

国家教育部人文社会科学重点研究基地山东大学易学与中国古代哲学研究中心

国家“985工程”山东大学易学与中国传统文化研究哲学社会科学创新基地

山东大学儒学高等研究院

中国周易学会

重大项目

1900~2009

百年国学研究文献大系 一

百年易学



菁华集成
初编

《周易》与自然科学 贰

刘大钧◎总主编

熹平石经 东汉·蔡邕

上海图书馆
上海科学技术文献出版社

国家教育部人文社会科学重点研究基地山东大学易学与中国古代哲学研究中心
国家“985工程”山东大学易学与中国传统文化研究哲学社会科学创新基地 重大项目
山东大学儒学高等研究院
中国周易学会

1900~2009

百年国学研究文献大系一

百年易学



菁华集成

初编

《周易》与自然科学 贰

刘大钧◎总主编

施维 策划



熹平石经 东汉·蔡邕

上海图书馆
上海科学技术文献出版社

总 目

前 言/刘大钧 1

编辑缘起及整理说明/施 维 13

《周易》经传_{全五册}

出土易学文献_{全四册}

《周易》象数_{全二册}

《周易》哲学_{全三册}

易学史_{全七册}

《周易》与中国文化_{全四册}

《周易》与自然科学_{全二册}

《周易》与术数_{全三册}

目 录

通 论

论哲学与科学·····	[中国台湾] 廖维藩 (3)
《周易》科学思想 ·····	[中国台湾] 陈泮藻 (10)
阴阳五行学说对中国传统科学理论的影响 ·····	巫白慧 王 镛 (26)
《周易》是用符号文字表述的古代科学思想体系·····	刘蕙孙 (32)
科学易 ·····	潘雨廷 (38)
《周易》“尚象制器”说与传统科技 ·····	贺圣迪 (47)
易图与自然科学 ·····	陈启智 (53)
《周易》热与“科学易” ·····	李 申 (66)
大哉方圆：易学对中国古代科学的影响 ·····	董光璧 (73)
《周易》的科学方法论思想及其现代意义·····	周瀚光 (84)
周易与科学：一个容易神化的议题 ·····	刘立夫 (89)
李约瑟论《周易》对科学的影响 ·····	席泽宗 (97)
《周易》象数与中国古代科学技术的关系略论·····	孔令宏 (101)

《周易》与数学、物理、化学

莱布尼兹的周易学

——与部佛往复讨论的几封信 ·····	[日] 五来欣造 (刘百闵译) (111)
莱布尼兹与中国 ·····	[美] Thatcher Deane (杜泰池) (121)
先天图与二进制巧合的秘密 ·····	施忠连 (127)
对《先天图与二进制巧合的秘密》一文质疑 ·····	傅寿宗 (132)
《易经》中之八卦循环新论·····	沈持衡 (136)
中国古代算筹二进制数表和《周易》 ·····	张吉良 (141)

《易经》中的控制论	[匈] Lovas Bela (林忠军译) (148)
用《易经》阴阳象数看莱布尼茨的逻辑数学化思想	罗翊重 (159)
易经先天秩序和二进制数学	雷焕章 (167)
关于莱布尼茨的一个误传与他对中国易图的解释和猜想	孙小礼 (172)
周易阴阳符号与二进制算术符号比较	孟 华 (183)
莱布尼茨的二进制与《易经》	李存山 (189)
莱布尼茨误读《先天图》	阎 韬 (197)
先天易的数学基础初探	
——试论先天卦序与二进位制	柯资能 (207)
莱布尼茨发明二进制前没有见过先天图吗	
——对欧洲现存 17 世纪中西交流文献的考证	胡 阳 李长铎 (220)
易卦数理形下解：先天卦序及自然数序列之数学证明	
——兼论现行易卦二进制解释与传统易学思想之抵牾及其化解	
.....	王俊龙 瞿永玲 (226)
从“二进制”看《周易》与现代科学的关系	李 申 (238)
“三玄”数理基干探微	[中国台湾] 蔡麟笔 (241)
九宫算原理及高阶幻方的解	邓宇镌 (263)
追念易学家潘谷神先生	洪毅然 (272)
太极代数	谭晓春 (274)
最小偶数阶幻方的解	沈文基 (284)
易群研究	欧阳维诚 (294)
洛书与哥德巴赫猜想	傅熙如 (303)
阴阳失衡现象刍议和成卦多人因素假说	邓先实 (308)
易变数学引论	王俊龙 (310)
对古易图全息系统层次模型的认识	宇 亮 (319)
易图的内涵格解释	张清宇 (323)
论易学与数学的关系	欧阳维诚 (332)
《易经》卦象符号的拓扑群结构	曹红军 厉树忠 刘亚楠 (344)
从古老的《周易》到最新的 IMO 试题	欧阳维诚 (349)
易矩阵与 Hadamard 矩阵	王俊龙 (357)
当染说	傅熙如 (364)
试论《易经》先天序的数学描述	徐百兴 (369)
阴阳五行群域简论	丁润生 (382)
《易经》与“易算”	郭俊义 (388)
《洛书》数字空间观照下的奇点和宇宙创生问题	王介南 (393)
伏羲卦图中的布尔代数	侯维民 (406)
洛书式 SU (5) 大统一数学模型的提出与论证	
—— (1) SU (3) 夸克模型的洛书·八卦解	王介南 (412)

易理中道与中值定理	丁润生 (423)
用易之乾卦来表达的奇素数集	傅熙如 (427)
易卦与趣味数学	欧阳维诚 (433)
三天八卦图与布尔代数	侯维民 (439)
大易深处是科学	
——易卦与区组设计研究	王俊龙 (444)
四阶完美幻方中的易理思想	高治源 (450)
N=8 推广超引力模型的洛书解	王介南 (455)
完备的八卦演绎系统简论	王俊龙 (466)
论《周易》对传统数学机械化思想的影响	傅海伦 (469)
试论《周易》对中国古代数学模式化道路形成及发展的影响	
——兼谈李约瑟之谜	欧阳维诚 (481)
五阶幻方与易数系统	高治源 (492)
先天八卦科学内涵初探	谭必先 (501)
论《周易》对中国古代数学思维模式的影响	王汝发 陈建兰 (506)
《周易》对中国古代数学的影响	乐爱国 (512)
关于一个演易定理的数学证明	王俊龙 (518)
“易卦”的序结构数学模型在对策理论中的应用	管小思 (527)
《易经》与量子力学的形而上学	
..... [美] Dr. Richard AO Cconnell (王俊译) (544)	
玻尔“并协原理”与《八卦太极图》	李仕澂 (547)
易理在现代科学中的应用	谭晓春 (556)
《周易》与粒子物理学	申 斌 (560)
试析薛学潜《易与物质波量子力学》中的谬误	叶福翔 (570)
“双波包”与易哲学	
——关于量子力学的一种本体论诠释	
..... [美] Richard A. O'Connell (康灵童) (574)	
周易的符号结构与物质的元素结构	
——兼谈对辩证思维智能机的启示	李 廉 (581)
元素周期八卦表	栾任之 王景祜 (588)
《周易》与现代数学、物理学中的“三论”	申 斌 (602)

《周易》与天文历法

五大行星命名不本于地支而本于观测说

——评《阴阳五行思想与〈周易〉》	刘操南 (613)
关于《阴阳五行思想与〈周易〉》的补充说明	黎子耀 (619)

《周易》乾卦六龙新解	[美] 夏含夷 (623)
论易数与古天文历法学	赵庄愚 (629)
“太极(阴、阳)——科学灯塔”初揭	朱灿生 (635)
科学易	赵定理 (648)
乾卦的“六龙季”太阳历	秦广忱 (655)
律历与《易经》	[泰] 郑彝元 (672)
《周易》新论	邓球柏 (676)
《周易》星象通考(一)	乌恩溥 (684)
《周易》星象通考(二)	乌恩溥 (698)
乾卦六龙的天文科学含义新解	宋会群 (713)
《周髀》“周公与商高对话篇”、“荣方与陈子对话篇”与《易·系辞》	萧汉明 (725)
略论《周易》对中国古代历法的影响 ——兼与李申先生商榷	乐爱国 (734)

其 他

遗传密码表与《易经》	王文清 周 成 刘 枫 李凌云 李 云 (743)
遗传算法与易算算法	李树菁 (751)
什么是太极?	[中国台湾] 姬策策 (759)
河图的科学功用	[中国台湾] 黎凯旋 (763)
《周易》与脑科学 ——试论脑功能形态构筑的太极、八卦模式	姚志彬 (774)
论《伏羲六十四卦方图》与黄泛平原土壤剖面之契合	吴世彩 王代春 (781)

试论《易经》先天序的数学描述

徐百兴*

《易经》是我国灿烂的古代文化宝库中的文化瑰宝。数千年来,《易经》流传于中华大地,经久不衰,创造了人类文化史上的奇迹,堪称我源远流长的中华文化的活水源头。整部《易经》是一座极为神秘的殿堂,其中充满了许多不为现代科学所理解的谜。比如说:《易经》是怎样形成的?它是否真的有预测功能?如果它有预测功能的话,其预测机制如何?可否对其预测机制进行数学模拟?……对于诸如此类举不胜举的问题,迄今为止,现代科学都不能作出令人满意的合理解释。对于《易经》的预测功能,虽然目前学术界还有争议,但笔者认为:这个问题可以像前段时间确认和接纳特异功能的做法那样,通过科学界、哲学界和社会各方面力量的通力协作,进行权威的、严格而规范的联合测试,比较容易加以解决。至于《易经》的预测机制及其数学模拟的问题,则可能不是短期能够解决的。它有赖于现代科学的进展,这里有一个知识的积累过程,需要在相应知识基础上进行大量系统而深入细致的研究。……但这并不是说,我们不可以有所作为,在理论上做一些力所能及的工作,向着解决上述问题的最终目标步步逼近。依笔者的观点看来,《易经》的预测功能是客观存在的事实。其预测功能和机制的核心,在于那个颇为神秘的太极图所表达的涵意深刻的阴阳模型。而这个阴阳模型的关键所在,又是那个维系阴、阳于一体(太极)的S形阴阳消长变化节律。如果能对其进行数学描述,则可以展开一些工作,从现代科学的角度进行一些诠释。本文介绍笔者所作的有关《易经》先天序的数学描述部分的工作。

为叙述方便起见,在正式叙述之前需先简述一下工作所涉及的一些易理。

首先阐述蕴涵在太极图中的哲理。所谓太极图就是由两条“鱼”(俗称阴、阳鱼)首尾追逐而形成的一个动态整体。它以简炼、直观的形象表达了“道”的内涵:即一个以阴阳消长节律为基础的、宇宙万物发展、演化的太极钟(或称太极振子)的动力学控制论机制。老子在《道德经》中说:“万物负阴而抱阳,冲气以为和。”即是说:宇宙万物都是因阴、阳两极的对立、交感建设作用应运而生的阴、阳合抱体。阴、阳两极的对立、交感建设作用,遵从S形阴、阳消长变化节律——这就是太极图中那条剖判太极为阴、阳两仪的S形曲线。按照这条S形曲线,阴、阳两仪以此消彼长、物极必反、相反相成相互作用和变化,使得宇宙万物的发展、演化运动,呈现出一种无尽的、嵌套

* 徐百兴,云南财经学院经济研究所。

相生的动力演化分岔树结构：即事物的发展、演化运动，呈否定之否定的周期性变化——不断走向自己的反面，母体不断趋于消亡，同时从母体中产生出新的对立面来。这就使得事物按照一种井井有然的秩序分化和展开：“无极生太极”，“太极生两仪”，“两仪生四象，四象生八卦”，八卦相重又得到八八六十四卦……（或如老子所说：“道生一，一生二，二生三，三生万物”。）通过不断地分岔、选择进化，逐步发展为有序的万物（如图 1 所示）。

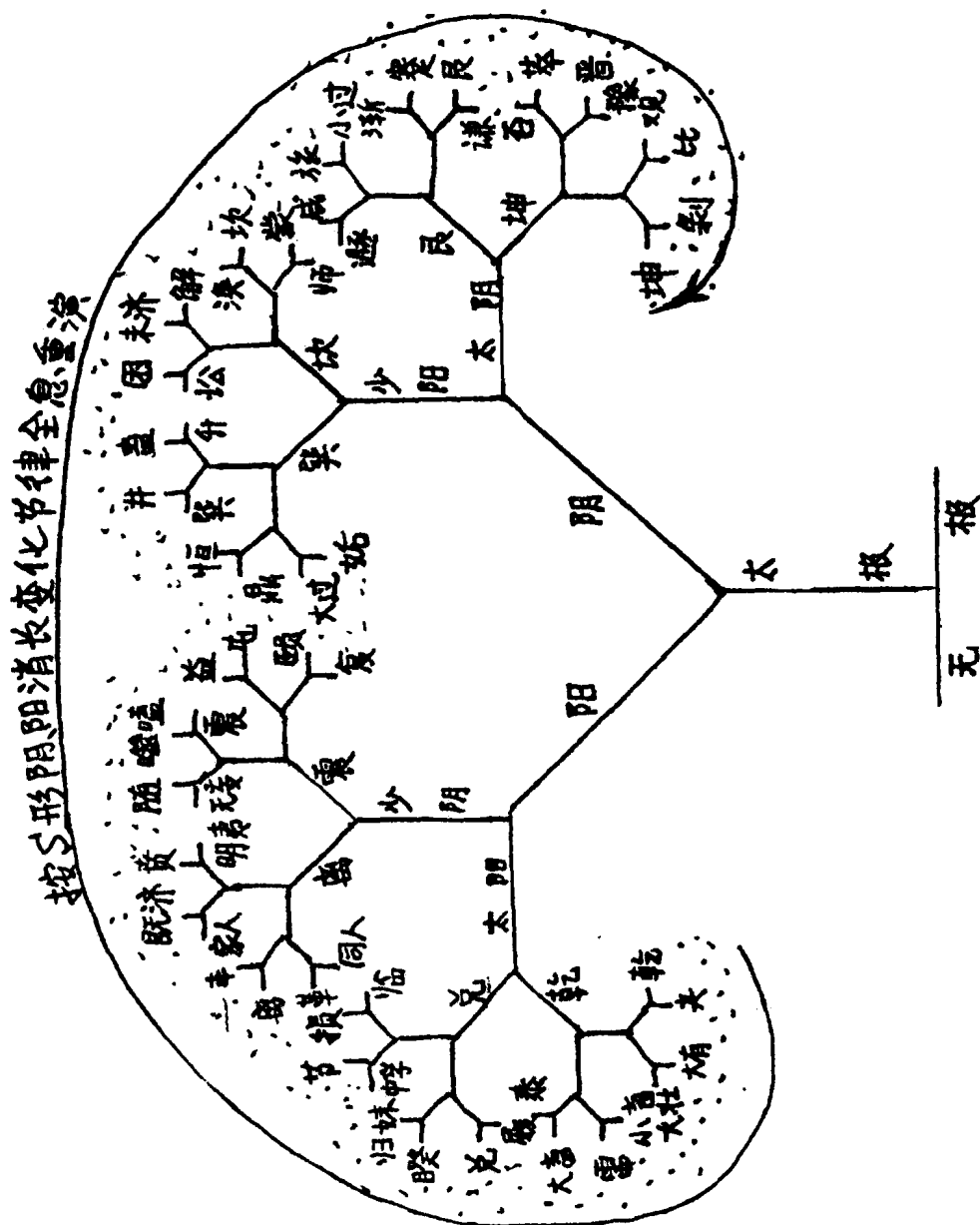


图 1 《易经》事物发展、演化模式的演化分岔树形图



(a) 伏羲先天八卦太极图 (b) 伏羲先天六十四卦方位图

图2 伏羲先天太极图

太极图有先天和后天之分。先天太极图相传为伏羲氏所创，而后天太极图则相传为周文王所演。这里仅介绍先天图。所谓先天图，就是描述天地自然造化之图。其特点是讲对待，即讲阴阳的对立统一、五行的相克之理，但对待中寓流行（即寓阴、阳相生、五行相生），显示事物发展螺旋式上升、波浪式前进的周期全息律。先天太极图又分为先天八卦太极图和六十四卦方位图，如图2的(a)、(b)所示。先天太极图以其具体的卦序来描述阴阳消长的S形曲线变化规律，这就是我们所说的先天序。在先天八卦太极图中，先天序是：乾（☰）一→兑（☱）二→离（☲）三→震（☳）四→巽（☴）五→坎（☵）六→艮（☶）七→坤（☷）八。在六十四卦方位图中，先天序则为：乾（☰）一→夬（☱）二→大有（☲）三→大壮（☳）四→小畜（☴）五→需（☵）六→大畜（☶）七→泰（☳）八→履（☱）九→兑（☱）十→睽（☲）十一→归妹（☴）十二→中孚（☴）十三→节（☵）十四→损（☶）十五→临（☳）十六→同人（☲）十七→革（☲）十八→离（☲）十九→丰（☲）二十→家人（☲）二十一→既济（☵）二十二→贲（☶）二十三→明夷（☲）二十四→无妄（☲）二十五→随（☲）二十六→噬嗑（☲）二十七→震（☳）二十八→益（☲）二十九→屯（☳）三十→颐（☶）三十一→复（☶）三十二→姤（☴）三十三→大过（☲）三十四→鼎（☲）三十五→恒（☲）三十六→巽（☴）三十七→井（☴）三十八→蛊（☴）三十九→升（☴）四十→讼（☲）四十一→困（☲）四十二→未济（☲）四十三→解（☲）四十四→涣（☴）四十五→坎（☵）四十六→蒙（☵）四十七→师（☲）四十八→遁（☲）四十九→咸（☲）五十→旅（☲）五十一→小过（☲）五十二→渐（☴）五十三→蹇（☵）五十四→艮（☶）五十五→谦（☶）五十六→否（☷）五十七→萃（☲）五十八→晋（☲）五十九→豫（☲）六十→观（☲）六十一→比（☲）六十二→剥（☲）六十三→坤（☷）六十四。前者（对于先天八卦：从乾一到震四；而对于先天六十四卦：则从乾一到复三十二）左旋，“数往者顺”，后者（对于先天八卦：从巽五到坤八；而对于先天六十四卦：则从三十三到坤六十四）右旋，“知来者逆”，呈一S形曲线式的无穷尽周期性变化。

下面我们转入讨论本文的主题,即建立《易经》先天序的数学描述。
先推导先天八卦的先天序函数。



图3 推导先天八卦先天序函数的图形

考虑图3先天八卦一个变化周期的情况。令 θ 为转角,且 $\theta \in \left[-\frac{5\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right]$ 。则显然有:

- ①当 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$ 时,
 $N_8(\theta) = 1$;
- ②当 $\theta \in \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$ 时,
 $N_8(\theta) = 2$;
- ③当 $\theta \in \left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right)$ 时,
 $N_8(\theta) = 3$;
- ④当 $\theta \in \left(\frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right)$ 时,
 $N_8(\theta) = 4$;
- ⑤当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ 时,
 $N_8(\theta) = 5$;
- ⑥当 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 时,
 $N_8(\theta) = 6$;
- ⑦当 $\theta \in \left(-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right)$ 时,
 $N_8(\theta) = 7$;
- ⑧当 $\theta \in \left(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}\right)$ 时,

$$N_8(\theta) = 8.$$

假设欲求的先天序函数为

$$N_8(\theta) = \begin{cases} [a\theta + b] & \left(\frac{3\pi}{8} < \theta < \frac{11\pi}{8}\right) \\ [a'\theta + b'] & \left(-\frac{5\pi}{8} < \theta < \frac{3\pi}{8}\right), \end{cases}$$

其中, $[x]$ 表示实数 x 的整数部分。

则在区间 $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right)$ 中, 分别取 $\theta = \frac{3\pi}{8}$, $N_8(\theta) = 1$ 及 $\theta = \frac{9\pi}{8}$, $N_8\left(\frac{9\pi}{8}\right) = 4$ 得:

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{8}a + b = 1 \\ \frac{9\pi}{8}a + b = 4, \end{cases}$$

解之得:

$$\begin{cases} a = \frac{4}{\pi} \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

故当 $\frac{3\pi}{8} < \theta < \frac{11\pi}{8}$ 时, $N_8(\theta) = \left[\frac{4}{\pi}\theta - \frac{1}{2}\right]$ 。容易验证: 当 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 1$; 当 $\theta \in \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 2$; 当 $\theta \in \left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 3$; 当 $\theta \in \left(\frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 4$ 。

类似地, 在区间 $\left(-\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ 中, 分别取 $\theta = \frac{3\pi}{8}$, $N_8\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 5$; $\theta = -\frac{3\pi}{8}$, $N_8\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = 8$, 则得:

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{8}a' + b' = 5 \\ -\frac{3\pi}{8}a' + b' = 8, \end{cases}$$

解之得:

$$\begin{cases} a' = -\frac{4}{\pi} \\ b' = \frac{13}{2}. \end{cases}$$

所以当 $-\frac{5\pi}{8} < \theta < \frac{3\pi}{8}$ 时, $N_8(\theta) = \left[-\frac{4}{\pi}\theta + \frac{13}{2}\right]$ 。容易验证: 当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 5$; 当 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 6$; 而当转角 $\theta \in \left(-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 7$; 最后当着 $\theta \in \left(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}\right)$ 时, $N_8(\theta) = 8$ 。于是得先天八卦的先天序函数:

$$N_8(\theta) = \begin{cases} \left[\frac{4}{\pi}\theta - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{3\pi}{8} < \theta < \frac{11\pi}{8} \right) \\ \left[-\frac{4}{\pi}\theta + \frac{13}{2} \right] \left(-\frac{5\pi}{8} < \theta < \frac{3\pi}{8} \right). \end{cases}$$

其次, 推导先天六十四卦的先天序函数。

考虑图 4 先天六十四卦一个变化周期的情况。令 θ 仍为转角, 且 $\theta \in \left[-\frac{33}{64}\pi, \frac{95}{64}\pi \right]$ 。则设

$$N_{64}(\theta) = \begin{cases} [a\theta + b] \left(\frac{31}{64}\pi < \theta < \frac{95}{64}\pi \right) \\ [\alpha'\theta + b'] \left(-\frac{33}{64}\pi < \theta < \frac{31}{64}\pi \right), \end{cases}$$

并取当 $\theta = \frac{31\pi}{64}$ 时, $N_{64}\left(\frac{31\pi}{64}\right) = 1$; 当 $\theta = \frac{93\pi}{64}$ 时, $N_{64}\left(\frac{93\pi}{64}\right) = 32$ 。则得:

$$\begin{cases} \frac{31\pi}{64}a + b = 1 \\ \frac{93\pi}{64}a + b = 32, \end{cases}$$

解之得:

$$\begin{aligned} a &= \frac{32}{\pi} \\ b &= -\frac{29}{2}. \end{aligned}$$

故当 $\theta \in \left(\frac{31}{64}\pi, \frac{95}{64}\pi \right)$ 时, $N_{64}(\theta) = \left[\frac{32}{\pi}\theta - \frac{29}{2} \right]$ 。又取当 $\theta = \frac{31}{64}\pi$ 时, $N_{64}\left(\frac{31}{64}\pi\right) = 33$;

而当 $\theta = -\frac{31}{64}\pi$ 时, $N_{64}\left(-\frac{31}{64}\pi\right) = 64$ 。则得:

$$\begin{cases} \frac{31}{64}\pi a' + b' = 33 \\ -\frac{31}{64}\pi a' + b' = 64, \end{cases}$$

解之得:

$$\begin{cases} a' = -\frac{32}{\pi} \\ b' = \frac{97}{2}. \end{cases}$$

故当 $\theta \in \left(-\frac{33}{64}\pi, \frac{31}{64}\pi \right)$ 时,

$$N_{64}(\theta) = \left[-\frac{32}{\pi}\theta + \frac{97}{2} \right].$$

经验算, 以上得到的函数 $N_{64}(\theta)$ 满足要求。所以先天六十四卦的先天序函数为:

$$N_{64}(\theta) = \begin{cases} \left[\frac{32}{\pi}\theta - \frac{29}{2} \right] \left(\frac{31}{64}\pi < \theta < \frac{95}{64}\pi \right) \\ \left[-\frac{32}{\pi}\theta + \frac{97}{2} \right] \left(-\frac{33}{64}\pi < \theta < \frac{31}{64}\pi \right) \end{cases}$$

一般的, 先天 2^n 卦的先天序函数仿此可推得

$$N_{2^n}(\theta) = \begin{cases} \left[\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right] \left(\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi < \theta < \frac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n}\pi \right) \\ \left[-\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta + \frac{3}{4} \times 2^n + \frac{1}{2} \right] \left(-\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\pi < \theta < \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi \right) \end{cases}$$

($n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$)

特别, 当 $n=1, 2, 3, 6$ 得:

$$N_2(\theta) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\pi}\theta + 1 \right] (0 < \theta < \pi) \\ \left[-\frac{1}{\pi}\theta + 2 \right] (-\pi < \theta < 0), \end{cases}$$

$$N_4(\theta) = \begin{cases} \left[\frac{2}{\pi}\theta + \frac{1}{2} \right] \left(\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi \right) \\ \left[-\frac{2}{\pi}\theta + \frac{7}{2} \right] \left(-\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi \right), \end{cases}$$

$$N_8(\theta) = \begin{cases} \left[\frac{4}{\pi}\theta - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{3}{8}\pi < \theta < \frac{11}{8}\pi \right) \\ \left[-\frac{4}{\pi}\theta + \frac{13}{2} \right] \left(-\frac{5}{8}\pi < \theta < \frac{3}{8}\pi \right), \end{cases}$$

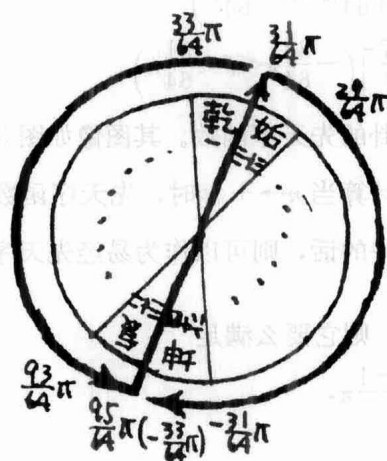


图4 推导先天六十四卦先天序函数的图

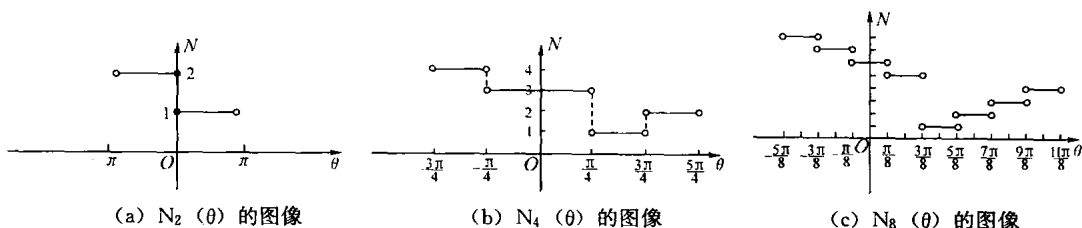


图5 先天二仪、四象、八卦的先天序函数的图像

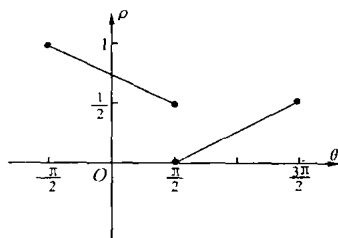
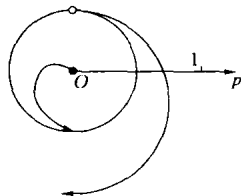


图6 (a)《易经》先天序函数 $\rho(\theta)$ 的图像(在直角坐标系下)



(b)《易经》先天序函数 $\rho(\theta)$ 的图像(在极坐标系下)

$$N_{64}(\theta) = \begin{cases} \left[\frac{32}{\pi}\theta - \frac{29}{2} \right] \left(\frac{31}{64}\pi < \theta < \frac{95}{64}\pi \right) \\ \left[-\frac{32}{\pi}\theta + \frac{97}{2} \right] \left(-\frac{33}{64}\pi < \theta < \frac{31}{64}\pi \right). \end{cases}$$

它们分别是二仪、四象、八卦的先天序函数。其图像如图5的(a) — (c)所示。

我们感兴趣的问题是: 计算当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 先天序函数分布序列 $\left\{ \frac{1}{2^n} N_{2^n}(\theta) \right\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限。这个极限如果存在唯一的话, 则可以作为易经先天序的良好数学描述。所以下面转向计算这个极限。

令 θ 为与 n 无关的常数, 则它要么满足

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi < \theta < \frac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n}\pi,$$

要么满足

$$-\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\pi < \theta < \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi.$$

①

如果满足

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi < \theta < \frac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n}\pi,$$

则此时有

$$\frac{1}{2^n} N_{2^n}(\theta) = \frac{1}{2^n} \left[\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right] \quad (2)$$

对①式取 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限, 得

$$\frac{1}{2} \pi < \theta < \frac{3}{2} \pi$$

对②式取 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限, 如果注意到此时

$$\left| \left(\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right) - \left[\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right] \right| < 1$$

从而

$$0 \leq \left| \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right) - \frac{1}{2^n} \left[\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right] \right| < \frac{1}{2^n},$$

因而由此推出

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \theta - \frac{1}{4} + \frac{3}{2^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \theta - \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{2} \pi < \theta < \frac{3}{2} \pi \right). \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \left[-\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta + \frac{3}{4} \times 2^n + \frac{1}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \left(-\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta + \frac{3}{4} \times 2^n + \frac{1}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2\pi} \theta + \frac{3}{4} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \theta + \frac{3}{4} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} N_{2^n}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \theta - \frac{1}{4} & \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\ -\frac{1}{2\pi} \theta + \frac{3}{4} & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right). \end{cases}$$

可以用这个极限函数来描述易经先天序, 称为易经先天序分布函数, 记为 $\rho(\theta)$, 即:

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \theta - \frac{1}{4} & \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\ -\frac{1}{2\pi} \theta + \frac{3}{4} & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right). \end{cases}$$

这个函数在直角坐标系和极坐标系下的图像, 如图 6 的 (a)、(b) 所示。其中图 (b) 的形状特别值得注意: 其图像呈现具有两个半周期、旋转方向相反的、并且互相断开的

两段螺线。图中在区间 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 半周期一段螺线上各点的曲率较大,而在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 半周期一段螺线上各点的曲率则较小,且曲率均为 θ 的单调递减函数。这似乎昭示了,事物的发展、演化运动轨迹,可能呈现出一种非平稳态的、具有某种量子化时空结构特征的分布。

如果令

$$R_n(\theta) = |2^n \rho(\theta) - N_{2^n}(\theta)|$$

记

$$N_{2^n}^*(\theta) = \begin{cases} \frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} & \left(\frac{2^{n-1}-1}{2^n} \pi < \theta < \frac{2^n+2^{n-1}-1}{2} \pi \right) \\ -\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta + \frac{3}{4} \times 2^n + \frac{1}{2} & \left(-\frac{2^{n-1}+1}{2^n} \pi < \theta < \frac{2^{n-1}-1}{2^n} \pi \right), \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} R_n(\theta) &= |2^n \rho(\theta) - N_{2^n}(\theta)| \\ &= |2^n \rho(\theta) - N_{2^n}^*(\theta) + N_{2^n}^*(\theta) - N_{2^n}(\theta)| \\ &\leq |2^n \rho(\theta) - N_{2^n}^*(\theta)| + |N_{2^n}^*(\theta) - N_{2^n}(\theta)| \end{aligned}$$

由 $\rho(\theta)$ 的推导显然可见

$$|2^n \rho(\theta) - N_{2^n}^*(\theta)| = \begin{cases} \frac{3}{2} & \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\ \frac{1}{2} & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

又

$$|N_{2^n}^*(\theta) - N_{2^n}(\theta)| = \begin{cases} \left| \frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} - \left[\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta - \frac{2^{n-1}-3}{2} \right] \right| & \left(\frac{2^{n-1}-1}{2^n} \pi < \theta \leq \frac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n} \pi \right) \\ \left| -\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta + \frac{3}{4} \times 2^n + \frac{1}{2} - \left[-\frac{2^{n-1}}{\pi} \theta + \frac{3}{4} \times 2^n + \frac{1}{2} \right] \right| & \left(-\frac{2^{n-1}}{2^n} \pi \leq \theta < \frac{2^{n-1}-1}{2^n} \pi \right). \end{cases}$$

显然小于1。从而

$$R_n(\theta) < \frac{5}{2} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right),$$

或

$$R_n(\theta) < \frac{3}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right).$$

因此,用 $[2^n \rho(\theta)]$ 来估计 $N_{2^n}(\theta)$ 误差是很小的,至多不到 $\frac{5}{2} \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right)$ 或 $\frac{3}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 。例如, $n=6$, $\theta_1 = \frac{7}{8} \pi$, $N_{64}(\theta_1) = 13$, 与这时的 $[64\rho(\theta_1)] =$