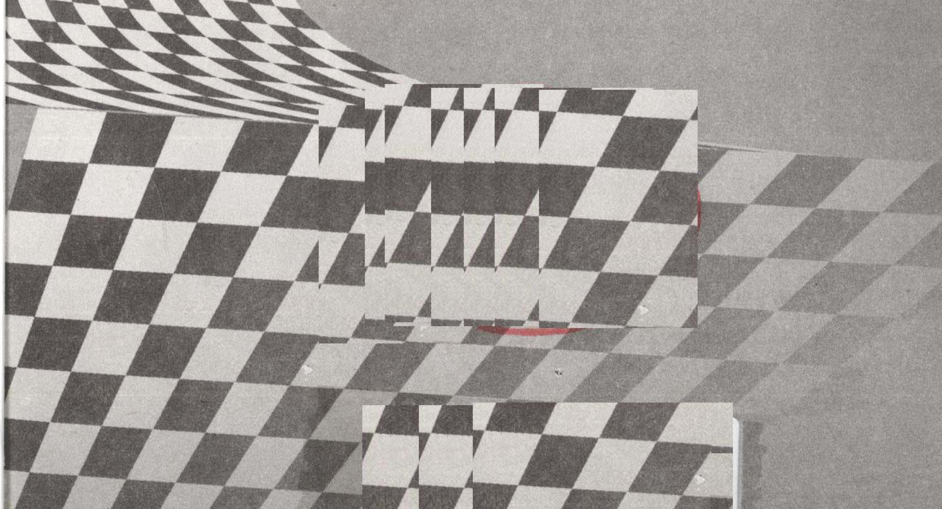
普通高等教育“十五”国家级规划教材配套辅导

高等数学 第五版 [上 册]

同步辅导与习题精解

胡新启 湛少锋 主编
众邦考试教育研究所 策划

同济大学应用数学系主编《高等数学》第五版同步辅导



中国科学技术大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步辅导与习题精解/胡新启，湛少锋主编．—合肥：中国科学技术大学出版社，2006．8

ISBN 7-312-02007-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①胡…②湛…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 125432 号

出版发行：中国科学技术大学出版社
（安徽省合肥市金寨路 96 号，230026）
印　　刷：中国科学技术大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：850 mm×1168 mm/32
印　　张：23
版　　次：2006 年 10 月第 1 版
印　　次：2006 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1—5 000 册
定　　价：24.00 元（上下册）

前　言

高等数学是高等学校工科各专业最重要的基础理论课之一，学生们对它掌握的好坏，不仅直接影响到后续课程的学习，而且会对今后工作产生重要影响。通过本课程的教学，应使学生理解高等数学的基本概念，掌握基本理论和方法，提高抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合运用等方面的能力。

本书是根据课程的基本要求，面对广大学生编写的一本辅导教材，与同济大学《高等数学》第5版教材同步，力求使学生学懂、学透、学精。希望本书能帮助读者加深对高等数学基本内容的理解，进而掌握解题的方法、技巧，以达到复习巩固教学内容，培养分析问题和解决问题的能力的目的。

本书集合了编者数十年的教学实践与经验。初稿曾多次在工科专业的学生中结合教学使用，受到学生的欢迎，对提高教学质量，培养学生能力，起到了非常显著的作用。

全书共分12章：第一章函数与极限，第二章导数与微分，第三章微分中值定理与导数的应用，第四章不定积分，第五章定积分，第六章定积分的应用，第七章空间解析几何与向量代数，第八章多元函数微分法及其应用，第九章重积分，第十章曲线积分与曲面积分，第十一章无穷级数，第十二章微分方程。书中每一章按如下部分展开：

1. 学习要求与内容提要。该部分根据大纲要求对概念、定理和公式等进行了简明扼要的叙述、归纳，并总结了每章的解题方法与疑难点。编写该部分的目的是使读者明确每章的知识点及大纲要求。

2. 典型例题分析。列举了相关知识点的大量、较为全面的例题，以基本概念、基本理论、基本方法为重点，难度由浅入深，归纳总结了各种题型的解题方法与技巧，开阔读者解题思路，使读者能对重点、难点等疑难问题

进行复习，全面、系统地掌握所学知识。

3. 考研真题分析。精选了近几年来不同题型的考研真题，并从多侧面、不同角度用多种解法进行讲解，注重对基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养。也使低年级读者了解考研题的难度与方向，从而开发自身潜质，为考研早作准备。

4. 课后习题解答。将教材章节后习题及总习题一一作了解答，配合学生课堂同步学习与参考。

最后给出了一些综合训练题，选取了一些综合性的题目，大部分题都涉及到多个知识点，多种解题技巧，以加深对所学知识的综合运用能力的锻炼。

本书可作为高等学校工科、理科各专业本科生高等数学课程的同步辅导教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生同学的复习参考书。

作者在编写本书时，参考了众多的教材、教学资料和考研辅导书，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在这里向有关的作者表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中错误之处，敬请读者与同仁不吝指教。读者若有意见或问题，请与作者联系，联系方式：huxinqifox@163.com

胡新启　湛少锋

2006.8

目　　录

上　册

第一章 函数与极限

函数、极限、连续等基本概念及运算,是学习高等数学的基础.也是从初等数学过渡到高等数学的一座桥梁,函数、极限、连续等基本概念及其运算掌握的好坏,直接影响着整个高等数学课程的学习,因为极限理论是整个微积分理论的基础及基本工具,贯穿于整个课程之中.因此必须把这部分的概念理解清楚并牢牢掌握基本运算.

学习要求与内容提要

学习要求

1. 理解函数的概念,了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念,了解反函数、复合函数的概念,会分析复合函数的复合结构,会建立简单实际问题的函数模型.
2. 了解极限的描述性定义,掌握极限的四则运算法则,会用两个重要极限公式求极限.
3. 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系和性质,会利用等价无穷小求极限.
4. 理解函数在一点连续的概念,知道间断点的分类,会用函数的连续性求极限.
5. 了解初等函数的连续性及连续函数在闭区间上的性质(最大值和最小值定理、根的存在定理、介值定理).

重点　极限的求法,两个重要极限,函数在一点连续的概念;函数、复合函数和初等函数的概念,会求函数的定义域.

难点　分段函数的概念,建立简单实际问题的函数模型;间断点的分类,分段函数在分段点的连续性.

内容提要

1 函数的概念与主要结论

设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x\in D$,

变量 y 按照一定法则总有惟一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当自变量 x 取数值 x_0 时，因变量 y 按照法则 f 所取定的数值称为函数$y=f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当自变量 x 取遍定义域D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$的定义域 D 是自变量 x 的取值范围，而函数值 y 又是由对应规则 f 来确定的，所以函数实质上是由其定义域 D 和对应规则 f 所确定的，因此通常称函数的定义域和对应规则为函数的两个要素. 也就是说，只要两个函数的定义域相同，对应规则也相同，就称这两个函数为相同的函数，与变量用什么符号表示无关，如 $y=|x|$与 $z=\sqrt{v^2}$，就是相同的函数.

函数的三种表示方法　图像法；表格法；公式法

在用公式法表示函数时经常遇到几种情况：分段函数，用参数方程确定的函数，隐函数.

基本初等函数　六种基本初等函数为：常函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数

反函数、复合函数和初等函数

(1)反函数：对于函数 $y=f(x)$，如果每一个 $y\in f(D)$，都可以通过 $y=f(x)$惟一确定一个 $x\in D(f)$，这样得到的以 y 为自变量，x 为因变量的函数关系，记作：$x=f^{-1}(y)$，习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，即反函数记为：$y=f^{-1}(x)$，且 $f[f^{-1}(x)]=x$，函数 $y=f(x)$与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2)复合函数：如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in D(f)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D(\varphi)$，且 $\varphi(D)\subseteq D(f)$，则称 y 是 x 的复合函数，记为：$y=f(\varphi(x))$，$x\in D(\varphi)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

(3)基本初等函数：通常把幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数、双曲函数、反双曲函数等函数称为基本初等函数.

(4)初等函数：由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次复合，且能用一个分析式表示的函数，称为初等函数.

函数的四种特性　有界性，单调性，奇偶性，周期性

函数的主要结论

单调性：①两个单调增加(或单调减少)函数之和是单调增加(或单调

减少）函数. ②两个正的单调增加（或单调减少）函数之积是单调增加（或单调减少）函数. ③单调增加函数（或单调减少函数）$y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$亦为单调增加函数（或单调减少函数）.

奇偶性：①两个偶（或奇）函数之代数和是偶（或奇）函数. ②两个偶（或奇）函数之积是偶函数. 偶函数与奇函数之积是奇函数.

周期性：如果 $f(x)$是一周期为 ω 的周期函数，则 $f(ax+b)(a>0)$是一周期为$\dfrac{\omega}{a}$的周期函数.

2 极限的概念与主要结论

数列极限的定义　设$\{x_n\}$为一数列，A 是一常数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛，且 A 称为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的极限，记为：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

数列$\{x_n\}$不收敛时，则称数列$\{x_n\}$发散. 数列发散包含三种情形：

①$\forall M>0$，总$\exists$自然数 N，使得 $n\geqslant N$ 时恒有 $x_n>M$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$；

②$\forall M<0$，总$\exists$自然数 N，使得 $n\geqslant N$ 时恒有 $x_n<M$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$；

③$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不确定.

函数极限的定义

(1)$x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限　若$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时收敛，且 A 称为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记为：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 特别若$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$($x<-X$)时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$($x\to-\infty$)时收敛，且 A 称为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$($x\to-\infty$)时的极限，记为：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$). 函数 $f(x)$不收敛时，则称函数$f(x)$发散.

函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时发散包括以下情形：

①$\forall M>0$，总$\exists$实数 $X>0$，使得$|x|\geqslant X$($x>X$)时恒有 $f(x)>M$，即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$($\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$)

②$\forall M<0$，总$\exists$实数 $X>0$，使得$|x|\geqslant X$($x<-X$)时恒有 $f(x)<M$，即$\lim\limits_{x\to-\infty}x_n=-\infty$

③$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不确定.

(2)$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限　设 $y=f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义，A 是一常数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时收敛，且 A 称为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，

记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 特别若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$（$x_0<x<x_0+\delta$）时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$（$x\to x_0^+$）时收敛，且 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$（$x\to x_0^+$）时的极限，记为：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$）. 而 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$）称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左（右）极限. 函数 $f(x)$ 不收敛时，则称函数 $f(x)$ 发散.

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时发散包括以下情形：

①$\forall M>0$，总 $\exists\delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$ 或 $x_0<x<x_0+\delta$）时恒有 $|f(x)-A|>M$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq A$）.

②$\forall M>0$，总 $\exists\delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$ 或 $x_0<x<x_0+\delta$）时恒有 $|f(x)|>M$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$）.

③$\forall M>0$，总 $\exists\delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$ 或 $x_0<x<x_0+\delta$）时恒有 $f(x)>M$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$）.

④$\forall M<0$，总 $\exists\delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$ 或 $x_0<x<x_0+\delta$）时恒有 $f(x)<M$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$）.

⑤当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不惟一.

无穷大、无穷小

在自变量的某个变化过程中，以零为极限的变量称为该极限过程中的无穷小量，简称无穷小. 即：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 是当 $x\to\infty$ 或 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 应该注意的是：一般说来，无穷小表达的是变量的变化状态，而不是变量的大小，一个变量无论多么小，都不能是无穷小量，数零是惟一可作为无穷小的常数.

在自变量的某个变化过程中，绝对值可以无限增大的变量称为这个变化过程中的无穷大量，简称无穷大. 即：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 是当 $x\to\infty$ 或 $x\to x_0$ 时的无穷大量. 应该注意的是：无穷大量是极限不存在的一种情形. 无穷大表达的也是变量的变化状态，而不是变量的大小，一个变量无论多么大，都不能是无穷大量.

无穷小量的比较　设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，

①若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$（$k\neq0$，$k\neq\pm\infty$），则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小；

②若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=0$,则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小($g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小).记为:$f(x)=o(g(x))$;

③若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等阶无穷小.记为:$f(x)\sim g(x)$;

④若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^k}=0$ 则记为:$f(x)=o((x-a)^k)$,这时称 $f(x)$ 为 $x\to a$ 时,是比 $x-a$ 的 k 阶高的无穷小.

数列极限的性质

①(惟一性)收敛数列的极限必惟一.

②(有界性)收敛数列的极限必有界.

③(保号性)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A,A\neq0$,则必存在正整数 N,当 $n>N$ 时,x_n 与 A 同号.

④(保序性)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$,且存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $x_n\leqslant y_n$,则 $A\leqslant B$.

⑤(极限的有理运算)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A\pm B$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n=AB$;

若 $B\neq0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}=\frac{A}{B}$.

数列收敛的几个判别法

①柯西准则　数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是:$\forall\varepsilon>0$,总存在自然数 N,对一切 $n,m>N$,恒有不等式 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

②两边夹法则　若数列 $\{x_n\}$ 对一切的 n 满足条件 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

③单调有界准则　单调有界数列必有极限.

④$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 收敛的充要条件是数列 $\{x_n\}$ 的每一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 均以 A 为极限(即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=A$).

⑤有界实数列必有收敛的子列.

几个常用的数列的极限

①$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$;②$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$;③$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

函数极限的性质

函数极限同样有：惟一性、有界性、保号性、保序性以及极限的有理运算. 这里略去.

函数极限存在的判别法　($\lim$ 表示 $x\to x_0$ 或∞)

①函数极限存在的充要条件是其左右极限存在且相等.

②归并原理：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\exists\,x_n\neq x_0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

③两边夹法则：若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim g(x)=A,\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

④极限与无穷小量的关系定理：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\exists\,\alpha,\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，且 $f(x)=A+\alpha$.

⑤无穷大与无穷小量的关系定理：

$$\lim f(x)=0\Leftrightarrow\lim\frac{1}{f(x)}=\infty.$$

⑥单侧极限与极限的关系定理：

- $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

⑦有关无穷小的定理：

- 有限个无穷小量之和是无穷小量.
- 有界量与无穷小量之积是无穷小量.
- 常数与无穷小两之积是无穷小量.
- 有限个无穷小量之积是无穷小量.
- 无穷小的替换定理：设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x),\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}=\dfrac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}$.

⑧极限的四则运算法则：设 $\lim f(x)=A$ 及 $\lim g(x)=B$ 都存在，则

- $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$；
- $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA$　(C 为任意常数)；
- $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$　($\lim g(x)=B\neq0$).

⑨重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

⑩常用的等价无穷小：$x\to0$ 时

$\sin x \sim x$；$\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}$；$\tan x \sim x$；$(1+x)^a-1 \sim ax$；$a^x \sim 1+x\ln a$；$\arcsin x \sim x$；$\arctan x \sim x$.

3 函数的连续性与主要结论

函数在一点连续的两个等价的定义

①设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

②若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一点邻域内有定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 即当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 时，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续. 并称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

左右连续的概念　若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

由此可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足以下三个条件：

①函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

③这个极限等于函数值 $f(x_0)$.

函数不连续的点称为间断点. 间断点有以下情形：

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但此极限值不等于 $f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在 x_0 处没定义. 则称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点；

② $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，但不相等，则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点；

①、②统称为第一类间断点.

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to x_0^-)\\(x\to x_0^+)}}f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

④ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，且在 x_0 的邻域内，$f(x)$ 能无数次取 A、B 两个数之间的一切值，则称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

③、④统称为第二类间断点.

函数在区间上连续的概念

在区间上每一点都连续的函数，称为在该区间上的连续函数，或者说

函数在该区间上连续，该区间也称为函数的连续区间. 如果连续区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

函数连续的主要结论

①函数在一点连续的充分必要条件：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

②如果 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 点连续，则

$$f(x)\pm g(x),f(x)g(x),\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)\text{在 } x_0 \text{ 点连续.}$$

③如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续，$g(u)$ 在 $u_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续.

④若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 严格单调且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$（或 $[f(b),f(a)]$）上连续.

⑤初等函数的连续性定理：基本初等函数在其定义域内是连续的. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

⑥闭区间上连续函数的性质：

- 闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数必有最大值和最小值.
- 闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数必有界.
- 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且有 $f(a)<f(b)$（$f(a)>f(b)$），对于 $f(a)<c<f(b)$ 的任意实数，必存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=c$（闭区间上连续的函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值）.
- 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必有 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$.

方法与疑难解析

1 方法解析

1. 求函数定义域的方法

函数由解析式给出时，其定义域是使解析式有意义的一切函数. 为此求函数的定义域时应遵守以下原则：

（Ⅰ）在式子中分母不能为零；

（Ⅱ）在偶次根式内非负；

（Ⅲ）在对数中真数大于零；

（Ⅳ）反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$；

（Ⅴ）两函数和（差）的定义域，应是两函数定义域的公共部分；

（Ⅵ）分段函数的定义域是各段定义域的并集；

(Ⅶ)求复杂函数的定义域，是将复杂函数分解为若干个基本初等函数，并分别讨论它们的定义域与值域，列出不等式组，求出它们之交，就得其定义域. 值得注意的是，分段函数的定义域是各段函数定义域之并.

2. 将复合函数分解成基本初等函数或简单函数的方法

(Ⅰ)复合函数的复合过程是由里到外，函数套函数而成的. 分解复合函数，是采取由外到内层层分解的办法. 从而拆成若干基本初等函数或基本初等函数的四则运算.

(Ⅱ)基本初等函数经有限次四则运算所得到的函数称为简单函数.

3. 建立实际问题的函数模型的方法

运用数学工具解决实际问题时，通常要先找出变量间的函数关系，用数学式子表示出来，然后再进行分析和计算.

建立函数模型的具体步骤可为:

(1)分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示.

(2)根据所给条件，运用数学、物理、经济及其他知识，确定等量关系.

(3)具体写出解析式 $y=f(x)$，并指明其定义域.

4. 求极限的基本方法

(1)利用函数的连续性求极限;

(2)利用四则运算法则求极限;

(3)利用两个重要极限求极限;

(4)利用无穷小替换定理求极限;

(5)利用分子、分母消去共同的非零公因子求$\frac{0}{0}$形式的极限;

(6)利用分子、分母同除以自变量的最高次幂求$\frac{\infty}{\infty}$形式的极限;

(7)利用连续函数的函数符号与极限符号可交换次序的特性求极限;

(8)利用“无穷小与有界函数之积仍为无穷小量”求极限;

(9)用极限的定义证明极限;

(10)利用无穷小与无穷大的互倒关系求极限;

(11)利用单调有界准则求递归定义数列的极限;

(12)利用夹逼法则求极限.

以后还将学到:

(13)利用洛必达法则求极限;

(14)利用定积分的定义求极限;

(15)利用级数收敛的必要条件求极限.

2 疑难解析

本章内容统称为极限论(或分析引论),包括三个部分,函数、极限与连续.极限知识是微积分学的基础,也是研究导数、各种积分、级数等内容的基本工具,既是教学的重点,又是难点.

【问题 1】 分段函数是不是初等函数?

解析:分段函数一般不是初等函数,不同区间上其解析式不相同,即它不能用一个解析式来表示,所以说它不是初等函数.但是,也有特殊的分段函数,如 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$,它与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数,故 $f(x)$ 可以用一个解析式表示,所以 $f(x)$ 可以称为初等函数.

【问题 2】 如何利用极限定义证明极限?

解析:用极限定义证明极限,就方法而言,一般是采用先分析后综合的方法.仅以证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 为例,证明步骤如下:

(1)将绝对值 $|f(x)-A|$ 进行不等式的放大,在放大过程中保留分子中的 $|x-x_0|$ 因子,而把分子分母中其余的因子均用常数来替换,则不等式最后变为 $|f(x)-A|\leqslant l|x-x_0|$(其中 l 为正常数).

(2) $\forall\varepsilon>0$,要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,只须 $l|x-x_0|<\varepsilon$,由此分析出 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{l}=\delta(\varepsilon)$.

(3)取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta(\varepsilon)\}$,其中 $\delta_0>0$ 为使不等式 $|f(x)-A|\leqslant l|x-x_0|$ 成立的条件(例如 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 等).

(4)当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(5)故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

【问题 3】 两个无穷大的和仍为无穷大吗?试举例说明.

解析:不一定.如:$\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量,$1-\dfrac{1}{x}$ 也是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量,但其和为 1,不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量.

【问题 4】 无穷大量与无界量的区别和联系是什么?

解析:区别:(1)无穷大量是在某变化过程中的一个变量:$\forall M>0$,$\exists$ 某时刻,从此时刻后,有 $|f(x)|>M$,称 $f(x)$ 在该过程中是无穷大量.即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|>M$.

(2)无界量是针对某数集而言:$\forall M>0$,$\exists x_0\in X$,使得 $|f(x_0)|>M$,称 $f(x)$ 在数集 X 上无界.即 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内无界 $\Leftrightarrow\forall M>0$,$\exists x_1\in$