1978 日本全国大学入学考试

数学题解

（上）

一九七八年

日本全国大学入学考试

数学题解

〔上　　册〕

李开成　刘正一　译

吉林人民出版社

目　　　　录

〔上　　册〕

〔中　册〕

〔下　　册〕

北海道大学

✧理科系✧

〔考期〕 3月4日 〔时间〕 150分 〔评分〕 120分

1 对于实数 a ($a \neq 1$) 设有

$$C_a = \{(x, y) \mid x^2 - 2ax + y^2 + 2(a-2)y + 2 = 0\},$$

$$D_a = \{(x, y) \mid x^2 - 2ax + y^2 + 2(a-2)y + 2 > 0\}。$$

（1）a 变动时，试画出圆 C_a 的中心所描绘的图形，

（2）试求与所有的圆 C_a 相切的直线方程，

（3）对于 $a<1$，试图示出属于 D_a 的所有点的集合。

2 设空间四点：$A(2, -2, 1)$、$B(1, 4, -1)$、$C(1, 1, 3)$、$D(-1, 5, 3)$，过点 A、B 的直线为 l_1，过 C、D 的直线为 l_2。

（1）试求通过 l_1，且平行于 l_2 的平面 π 的方程，

（2）从点 C 向平面 π 引垂线，垂足为 H，试求点 H 的座标和线段 CH 的长，

（3）试证：线段 CH 的长等于 l_1 上的动点 P 和 l_2

上的动点 Q 的距离的最小值。

3 求解：

（1）试求满足不等式

$$2(\log_{0.5} x)^2 + 9\log_{0.5} x + 9 \leqslant 0$$

的 x 的范围，

（2）x 在（1）中求得的范围内变动时，试求：

$$f(x) = (\log_2 \frac{x}{3})(\log_2 \frac{x}{4})$$

的最大值 M 和最小值 L。

4 设 T 代表同时投掷两个骰子的试验，试验 T 进行一次时，出现的点数之差为 X。

（1）试求 X 的数学期望（平均值）$E(X)$ 和方差 $V(X)$，

（2）独立的把试验 T 重复进行 7 次，试求 X 取得奇数 3 次以上的概率。

5 设函数 $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+a+1}{x^2+1}$ 当 $x=-\sqrt{3}$ 时有极小值 0，

（1）求 a、b 的值，

（2）试求使 $f(x)$ 为极大的 x 的值 C，然后再求：曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴以及直线 $x=c$ 所围成的面积 S。

6 计算：

（1）$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t(1-\sin t)^{\frac{n-1}{2}} dt$ 的值 （n 为自然

数），

（2）按照（1）中求得的 a_n，计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_n-a_{n+1})$$

的和。

1 （圆的方程）

研究 在（2）中直线与圆相切条件虽然可以用判别式，但用垂线的长来求较为方便。关于（3），把（1）、（2）的结果可以画出图进行研究，仅靠计算来处理也可以。在这种场合，作为关于 a 的不等式考虑为宜。如果利用图形，（2）成为下面的样子。

对于 a 的一切值，$(a\neq1)$，圆 C_a 的中心在直线 $x+y=2$ 上，且 C_a 过此直线上的点(1,1)，而且，当 $a<\beta<1$ 或 $1<\beta<a$ 时，由于圆 C_a 包含于圆 C_β 中、那么和所有的圆相切的直线的切点是（1,1)。从而所求直线为 $y=x$。

解答 （1）把圆 C_a 改写为

$$(x-a)^2+\{y+(a-2)\}^2=2(a-1)^2,$$

设圆的中心为 $(X、Y)$，则

$$x=a,\ Y=-(a-2),\ (a\neq1)。$$

消去 a，$X+Y=2$，　　　　$(X\neq1)$。

所以，圆的中心在直线 $X+Y=2$ 上变动。但是对应于 $x=1$ 的点（1,1）除外。

（2）设所求直线为 $ax+by+c=0$，因为从圆心 $(a,-(a-2))$ 引垂线长等于半径 $\sqrt{2}|a-1|$，则有

$$\frac{|a\alpha+b(-\alpha+2)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}\,|\alpha-1|,\ (\alpha\neq 1)$$

两边平方后化为

$$(a+b)^2\alpha^2-2\{2(a^2+b^2)+(a-b)(2b+c)\}\alpha+$$
$$\{2(a^2+b^2)-(2b+c)^2\}=0。$$

此式关于 α 为恒等的条件是

$$\begin{cases}(a+b)^2=0, & ①\\ 2(a^2+b^2)+(a-b)(2b+c)=0, & ②\\ 2(a^2+b^2)-(2b+c)^2=0, & ③\end{cases}$$

成立。

由第①式，$a=-b$，

再由第②式，$ac=0$，

再由第③式，$4ac-c^2=0$，

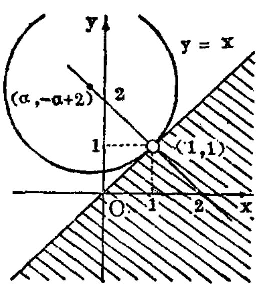
于是得到：$a=-b(\neq 0)$，$c=0$，故所求直线为 $y=x$。

…（答）

（3）$x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2>0$ 变形为

$$-2a(x-y)+x^2+y^2-4y+2>0,$$

$$\therefore\quad 2(1-a)(x-y)+(x-1)^2+(y-1)^2>0。$$



因为 $(x,y)\neq(1,1)$ 时，

$$(x-1)^2+(y-1)^2>0,$$

为使对 $a<1$ 的一切 a 都成立，则 $y\leqslant x$。

所求范围如左图斜线部分，包括除点（1,1）的边界。

2（直线、平面的方程）

解答（1）因为含有二点 A、B

的平面 π 包含直线 l_1，设平面 π 的方程为 $ax+by+cz+d=0$，则

$$2a-2b+c+d=0, \qquad \cdots①$$

$$a+4b-c+d=0, \qquad \cdots②$$

又直线 l_2 的方向数比是 $2:-4:0=1:-2:0$，l_2与 π 平行，故

$$a-2b+0c=0, \qquad \cdots③$$

根据①、②、③得

$$a:b:c:d=2:1:2:-4,$$

故所求平面方程为 $2x+y+2z-4=0$。 …④(答)

（2）过 C 且垂直于 π 的直线是

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}, \qquad \cdots⑤$$

解 ④、⑤得 $x=-\frac{1}{9}$、$y=\frac{4}{9}$、$z=\frac{17}{9}$，应用二点间距离公式：

$$CH=\sqrt{\left(-\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{4}{9}-1\right)^2+\left(\frac{17}{9}-3\right)^2}=\frac{5}{3},$$

(答)$H\left(-\frac{1}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{17}{9}\right)$，$CH=\frac{5}{3}$。

（3）因为 CH 的方向比为 $2:1:2$，则有 $CH\perp l_1$ 且 $CH\perp l_2$，故 CH 的长等于 l_1、l_2 上的点的最短距离。

3 （对数不等式，二次函数图象）

研究（1）宜设 $\log_{0.5}x=X$，更要留意 $\log_{0.5}x$是单调减函数。

（2）设 $\log_2 x=u$，求附有条件的二次式的最大值、最小值就行了。然后，再考虑到二次函数的图形。

解答 （1）$2(\log_{0.5}x)^2+9\log_{0.5}x+9\leqslant 0$,

$\therefore\quad (2\log_{0.5}x+3)(\log_{0.5}x+3)\leqslant 0,$

$\therefore\quad -3\leqslant\log_{0.5}x\leqslant-\dfrac{3}{2},$

$\therefore\quad (0.5)^{-3}\geqslant x\geqslant(0.5)^{-\frac{3}{2}},\quad\therefore\quad 2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 8$。…(答)

（2）对（1）中的x $\dfrac{3}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 3$,所以设 $\log_2 x=u$,

$$f(x)=\left(\log_2\frac{x}{3}\right)\left(\log_2\frac{x}{4}\right)=(u-\log_2 3)(u-2),$$

$$=u^2-(2+\log_2 3)u+2\log_2 3,$$

$$=\left(u-\frac{2+\log_2 3}{2}\right)^2+2\log_2 3-\left(1+\frac{1}{2}\log_2 3\right)^2,$$

$$=\left(u-\frac{2+\log_2 3}{2}\right)^2-\left(1-\frac{1}{2}\log_2 3\right)^2。$$

可是$\dfrac{2+\log_2 3}{2}=\log_2\sqrt{12}$，所以 $\dfrac{3}{2}<\log_2\sqrt{12}<3$，且

$$\log_2\sqrt{12}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+3\right)=\log_2\sqrt{12}-\frac{9}{4}$$

$$=\log_2\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}<\log_2 1=0,$$

可见抛物线的轴靠近 $u=\dfrac{3}{2}$。因而，$f(x)$当 $u=3$

从而当 $x=8$ 时取得最大值：$3-\log_2 3$。

$u=\dfrac{2+\log_2 3}{2}$，从而当 $x=2\sqrt{3}$时取最小值：$-(1-\dfrac{\log_2 3}{2})^2$

(答)$M=3-\log_2 3$；$L=-(1-\dfrac{1}{2}\log_2 3)^2$。

4 （概率分布）

研究（1）设 $X=r$ 的概率为$P(r)$，则有

$$E(x)=\Sigma rP(r),\ V(X)=E(x^2)-(E(x))^2,$$

（2）X呈奇数的概率设为 p，呈偶数的概率设为 q，X取得奇数 3 次以上的概率为：

$$C_7^3P^3q^4+C_7^4P^4q^3+C_7^5P^5q^2+C_7^6P^6q+C_7^7p^7$$
$$=1-(C_7^0q^7+C_7^1pq^6+C_7^2p^2q^5)$$

为此，先求出余事件的概率，然后从1减去余事件的概率即可。

解答（1）u 表示 $X=r$ 情况的个数，依次计算 $P(r)=\frac{u}{36}$、$rP(r)$等，再求出$E(X)$、$V(X)$，得下表

r	u	$P(r)$	$rP(r)$	r^2	$r^2P(r)$
0	6	$\frac{3}{18}$	0	0	0
1	10	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	1	$\frac{5}{18}$
2	8	$\frac{4}{18}$	$\frac{8}{18}$	4	$\frac{16}{18}$
3	6	$\frac{3}{18}$	$\frac{9}{18}$	9	$\frac{27}{18}$
4	4	$\frac{2}{18}$	$\frac{8}{18}$	16	$\frac{32}{18}$
5	2	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	25	$\frac{25}{18}$
和	36	1	$E(X)=\frac{35}{18}$		$E(X^2)=\frac{105}{18}(=\frac{35}{6})$

$$\therefore\ E(X)=\frac{35}{18},\ V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{665}{324}。$$

…（答）

（2）由上表，进行一次试验，X是奇数的概率以及是偶数的概率都是$\frac{1}{2}$，从而重复进行7次试验，X在不足3次试验中呈奇数的概率为

$$C_7^0(\tfrac{1}{2})^7+C_7^1(\tfrac{1}{2})^7+C_7^2(\tfrac{1}{2})^7=\frac{1+7+21}{128}=\frac{29}{128},$$

因而，所求概率为　$1-\frac{29}{128}=\frac{99}{128}$。　…(答)

5　(函数的增减与极值，面积计算)

研究　$f(x)=\frac{q(x)}{p(x)}$时　$f'(x)$

$$=\frac{p(x)q'(x)-q(x)p'(x)}{(p(x))^2},$$

所以，由若在 $x=\alpha$ 有极值应 $f'(\alpha)=0$ 得关系式

$$f(\alpha)=\frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}=\frac{q'(\alpha)}{p'(\alpha)}。$$

解答（1）　$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2ax+b)-2x(ax^2+bx+a+1)}{(x^2+1)^2}$，

因为当　$x=-\sqrt{3}$时有极值0，所以令

$$f'(-\sqrt{3})=0 \qquad \cdots①$$

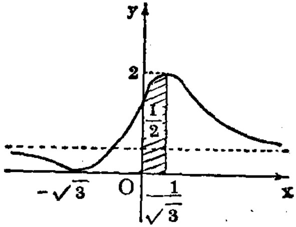
又由　$f(-\sqrt{3})=0$，　…②

由①、②解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=\sqrt{3}$。

(答)　$a=\frac{1}{2}$，$b=\sqrt{3}$。

（2）因　$f'(x)=\frac{-(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^2}$，所以

$f(x)$在 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$处取极大值2。因而$y=f(x)$的草图如下图所示。故



$$S=\int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}}\frac{x^2+2\sqrt{3}\,x+3}{2(x^2+1)}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\log(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}}+\int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}}\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{4}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{6}(\sqrt{3}+3\sqrt{3}\log\frac{4}{3}+\pi)。$$

…（答）

〔注意〕 $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}}\frac{1}{x^2+1}dx$，设 $\operatorname{tg}\theta=x$，化为 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$ 求出之。

6 （定积分的计算，无穷级数）

研究 （1）以 $\sin t=u$ 置换，化做简单的部分积分问题。在（2）中变做 $\sum_{n=1}^{m}\frac{an+b}{(n+2)(n+3)(n+4)}$。对此或者把分子变形为 $a(n+4)+(b-4a)$ 分成两个，或者分成部分分数。多数的场合，以前法比较容易。

解答 （1）设 $\sin t=u$。$\cos t\,dt=du$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t(1-\sin t)^{\frac{n-1}{2}}\cos t dt=\int_0^1 2u(1-u)^{\frac{n-1}{2}}du,$$

$$=\left[2u\left\{-\frac{2}{n+1}(1-u)^{\frac{n+1}{2}}\right\}\right]_0^1-\int_0^1\left\{-2\cdot\frac{2}{n+1}\right.$$

$$\left.(1-u)^{\frac{n+1}{2}}\right\}du,=\frac{8}{(n+1)(n+3)}。\qquad \cdots(答)$$

（2）$\sum_{n=1}^{m}(n+1)(a_n-a_{n+1})$.

$$=\sum_{n=1}^{m}(n+1)\left\{\frac{8}{(n+1)(n+3)}-\frac{8}{(n+2)(n+4)}\right\},$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{8(2n+5)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{16(n+4)-24}{(n+2)(n+3)(n+4)},$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{16}{(n+2)(n+4)}-\sum_{n=1}^{m}\frac{24}{(n+2)(n+3)(n+4)},$$

$$=16\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{m+3}\right)-12\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{(m+3)(m+4)}\right)。$$

故所求和为 $\frac{16}{3}-\frac{12}{3\cdot4}=\frac{13}{3}$。 … (答)

✧文 科 系✧

〔考期〕 3 月 4 日 〔时间〕 120分钟 〔评分〕 100分

1 关于实数 x、y 由下述条件 A 确定：

$A: x\geqslant0$ 且 $x^2-29y^2\geqslant0$。

（1）点（x、y）同时满足条件 A 和 $5y-x+2\geqslant0$，求 y 的范围。

（2）试求同时满足条件 A 和 $5y-x+2=0$ 的一切整数组（x、y）。

2 关于定义 在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 上的函数：$f(\theta)=a\sin^2\theta+b\cos^2\theta+2a\sin\theta$。

回答下列各问。其中，a、b 是实数且$a\neq0$。

（1）试证满足 $f(\theta)=0$ 的 θ 值有二个；

（2）如果 $f(\theta)$ 当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$时有最大值 7，试求 a 和 b 的值。

3 在 $\varDelta ABC$ 中，使 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 的点 Q、R 分别在 AC、AB 上。设线段 BQ、CR 交于点 I，线段AI 的延长线和边 BC 交于点 P。

（1）试用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{BQ}$、$\overrightarrow{CR}$，

（2）如果 $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{CR}$，试求 λ、μ，

（3）试证：$\overrightarrow{BP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，并求$\varDelta PQR$和 $\varDelta ABC$ 的面积的比。

4 讨论适合下列(a)、(b) 的语言：

（a）用 7 个相异的文字，其中 3 个是元音字母、4 个是辅音字母。

（b）满足下列 4 个条件的文字，排成一列的叫做单词。但是也包括一个文字的情形。

① 由 8 个以下的文字组成，

② 必须用元音字母结尾，