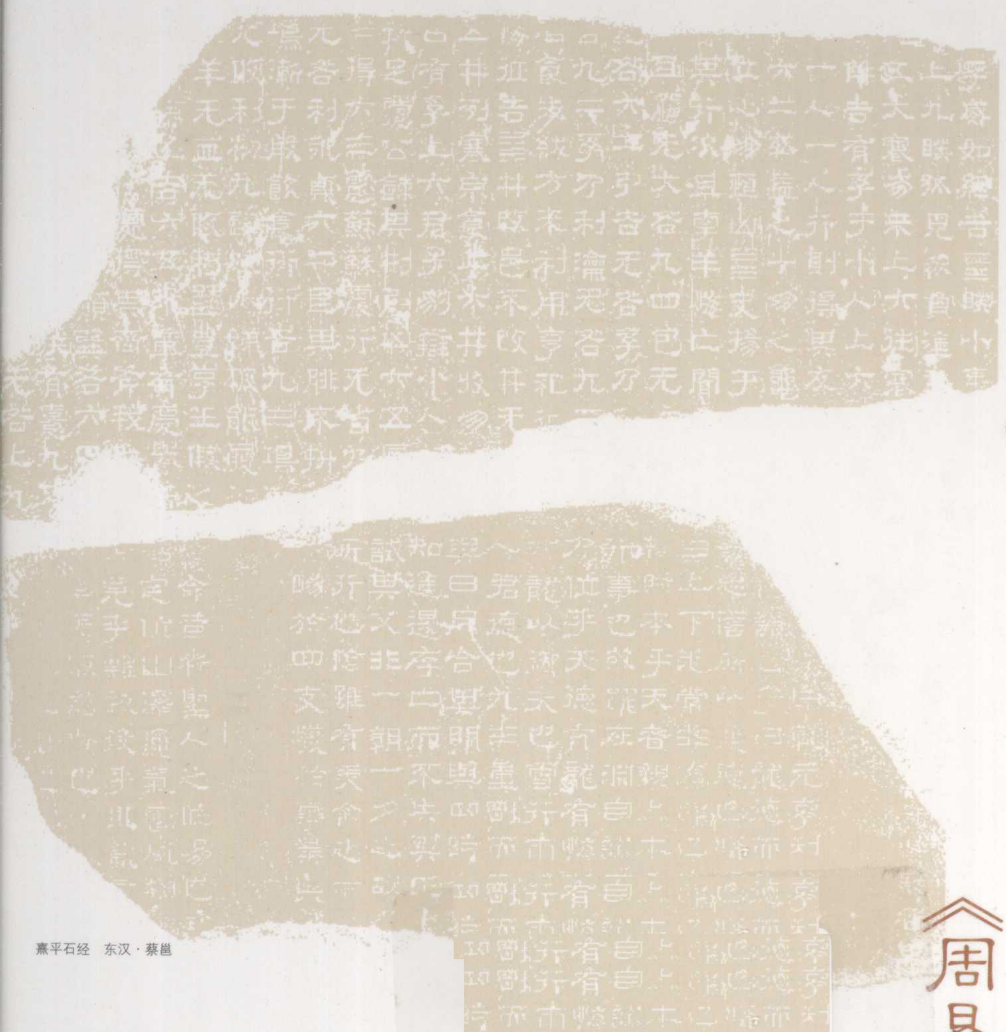
国家教育部人文社会科学重点研究基地山东大学易学与中国古代哲学研究中心
国家“985工程”山东大学易学与中国传统文化研究哲学社会科学创新基地
山东大学儒学高等研究院
中国周易学会
重大项目

1900～2009

百年国学研究文献大系 一

百年易學菁华集成 初编

《周易》与自然科学 贰



熹平石经 东汉·蔡邕

刘大钧◎总主编

上海科学技术文献出版社

上海图書館

国家教育部人文社会科学重点研究基地山东大学易学与中国古代哲学研究中心
国家“985工程”山东大学易学与中国传统文化研究哲学社会科学创新基地
山东大学儒学高等研究院
中国周易学会
重大项目

1900～2009

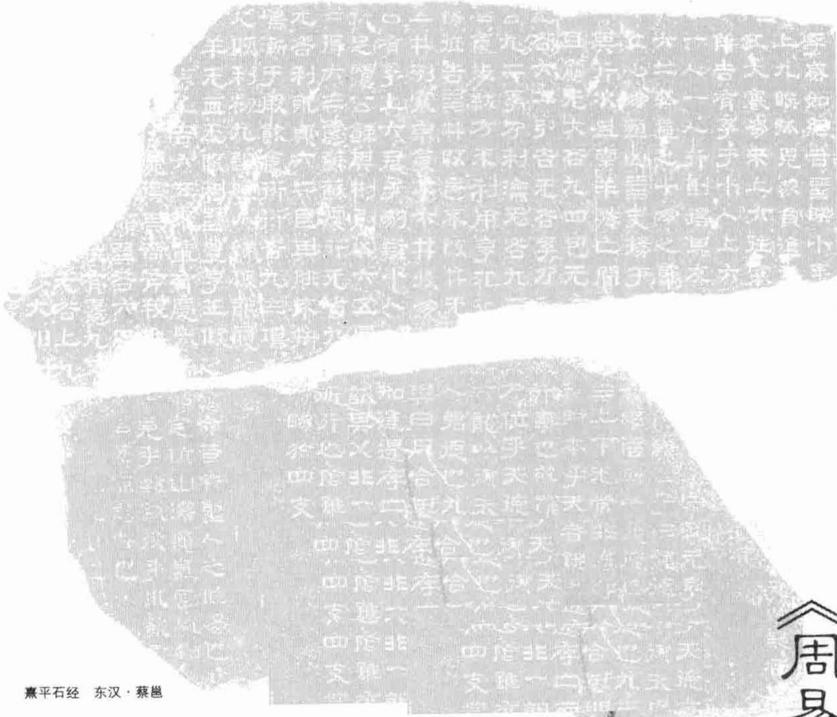
百年国学研究文献大系一

百年易學菁华集成

初编

《周易》与自然科学

贰



熹平石经　东汉·蔡邕

刘大钧◎总主编

施维　策划

上海图书館
上海科学技术文献出版社

总　目

目 录

通 论

《周易》与数学、物理、化学

《周易》与天文历法

其 他

试论《易经》先天序的数学描述

徐百兴*

《易经》是我国灿烂的古代文化宝库中的文化瑰宝。数千年来，《易经》流传于中华大地，经久不衰，创造了人类文化史上的奇迹，堪称我源远流长的中华文化的活水源头。整部《易经》是一座极为神秘的殿堂，其中充满了许多不为现代科学所理解的谜。比如说：《易经》是怎样形成的？它是否真的有预测功能？如果它有预测功能的话，其预测机制如何？可否对其预测机制进行数学模拟？……对于诸如此类举不胜举的问题，迄今为止，现代科学都不能作出令人满意的合理解释。对于《易经》的预测功能，虽然目前学术界还有争议，但笔者认为：这个问题可以像前段时间确认和接纳特异功能的做法那样，通过科学界、哲学界和社会各方面力量的通力协作，进行权威的、严格而规范的联合测试，比较容易加以解决。至于《易经》的预测机制及其数学模拟的问题，则可能不是短期能够解决的。它有赖于现代科学的进展，这里有一个知识的积累过程，需要在相应知识基础上进行大量系统而深入细致的研究。……但这并不是说，我们不可以有所作为，在理论上做一些力所能及的工作，向着解决上述问题的最终目标步步逼近。依笔者的观点看来，《易经》的预测功能是客观存在的事实。其预测功能和机制的核心，在于那个颇为神秘的太极图所表达的涵意深刻的阴阳模型。而这个阴阳模型的关键所在，又是那个维系阴、阳于一体（太极）的 S 形阴阳消长变化节律。如果能对其进行数学描述，则可以展开一些工作，从现代科学的角度进行一些诠释。本文介绍笔者所作的有关《易经》先天序的数学描述部分的工作。

为叙述方便起见，在正式叙述之前需先简述一下工作所涉及到的一些易理。

首先阐述蕴涵在太极图中的哲理。所谓太极图就是由两条“鱼”（俗称阴、阳鱼）首尾追逐而形成的一个动态整体。它以简炼、直观的形象表达了“道”的内涵：即一个以阴阳消长节律为基础的、宇宙万物发展、演化的太极钟（或称太极振子）的动力学控制论机制。老子在《道德经》中说：“万物负阴而抱阳，冲气以为和。”即是说：宇宙万物都是因阴、阳两极的对立、交感建设作用应运而生的阴、阳合抱体。阴、阳两极的对立、交感建设作用，遵从 S 形阴、阳消长变化节律——这就是太极图中那条剖判太极为阴、阳两仪的 S 形曲线。按照这条 S 形曲线，阴、阳两仪以此消彼长、物极必反、相反相成相互作用和变化，使得宇宙万物的发展、演化运动，呈现出一种无尽的、嵌套

* 徐百兴，云南财经学院经济研究所。

相生的动力演化分岔树结构：即事物的发展、演化运动，呈否定之否定的周期性变化——不断走向自己的反面，母体不断趋于消亡，同时从母体中产生出新的对立面来。这就使得事物按照一种井井有然的秩序分化和展开："无极生太极"，"太极生两仪"，"两仪生四象，四象生八卦"，八卦相重又得到八八六十四卦……（或如老子所说："道生一，一生二，二生三，三生万物"。）通过不断地分岔、选择进化，逐步发展为有序的万物（如图 1 所示）。

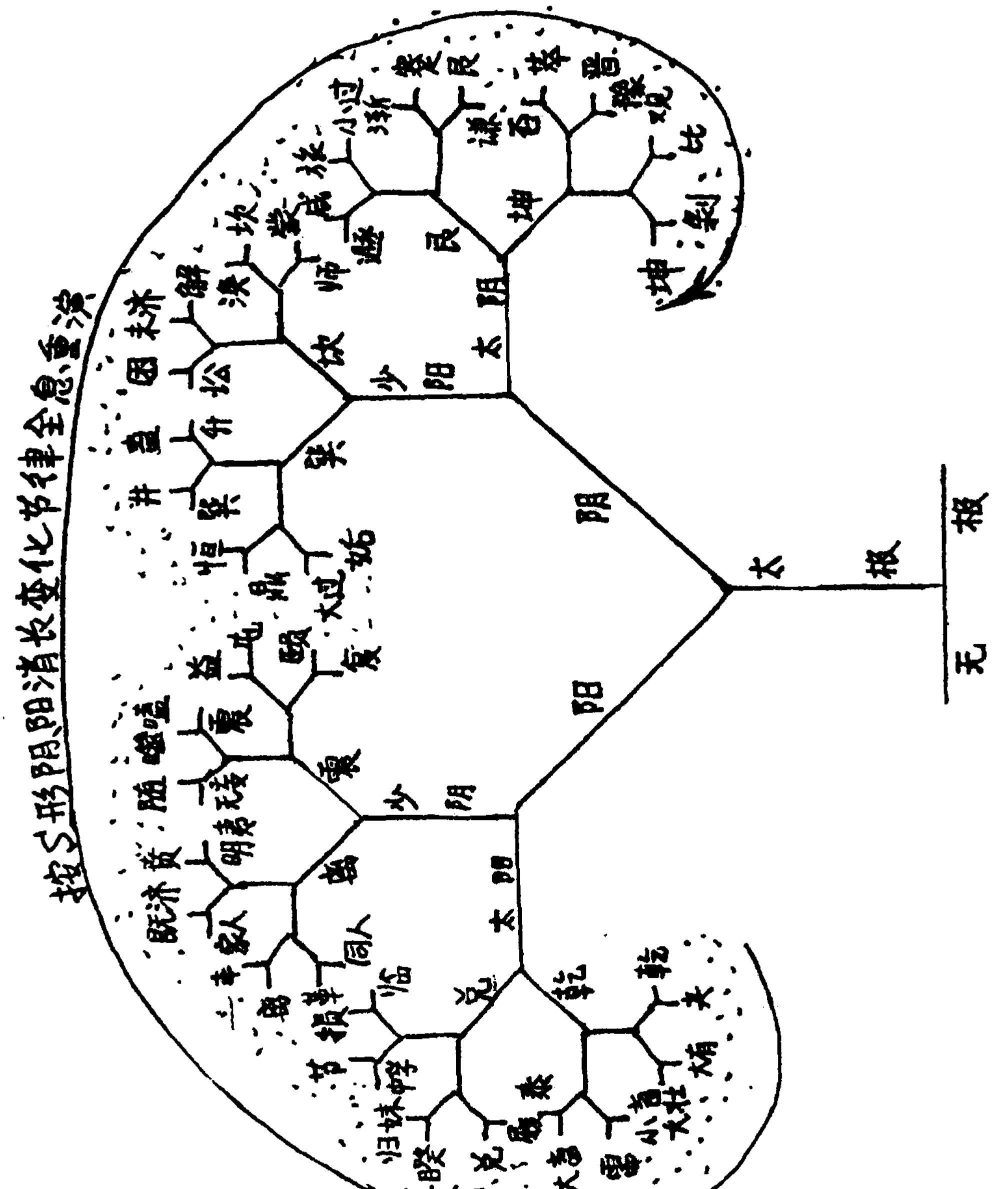
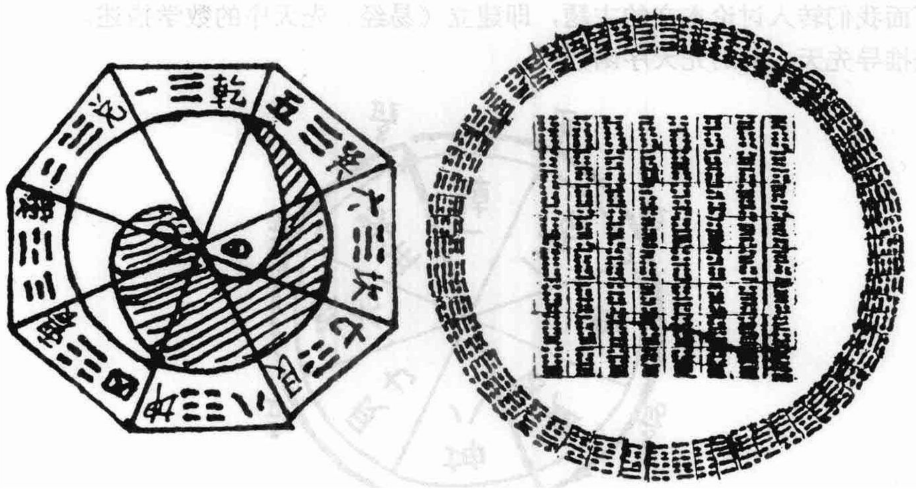


图 1　《易经》事物发展、演化模式的演化分岔树形图



（*a*）伏羲先天八卦太极图　　（*b*）伏羲先天六十四卦方位图

图 2　伏羲先天太极图

太极图有先天和后天之分。先天太极图相传为伏羲氏所创，而后天太极图则相传为周文王所演。这里仅介绍先天图。所谓先天图，就是描述天地自然造化之图。其特点是讲对待，即讲阴阳的对立统一、五行的相克之理，但对待中寓流行（即寓阴、阳相生、五行相生），显示事物发展螺旋式上升、波浪式前进的周期全息律。先天太极图又分为先天八卦太极图和六十四卦方位图，如图 2 的（*a*）、（*b*）所示。先天太极图以其具体的卦序来描述阴阳消长的 *S* 形曲线变化规律，这就是我们所说的先天序。在先天八卦太极图中，先天序是：乾（☰）一→兑（☱）二→离（☲）三→震（☳）四→巽（☴）五→坎（☵）六→艮（☶）七→坤（☷）八。在六十四卦方位图中，先天序则为：乾（䷀）一→夬（䷪）二→大有（䷍）三→大壮（䷡）四→小畜（䷈）五→需（䷄）六→大畜（䷙）七→泰（䷊）八→履（䷉）九→兑（䷹）十→睽（䷥）十一→归妹（䷵）十二→中孚（䷼）十三→节（䷻）十四→损（䷨）十五→临（䷒）十六→同人（䷌）十七→革（䷰）十八→离（䷝）十九→丰（䷶）二十→家人（䷤）二十一→既济（䷾）二十二→贲（䷕）二十三→明夷（䷣）二十四→无妄（䷘）二十五→随（䷐）二十六→噬嗑（䷔）二十七→震（䷲）二十八→益（䷩）二十九→屯（䷂）三十→颐（䷚）三十一→复（䷗）三十二→姤（䷫）三十三→大过（䷛）三十四→鼎（䷱）三十五→恒（䷟）三十六→巽（䷸）三十七→井（䷯）三十八→蛊（䷑）三十九→升（䷭）四十→讼（䷅）四十一→困（䷮）四十二→未济（䷿）四十三→解（䷧）四十四→涣（䷺）四十五→坎（䷜）四十六→蒙（䷃）四十七→师（䷆）四十八→遁（䷠）四十九→咸（䷞）五十→旅（䷷）五十一→小过（䷽）五十二→渐（䷴）五十三→蹇（䷦）五十四→艮（䷳）五十五→谦（䷎）五十六→否（䷋）五十七→萃（䷬）五十八→晋（䷢）五十九→豫（䷏）六十→观（䷓）六十一→比（䷇）六十二→剥（䷖）六十三→坤（䷁）六十四。前者（对于先天八卦：从乾一到震四；而对于先天六十四卦：则从乾一到复三十二）左旋，“数往者顺”，后者（对于先天八卦：从巽五到坤八；而对于先天六十四卦：则从三十三到坤六十四）右旋，“知来者逆”，呈一 *S* 形曲线式的无穷尽周期性变化。

下面我们转入讨论本文的主题，即建立《易经》先天序的数学描述。

先推导先天八卦的先天序函数。

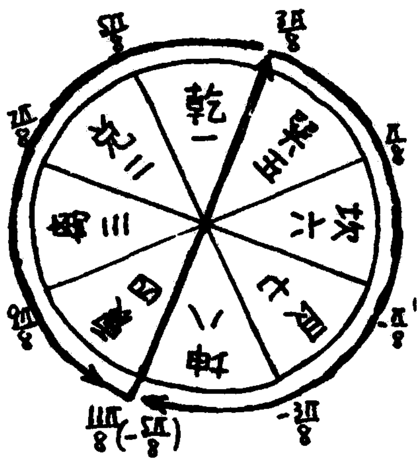


图 3 推导先天八卦先天序函数的图形

考虑图 3 先天八卦一个变化周期的情况。令 θ 为转角，且 $\theta\in\left[-\frac{5\pi}{8},\ \frac{11}{8}\pi\right]$。则显然有：

①当 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=1$；

②当 $\theta\in\left(\frac{5\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=2$；

③当 $\theta\in\left(\frac{7\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=3$；

④当 $\theta\in\left(\frac{9\pi}{8},\ \frac{11\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=4$；

⑤当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=5$；

⑥当 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=6$；

⑦当 $\theta\in\left(-\frac{3\pi}{8},\ -\frac{\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=7$；

⑧当 $\theta\in\left(-\frac{5\pi}{8},\ -\frac{3\pi}{8}\right)$ 时，

$N_8(\theta)=8$。

假设欲求的先天序函数为

$$N_8(\theta)=\begin{cases}[a\theta+b] & \left(\frac{3\pi}{8}<\theta<\frac{11\pi}{8}\right)\\ [a'\theta+b'] & \left(-\frac{5\pi}{8}<\theta<\frac{3\pi}{8}\right),\end{cases}$$

其中，$[x]$ 表示实数 x 的整数部分。

则在区间$\left(\frac{3\pi}{8},\ \frac{11\pi}{8}\right)$中，分别取 $\theta=\frac{3\pi}{8}$，$N_8(\theta)=1$ 及 $\theta=\frac{9\pi}{8}$，$N_8\left(\frac{9\pi}{8}\right)=4$ 得：

$$\begin{cases}\frac{3\pi}{8}a+b=1\\ \frac{9\pi}{8}a+b=4,\end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases}a=\frac{4}{\pi}\\ b=-\frac{1}{2}。\end{cases}$$

故当$\frac{3\pi}{8}<\theta<\frac{11\pi}{8}$时，$N_8(\theta)=\left[\frac{4}{\pi}\theta-\frac{1}{2}\right]$。容易验证：当 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=1$；当 $\theta\in\left(\frac{5\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=2$；当 $\theta\in\left(\frac{7\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=3$；当 $\theta\in\left(\frac{9\pi}{8},\ \frac{11\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=4$。

类似地，在区间$\left(-\frac{5\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8}\right)$中，分别取 $\theta=\frac{3\pi}{8}$，$N_8\left(\frac{3\pi}{8}\right)=5$；$\theta=-\frac{3\pi}{8}$，$N_8\left(-\frac{3\pi}{8}\right)=8$，则得：

$$\begin{cases}\frac{3\pi}{8}a'+b'=5\\ -\frac{3\pi}{8}a'+b'=8,\end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases}a'=-\frac{4}{\pi}\\ b'=\frac{13}{2}。\end{cases}$$

所以当$-\frac{5\pi}{8}<\theta<\frac{3\pi}{8}$时，$N_8(\theta)=\left[-\frac{4}{\pi}\theta+\frac{13}{2}\right]$。容易验证：当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=5$；当 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=6$；而当转角 $\theta\in\left(-\frac{3\pi}{8},\ -\frac{\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=7$；最后当着 $\theta\in\left(-\frac{5\pi}{8},\ -\frac{3\pi}{8}\right)$时，$N_8(\theta)=8$。于是得先天八卦的先天序函数：

$$N_8(\theta)=\begin{cases}\left[\frac{4}{\pi}\theta-\frac{1}{2}\right]\left(\frac{3\pi}{8}<\theta<\frac{11\pi}{8}\right)\\ \left[-\frac{4}{\pi}\theta+\frac{13}{2}\right]\left(-\frac{5\pi}{8}<\theta<\frac{3\pi}{8}\right)。\end{cases}$$

其次，推导先天六十四卦的先天序函数。

考虑图 4 先天六十四卦一个变化周期的情况。令 θ 仍为转角，且 $\theta\in\left[-\frac{33}{64}\pi,\ \frac{95}{64}\pi\right]$。则设

$$N_{64}(\theta)=\begin{cases}[a\theta+b]\ \left(\frac{31}{64}\pi<\theta<\frac{95}{64}\pi\right)\\ [a'\theta+b']\ \left(-\frac{33}{64}\pi<\theta<\frac{31\pi}{64}\right),\end{cases}$$

并取当 $\theta=\frac{31\pi}{64}$时，$N_{64}\left(\frac{31\pi}{64}\right)=1$；当 $\theta=\frac{93}{64}\pi$ 时，$N_{64}\left(\frac{93}{64}\pi\right)=32$。则得：

$$\begin{cases}\frac{31\pi}{64}a+b=1\\ \frac{93\pi}{64}a+b=32,\end{cases}$$

解之得：

$$a=\frac{32}{\pi}$$

$$b=-\frac{29}{2}。$$

故当 $\theta\in\left(\frac{31}{64}\pi,\ \frac{95}{64}\pi\right)$时，$N_{64}(\theta)=\left[\frac{32}{\pi}\theta-\frac{29}{2}\right]$。又取当 $\theta=\frac{31}{64}\pi$ 时，$N_{64}\left(\frac{31}{64}\pi\right)=33$；而当 $\theta=-\frac{31}{64}\pi$ 时，$N_{64}\left(-\frac{31}{64}\pi\right)=64$。则得：

$$\begin{cases}\frac{31}{64}\pi a'+b'=33\\ -\frac{31}{64}\pi a'+b'=64,\end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases}a'=-\frac{32}{\pi}\\ b'=\frac{97}{2}。\end{cases}$$

故当 $\theta\in\left(-\frac{33}{64}\pi,\ \frac{31}{64}\pi\right)$时，

$$N_{64}(\theta)=\left[-\frac{32}{\pi}\theta+\frac{97}{2}\right]。$$

经验算，以上得到的函数 $N_{64}(\theta)$ 满足要求。所以先天六十四卦的先天序函数为：

$$N_{64}(\theta)=\begin{cases}\left[\dfrac{32}{\pi}\theta-\dfrac{29}{2}\right]\left(\dfrac{31}{64}\pi<\theta<\dfrac{95}{64}\pi\right)\\\left[-\dfrac{32}{\pi}\theta+\dfrac{97}{2}\right]\left(-\dfrac{33}{64}\pi<\theta<\dfrac{31}{64}\pi\right)\end{cases}$$

一般的，先天 2^n 卦的先天序函数仿此可推得

$$N_{2^n}(\theta)=\begin{cases}\left[\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\dfrac{2^{n-1}-3}{2}\right]\left(\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi<\theta<\dfrac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n}\pi\right)\\\left[-\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta+\dfrac{3}{4}\times2^n+\dfrac{1}{2}\right]\left(-\dfrac{2^{n-1}+1}{2^n}\pi<\theta<\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi\right)\end{cases}$$

（$n=1，2，3，4，5，6\cdots\cdots$）

特别，当 $n=1，2，3，6$ 得：

$$N_2(\theta)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{\pi}\theta+1\right]\ (0<\theta<\pi)\\\left[-\dfrac{1}{\pi}\theta+2\right]\ (-\pi<\theta<0),\end{cases}$$

$$N_4(\theta)=\begin{cases}\left[\dfrac{2}{\pi}\theta+\dfrac{1}{2}\right]\left(\dfrac{1}{4}\pi<\theta<\dfrac{5}{4}\pi\right)\\\left[-\dfrac{2}{\pi}\theta+\dfrac{7}{2}\right]\left(-\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{1}{4}\pi\right),\end{cases}$$

$$N_8(\theta)=\begin{cases}\left[\dfrac{4}{\pi}\theta-\dfrac{1}{2}\right]\left(\dfrac{3}{8}\pi<\theta<\dfrac{11}{8}\pi\right)\\\left[-\dfrac{4}{\pi}\theta+\dfrac{13}{2}\right]\left(-\dfrac{5}{8}\pi<\theta<\dfrac{3}{8}\pi\right),\end{cases}$$

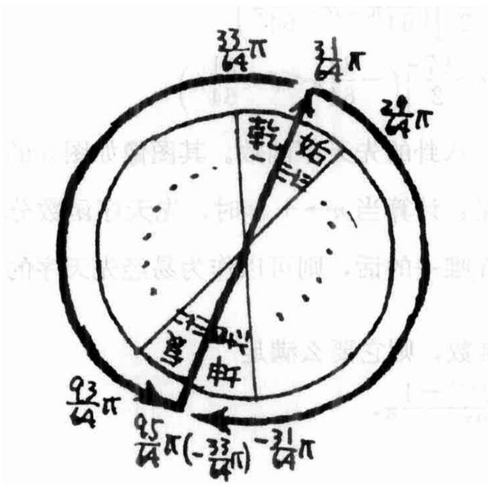
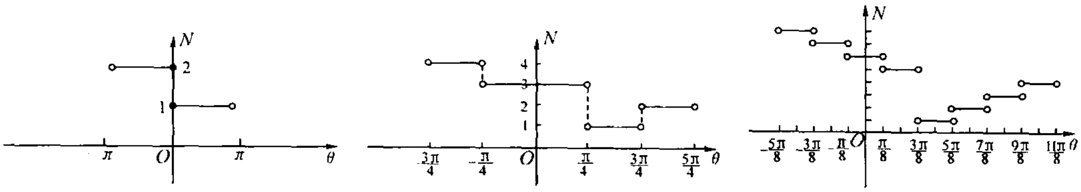


图 4　推导先天六十四卦先天序函数的图



(a) N_2 (θ) 的图像　　(b) N_4 (θ) 的图像　　(c) N_8 (θ) 的图像

图 5　先天二仪、四象、八卦的先天序函数的图像

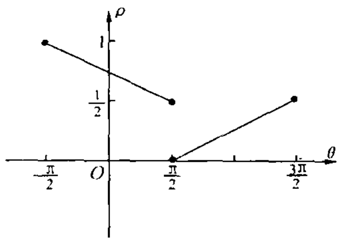
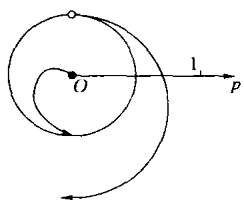


图 6　(a)《易经》先天序函数 ρ (θ) 的图像（在直角坐标系下）



(b)《易经》先天序函数 ρ (θ) 的图像（在极坐标系下）

$$N_{64}(\theta)=\begin{cases}\left[\dfrac{32}{\pi}\theta-\dfrac{29}{2}\right]\left(\dfrac{31}{64}\pi<\theta<\dfrac{95}{64}\pi\right)\\[2mm] \left[-\dfrac{32}{\pi}\theta+\dfrac{97}{2}\right]\left(-\dfrac{33}{64}\pi<\theta<\dfrac{31}{64}\pi\right)。\end{cases}$$

它们分别是二仪、四象、八卦的先天序函数。其图像如图 5 的 (a) — (c) 所示。

我们感兴趣的问题是：计算当 $n\to+\infty$ 时，先天序函数分布序列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}N_{2^n}(\theta)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限。这个极限如果存在唯一的话，则可以作为易经先天序的良好数学描述。所以下面转向计算这个极限。

令 θ 为与 n 无关的常数，则它要么满足

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi<\theta<\frac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n}\pi,$$

要么满足

$$-\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\pi<\theta<\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi。\qquad ①$$

如果满足

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi<\theta<\frac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n}\pi,$$

则此时有

$$\frac{1}{2^n}N_{2^n}(\theta)=\frac{1}{2^n}\left[\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\frac{2^{n-1}-3}{2}\right] \quad ②$$

对①式取 $n\to+\infty$ 时的极限，得

$$\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$$

对②式取 $n\to+\infty$ 时的极限，如果注意到此时

$$\left|\left(\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\frac{2^{n-1}-3}{2}\right)-\left[\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\frac{2^{n-1}-3}{2}\right]\right|<1$$

从而

$$0\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\left(\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\frac{2^{n-1}-3}{2}\right)-\frac{1}{2^n}\left[\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\frac{2^{n-1}-3}{2}\right]\right|<\frac{1}{2^n},$$

因而由此推出

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\frac{2^{n-1}-3}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta-\frac{2^{n-1}-3}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\theta-\frac{1}{4}+\frac{3}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\theta-\frac{1}{4}\quad\left(\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)。$$

同理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\left[-\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta+\frac{3}{4}\times2^n+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\left(-\frac{2^{n-1}}{\pi}\theta+\frac{3}{4}\times2^n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\pi}\theta+\frac{3}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\theta+\frac{3}{4}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

所以有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}N_{2^n}(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\theta-\frac{1}{4} & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}\right)\\ -\frac{1}{2\pi}\theta+\frac{3}{4} & \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)。\end{cases}$$

可以用这个极限函数来描述易经先天序，称为易经先天序分布函数，记为 $\rho(\theta)$，即：

$$\rho(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\theta-\frac{1}{4} & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}\right)\\ -\frac{1}{2\pi}\theta+\frac{3}{4} & \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)。\end{cases}$$

这个函数在直角坐标系和极坐标系下的图像，如图 6 的（a）、（b）所示。其中图（b）的形状特别值得注意：其图像呈现具有两个半周期、旋转方向相反的、并且互相断开的

两段螺线。图中在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 半周期一段螺线上各点的曲率较大，而在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 半周期一段螺线上各点的曲率则较小，且曲率均为 θ 的单调递减函数。这似乎昭示了，事物的发展、演化运动轨迹，可能呈现出一种非平稳态的、具有某种量子化时空结构特征的分布。

如果令

$$R_n(\theta) = |2^n\rho(\theta) - N_{2^n}(\theta)|$$

记

$$N_{2^n}^*(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta - \dfrac{2^{n-1}-3}{2} & \left(\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi < \theta < \dfrac{2^n+2^{n-1}-1}{2}\pi\right) \\ -\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta + \dfrac{3}{4}\times 2^n + \dfrac{1}{2} & \left(-\dfrac{2^{n-1}+1}{2^n}\pi < \theta < \dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi\right), \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} R_n(\theta) &= |2^n\rho(\theta) - N_{2^n}(\theta)| \\ &= |2^n\rho(\theta) - N_{2^n}^*(\theta) + N_{2^n}^*(\theta) - N_{2^n}(\theta)| \\ &\leqslant |2^n\rho(\theta) - N_{2^n}^*(\theta)| + |N_{2^n}^*(\theta) - N_{2^n}(\theta)| \end{aligned}$$

由 $\rho(\theta)$ 的推导显然可见

$$|2^n\rho(\theta) - N_{2^n}^*(\theta)| = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ \dfrac{1}{2} & \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

又

$$|N_{2^n}^*(\theta) - N_{2^n}(\theta)| = \begin{cases} \left|\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta - \dfrac{2^{n-1}-3}{2} - \left[\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta - \dfrac{2^{n-1}-3}{2}\right]\right| \\ \left(\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi < \theta \leqslant \dfrac{2^n+2^{n-1}-1}{2^n}\pi\right) \\ \left|-\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta + \dfrac{3}{4}\times 2^n + \dfrac{1}{2} - \left[-\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\theta + \dfrac{3}{4}\times 2^n + \dfrac{1}{2}\right]\right| \\ \left(-\dfrac{2^{n-1}}{2^n}\pi \leqslant \theta < \dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}\pi\right). \end{cases}$$

显然小于 1。从而

$$R_n(\theta) < \frac{5}{2} \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\right),$$

或

$$R_n(\theta) < \frac{3}{2} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

因此，用 $[2^*\rho(\theta)]$ 来估计 $N_{2^n}(\theta)$ 误差是很小的，至多不到 $\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$ 或 $\frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right)$。例如，$n=6$，$\theta_1 = \frac{7}{8}\pi$，$N_{64}(\theta_1) = 13$，与这时的 $[64\rho(\theta_1)] =$