浙江省新世纪教改项目
杭州市重点学科（应用数学）建设项目
杭州师范大学校级重点专业（信息与计算科学）建设项目

SHUXUE FENXI WENTI JIANGXI

数学分析问题讲析

◎ 沈忠华　虞旦盛　于秀源　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江省新世纪教改项目
杭州市重点学科(应用数学)建设项目
杭州师范大学校级重点专业(信息与计算科学)建设项目

数学分析问题讲析

沈忠华　虞旦盛　于秀源　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析问题讲析/沈忠华，虞旦盛，于秀源编著．—杭州：浙江大学出版社，2010.4(2010.8 重印)

杭州市重点学科（应用数学）建设项目、杭州师范大学校级重点专业（信息与计算科学）建设项目和浙江省新世纪教改项目资助

ISBN 978-7-308-07496-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①沈…②虞…③于… Ⅲ.①数学分析 Ⅳ.①017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 062148 号

数学分析问题讲析

沈忠华　虞旦盛　于秀源　编著

责任编辑　阮海潮(ruanhc@zju.edu.cn)

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）

（网址：http://www.zjupress.com）

排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷　杭州杭新印务有限公司

开　　本　710mm×1000mm　1/16

印　　张　12.5

字　　数　245 千

版 印 次　2010 年 5 月第 1 版　2010 年 8 月第 2 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-07496-4

定　　价　27.00 元

目　　录

第1章 阶的估计的基础知识

无穷大量与无穷小量的阶，是数学分析中的基本概念之一. 本章主要介绍无穷量的阶的概念以及阶的比较，O 与 o 的基本运算规则和有关的基本定理及其简单应用.

在本章的叙述中，经常涉及变量或函数的极限过程. 这些变量或函数的定义域及其应该满足的条件，一般情况下，都是显而易见的，所以为了叙述简洁起见，除确属必要外，将不一一列举.

在本书的以下叙述中，除特别声明外，符号"∞"均表示"$+\infty$".

1.1 基本概念

定义 1.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷小量，记为

$$f(x)=o(1),x\to x_0.$$

特别地，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=0$，则称 a_n 当 $n\to\infty$ 时是无穷小量，记为

$$a_n=o(1),\ n\to\infty.$$

例如，当 $x\to\infty$ 时，

$$\frac{x+\sin x}{x^2+5x-2},\ \frac{3x}{e^x+\log x},\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x},\ \log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin x}{x}$$

都是无穷小量. 下面的量也是无穷小量：

$$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2},x\to 1;x\log(x\sin x),x\to 0;e^{x-1}-1,x\to 1.$$

定义 1.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷大量. 特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$，则称 a_n 当 $n\to\infty$ 时是无穷大量.

例如，下面的一些量都是无穷大量：

$$x^\alpha+A(\log x)^\beta,\alpha>0,\ x\to\infty;\frac{1}{\sin x}+\cos x+1,x\to 0;\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},n\to\infty.$$

无穷大量与无穷小量的概念，只反映变量的变化趋势，对于变量的其他性质

并未做出任何描述. 而在具体问题中,除了变量的变化趋势,我们更关心的却是对于这种变化趋势的量的方面的了解. 事实上,经常需要比较变量的变化趋势在量的方面的差异,并通过对这些差异的分析,找出它们的内在联系. 在这些差异中,最明显的一个就是变化"速度"的不同. 例如,变量$\sqrt{x}$, x^2,与x^3当$x\to+\infty$时虽都是无穷大量,但是它们趋于∞的"速度"是大不相同的:由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\infty$,这三个变量趋于$\infty$的"速度"是无法相比的. 粗略地说,$x^2$趋于$\infty$的"速度"相对于$\sqrt{x}$趋于$\infty$的"速度",是一个无穷大量. x^3相对于x^2亦有这种关系.

当然,变量之间这种增长(或变化)"速度"的差异,并不单单存在于无穷大量或无穷小量之间. 例如,分别取a_n及b_n为

$$a_n:\ n,\frac{n-1}{n},\log n;$$

$$b_n:\ \sqrt{n+1},\sin\frac{1}{n},\cos\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

则在a_n与b_n之间也有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$的关系.

为了表明变量在变化趋势方面的差异,我们引进无穷量的"阶"的概念.

定义 1.3 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称$f(x)$对于$g(x)$当$x\to x_0$时是无穷小量,记为

$$f(x)=o(g(x)),x\to x_0.$$

若$f(x)$与$g(x)$都是无穷大量,则称$f(x)$是比$g(x)$低阶的无穷大量.

若$f(x)$与$g(x)$都是无穷小量,则称$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小量.

定义 1.4 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称$f(x)$与$g(x)$当$x\to x_0$时是等价的,记为

$$f(x)\sim g(x),x\to x_0\ \text{或}\ f(x)=(1+o(1))g(x),\ x\to x_0.$$

例如,$\sin x\sim x,\ x\to 0$;$e^x-1\sim x,\ x\to 0$.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a,a\neq 0$,则

$$f(x)=(a+o(1))g(x)=a(1+o(1))g(x),\ x\to x_0.$$

定义 1.5 设$g(x)>0$,若存在常数$A>0$,使得$|f(x)|\leqslant Ag(x),x\in(a,b)$成立,则称$g(x)$是$f(x)$的强函数,记为

$$f(x)=O(g(x)),x\in(a,b).$$

显而易见,改变$f(x)$与$g(x)$在有限个点的数值,不影响强函数关系.

例如,$\cos x=O(1)$, $-\infty<x<\infty$;$\log x=O(x)$, $x\geqslant 1$.

注意,在定义 1.5 中,常数 A 被称为"大 O 常数",它们与变量 x 无关,在一般情况下,这点不作特别说明.但是,"大 O 常数"可能与参变量有关,例如,在 $\sin xy = O(1)$ 中,"大 O 常数"与参数 y 无关;但在 $\sin xy = O(x)$ 中,"大 O 常数"就与参数 y 有关,此时我们常用 $O_y(\cdots)$ 代替 $O(\cdots)$,以表明大 O 常数与参数 y 有关,例如 $\sin xy = O_y(x)$.在不致引起误会,或这个参数的引进对整个问题的处理没有影响时,也可以略去不写.

定义 1.6　假设当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大量(小量),且存在常数 $A > 0, B > 0$,使得 $Af(x) \leqslant g(x) \leqslant Bf(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是同阶无穷大量(小量),记为

$$f(x) \approx g(x), x \to x_0.$$

【例 1.1】　设 $\varepsilon > 0$ 及 A 是任意常数,则对于任意的 $a > 0$,有

$$x^A = o((1+a)^{\varepsilon x}), x \to \infty, \tag{1.1}$$

$$(\log x)^A = o(x^{\varepsilon}), x \to \infty, \tag{1.2}$$

$$(f(x))^A = o(e^{\varepsilon f(x)}), x \to \infty, \tag{1.3}$$

其中 $f(x)$ 是单调上升的函数,且

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

解　不妨假定 $A \geqslant 0$,以 $[x]$ 表示 x 的整数部分(即是不超过 x 的最大整数),设 $n = [x], m = [A]+1$,则当 $x \to \infty$ 时,显然也有 $n \to \infty$,因此,当 $n \geqslant 2m+1$ 时,有

$$\begin{aligned}(1+a)^x &\geqslant (1+a)^n \geqslant c_n^{m+1} a^{m+1} \geqslant \frac{a^{m+1}}{(m+1)!}(n-m)^{m+1} \\ &\geqslant \frac{a^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{a^{m+1}}{2^{m+1}} \cdot n^{m+1}.\end{aligned}$$

由于 a 与 m 都是常数,所以当 $n \to \infty$ 时,有

$$\frac{(1+a)^x}{x^A} \geqslant \frac{a^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!} \frac{n^{m+1}}{(1+n)^m} \geqslant \frac{a^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \cdot n,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^A}{(1+a)^x} = 0. \tag{1.4}$$

取 $x = \varepsilon y$,则上式成为

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^A}{(1+a)^{\varepsilon y}} = 0;$$

这就是(1.1)式.

在(1.4)式中取 $a = \mathrm{e} - 1, x = \varepsilon \log y$，则

$$\lim_{y \to \infty} \frac{(\log y)^A}{y^\varepsilon} = 0,$$

这就是(1.2)式.

在(1.2)式中取 $x = \mathrm{e}^{f(y)}$，则当 $y \to \infty$ 时，$x \to \infty$，由此得到(1.3)式.

1.2 O 与 o 的运算

下面是有关 O 与 o 的基本运算法则：

法则 1.1 若 $f(x)$ 是无穷大量，$x \to x_0$，并且 $\varphi(x) = O(1)$，则

$$\varphi(x) = o(f(x)), x \to x_0.$$

法则 1.2 若 $f(x) = O(\varphi), \varphi = O(\psi)$，则

$$f(x) = O(\psi).$$

法则 1.3 若 $f(x) = O(\varphi), \varphi = o(\psi)$，则

$$f(x) = o(\psi).$$

法则 1.4 $O(f) + O(g) = O(f + g)$.

法则 1.5 $O(f)O(g) = O(fg)$.

法则 1.6 $o(1)O(f) = o(f)$.

法则 1.7 $O(1)o(f) = o(f)$.

法则 1.8 $O(f) + o(f) = O(f)$.

法则 1.9 $o(f) + o(g) = o(|f| + |g|)$.

法则 1.10 $o(f)o(g) = o(fg)$.

法则 1.11 $(O(f))^k = O_k(f^k)$，k 是正数.

法则 1.12 $(o(f))^k = o(f^k)$.

法则 1.13 若 $f \sim g, g \sim \varphi$，则 $f \sim \varphi$.

法则 1.14 若 $f = o(g), g \sim \varphi$，则 $g \sim \varphi \pm f$.

以上法则都易验证，我们仅举几条证明如下，其余请读者补足.

法则 1.6 的证明：

设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$，且

$$|g(x)| \leqslant Mf(x), x \in (a,b).$$

则

$$0 \leqslant \lim_{x \to x_0} \left| \frac{\varphi(x)g(x)}{f(x)} \right| \leqslant M \lim_{x \to x_0} |\varphi(x)| = 0,$$

即

$$\varphi(x)g(x)=o(f(x)).$$

法则 1.11 的证明：

设 $|g(x)|\leqslant Mf(x), x\in(a,b)$，则

$$|g(x)|^k\leqslant M^kf^k(x), x\in(a,b),$$

即

$$(g(x))^k=O_k(f^k(x)), x\in(a,b).$$

注意，一般地，“大 O 常数”与 k 有关. 请读者举一个例子.

上面的基本法则虽然简单，却使我们能够容易地处理大量关于阶的估计问题. 例如，当 $x\to\infty$ 时，

$$5x+\sin x\sim 5x; 3\mathrm{e}^x+x^4\sim 3\mathrm{e}^x; x^2+\log(\log\log x)^{12}=x^2(1+o(1));$$

$$8\mathrm{e}^x+x^3\log x=8\mathrm{e}^x(1+o(1)); 2+\sin\frac{1}{x}=O(1);$$

当 $x\to 0$ 时，

$$x^2+x^3=x^2(1+o(1))=o(x); x\log x+x^2(\log\log x)^3=o(\sqrt{x});$$

$$\mathrm{e}^x\log\frac{1}{x}=o\left(\frac{1}{x}\right); x\cos x+\sin x=O(x).$$

注 1　在上面的基本运算中，我们没有说到关于反函数的性质. 一般说来，如果 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 都是增函数，$\tilde{\varphi}(x)$ 与 $\tilde{f}(x)$ 分别表示它们的反函数，那么，由

$$\varphi(x)=o(f(x))$$

不能得到

$$\tilde{f}(x)=o(\tilde{\varphi}(x)).$$

这可从下例看出：

$$f(x)=\mathrm{e}^x, \varphi(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}, x\to\infty.$$

注 2　等式

$$\varphi=O(f)\text{ 或 }\varphi=o(g)$$

其实是不等式，只不过写成等式的形式罢了. 因此，一般地，由

$$f=O(g), f=O(h)$$

不能得到任何关于 g 和 h 的关系的信息. 例如,我们有

$$\sin x = O(1), \sin x = O(2), \sin x = O(x), 0 < x < +\infty,$$

但是从上面的“等式”难以得到 1,2 及 x 的关系.

1.3 几个基本公式及应用

定理 1.1 在 x_0 的某个邻域内,若 $f^{(n)}(x)$ 存在,且 $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$,则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O(|x-x_0|^n)$$

在 x_0 的该邻域内成立.

这是 Taylor 公式的推论.

由定理 1.1 立即可以得到下面的推论:

推论 1.1 存在正数 δ 使得下面的结论成立:

(1) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + O(x^5)$, $|x| < \delta$;

(2) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)$, $|x| < \delta$;

(3) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)$, $|x| < \delta$.

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$, $|x| < \delta$.

(5) $e^x = 1 + x + O(x^2)$, $|x| < \delta$.

更一般地,有下面的推论:

推论 1.2 若 $f(x)$ 满足条件

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,$$

则存在正数 δ 使得下面的结论成立:

(1) $\sin f(x) = f(x) - \dfrac{f^3(x)}{3!} + O(|f^5(x)|)$, $|x - x_0| < \delta$;

(2) $\cos f(x) = 1 - \dfrac{f^2(x)}{2} + O(f^4(x))$, $|x - x_0| < \delta$;

(3) $\log(1 + f(x)) = f(x) - \dfrac{f^2(x)}{2} + O(|f^3(x)|)$, $|x - x_0| < \delta$;

(4) $(1 + f(x))^a = 1 + af(x) + O(f^2(x))$, $|x - x_0| < \delta$;

(5) $e^{f(x)} = 1 + f(x) + O(f^2(x))$, $|x - x_0| < \delta$.

例如,对于充分小的 x,有

$$\begin{aligned}\log(1+\sin x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + O(|\sin x|^3)\\ &= x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^2 + O(x^3)\\ &= x - \frac{1}{2}(x + O(x^3))^2 + O(x^3)\\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3).\end{aligned}$$

我们在以后几章中会看到,定理 1.1 及其推论在处理数学问题时有广泛的应用. 下面,举几个例子.

【例 1.2】 设 $a = O(1)$, $b = O(1)$,则当 $n \to \infty$ 时,

$$(n+a)^{n+b} = n^{n+b}e^a\left[1 + \frac{a\left(b - \frac{a}{2}\right)}{n} + O(n^{-2})\right].$$

解 记 $a_n = (n+a)^{n+b}$,则

$$\begin{aligned}\log a_n &= (n+b)\log(n+a) = (n+b)\left(\log n + \log\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right)\\ &= (n+b)\log n + (n+b)\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{a^3}{n^3}\right)\right)\\ &= (n+b)\log n + a + a\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}a_n &= n^{n+b}\exp\left(a + a\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= n^{(n+b)}e^a\left(1 + a\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).\end{aligned}$$

作为例 1.2 结论的直接推论,我们有

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} = \exp\left[a + \frac{a\left(b - \frac{a}{2}\right)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

令 $b = 0$,就得到

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

【例 1.3】 设 $f(x) \to \infty$, $x \to x_0$, $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是多项式:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0.$$

则当 $x \to x_0$ 时，有

$$(1)\ P(f(x))+Q(f(x))\begin{cases}\sim a_n(f(x))^n, & \text{当 } n>m \text{ 时},\\ \sim (a_n+b_n)(f(x))^n, & \text{当 } n=m, a_n+b_n\neq 0 \text{ 时},\\ \sim b_m(f(x))^m, & \text{当 } n<m \text{ 时};\end{cases}$$

(2) $P(f(x))Q(f(x)) \sim a_nb_m\,(f(x))^{n+m}$；

(3) $\dfrac{P(f(x))}{Q(f(x))} \sim \dfrac{a_n}{b_m}\,(f(x))^{n-m}$.

解 我们仅给出结论(3)的证明，结论(1)与(2)的证明与之类似.

由定理条件及上节基本法则 1.9，当 $x \to x_0$ 时，有 $\dfrac{1}{f(x)}=o(1)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{P(f)}{Q(f)}&=\frac{a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f+a_0}{b_mf^m+b_{m-1}f^{m-1}+\cdots+b_1f+b_0}\\&=\frac{a_nf^n}{b_mf^m}\cdot\frac{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}f^{-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}f^{-n+1}+\frac{a_0}{a_n}f^{-n}\right)}{\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_m}f^{-1}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}f^{-m+1}+\frac{b_0}{b_m}f^{-m}\right)}\\&=\frac{a_n}{b_m}f^{n-m}\cdot\frac{1+o(1)}{1+o(1)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(f(x))}{Q(f(x))}\left(\frac{a_n}{b_m}f^{n-m}(x)\right)^{-1}=\lim_{x\to x_0}\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=1.$$

结论(3)得证.

【例 1.4】 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}}-\sqrt{x}\right), 0<\alpha<2.$$

解 当 $x\to\infty$ 时，由于 $0<\alpha<2$，有

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}}&=\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x^{-1}+x^{\frac{\alpha}{2}-2}}\right)^{\frac12}\\&=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+x^{\frac{\alpha}{2}-1}}\right)^{\frac12}\\&=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+x^{\frac{\alpha}{2}-1}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+x^{\frac{\alpha}{2}-1}}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\&=\sqrt{x}+\frac12(1+x^{\frac{\alpha}{2}-1})^{\frac12}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

$$=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x^{\frac{a}{2}-1}+O(x^{a-2})\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\sqrt{x}+\frac{1}{2}+o(1),$$

因此,所求极限是$\frac{1}{2}$.

【例 1.5】 判断无穷积分或无穷级数的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x^2}}-1)^a}{\log^b\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(1+n)}\sin\frac{1}{n^{\beta}},\beta>0$.

解 首先注意,本例中的级数(或积分)的通项(或被积函数)对于充分大的 n(或 x)皆取正值(或恒负值).

(1) 当 $x\to\infty$ 时,

$$\frac{(e^{\frac{1}{x^2}}-1)^a}{\log^b\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^a}{\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^b}=\frac{1}{x^{2a-b}}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

因此,由比较判别法可知,

$$\int_1^{\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x^2}}-1)^a}{\log^b\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx\begin{cases}\text{收敛,当 } 2a-b>1 \text{ 时,}\\ \text{发散,当 } 2a-b\leqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

(2) 当 $n\to\infty$ 时,由于 $\beta>0$,有

$$\frac{1}{\log(1+n)}\sin\frac{1}{n^{\beta}}=\frac{1}{\log(1+n)}\left(\frac{1}{n^{\beta}}+O\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n^{\beta}\log(1+n)}\left(1+O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)\right),$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(1+n)}\sin\frac{1}{n^{\beta}}\begin{cases}\text{收敛,当 } \beta>1 \text{ 时,}\\ \text{发散,当 } 0<\beta\leqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

定理 1.2 设 $b_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$,且 $a_n=o(b_n)$, $n\to\infty$,则

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=o\left(\sum_{n=1}^{N}b_n\right),N\to\infty.$$

证明 对任意的 $\varepsilon>0$,必有 $M>0$ 存在,使得当 $n>M$ 时,有 $|a_n|<\varepsilon b_n$,因此,对任意的 $N>M$,有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{M} a_n\right| + \varepsilon \sum_{n=M+1}^{N} b_n.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ 可知，对给定的 $\varepsilon > 0$，必有 $N_1 > M$ 存在，使得

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{N} b_n > \sum_{n=1}^{M} |a_n|, N > N_1.$$

于是
$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| < 2\varepsilon \sum_{n=1}^{N} b_n, N > N_1,$$

由此得到要证明的结论.

另证 记 $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$，由假设条件知，$B_N \to \infty (N \to \infty)$，以及 $a_n = O(b_n)$. 因此，当 $N \to \infty$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \leqslant \left|\sum_{k<\sqrt{B_n}} a_k\right| + \varepsilon \sum_{k\geqslant\sqrt{B_N}} b_k$$
$$= O(1)\sqrt{B_N} + o(1)(B_N - \sqrt{B_N}) = o(1)B_N.$$

注 这是一个有广泛应用的定理. 极限论中 Stolz 定理和 L'Hospital 法则都是它的推论.

1.4 分部求和公式

定理 1.3(分部求和公式) 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geqslant 1$,

则
$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} S_n (b_n - b_{n+1}) + S_N b_N. \tag{1.5}$$

证明 记 $S_0 = 0$，由 S_n 的定义，有

$$a_n = S_n - S_{n-1}, n = 1, 2, \cdots.$$

因此，
$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) b_n = \sum_{n=1}^{N} S_n b_n - \sum_{n=1}^{N} S_{n-1} b_n$$
$$= \sum_{n=1}^{N} S_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n b_{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} S_n (b_n - b_{n+1}) + S_N b_N.$$

定义函数 $S(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n, x \geqslant 1; S(x) = 0, x < 1.$

假设存在可微函数 $b(x)$ 使得对于正整数 n，有 $b(n) = b_n$，则由

$$\begin{aligned}\int_1^N S(x)b'(x)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} S(x)b'(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} S_n \int_n^{n+1} b'(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} S_n(b(n+1)-b(n)).\end{aligned}$$

可知,(1.5) 式可以写成下面的形式:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b(n) = S(N)b(N) - \int_1^N S(x)b'(x)\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

利用(1.6) 式,有时可以更方便地借助已知的积分公式进行估计.

【例 1.6】 证明

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kt \log k = \begin{cases} O\left(\frac{1}{t}\log n\right), \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \pi; \\ O(n^2 t \log n), 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}. \end{cases}$$

解 在(1.6) 式中,取

$$b(x) = \log x, a_n = \sin nt,$$

则由

$$|S(x)| = \Big|\sum_{k \leqslant x} \sin kt\Big| = O\left(\frac{1}{t}\right), t \neq 0$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin kt \log k &= S(n)\log n - \int_1^n S(x)x^{-1}\mathrm{d}x \\ &= O\left(\frac{1}{t}\right)\log n + O\left(\frac{1}{t}\right)\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= O\left(\frac{1}{t}\log n\right), t \neq 0.\end{aligned}$$

另一方面,当 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$ 时,有

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kt \log k \leqslant t\sum_{k=1}^{n} k\log k = O(n^2 t \log n).$$

定理 1.4 设 $\{b_n\}$ 是递减的正数序列,存在正常数 m, M,使得

$$m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M, n = 1,2,3,\cdots,$$

则对于任意的自然数 n，有

$$b_1 m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant b_1 M.$$

证明 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则

$$S_n - m \geqslant 0, S_n - M \leqslant 0, n = 1,2,3\cdots.$$

由此，以及 b_n 的单调性，由定理 1.3 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \\ &= (S_n - m) b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - m)(b_k - b_{k+1}) + m b_1 \\ &\geqslant m b_1.\end{aligned}$$

同理可证

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M b_1.$$

定理 1.5（Abel 定理） 设 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$，则

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s.$$

证明 记 $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$，则 $S_n - s \to 0, n \to \infty$. 由定理 1.3，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k &= S_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k (x^k - x^{k+1}) \\ &= S_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (S_k x^k - s x^k) + (1-x) s \sum_{k=0}^{n-1} x^k.\end{aligned}$$

对于固定的 $|x| < 1$，当 $n \to \infty$ 时，显然有

$$S_n x^n = O(1) x^n = o(1), \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{1-x}(1 + o(1)).$$

因此，

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (S_k - s) x^k + s. \tag{1.7}$$

取 $m = [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]$，则当 $x \to 1-0$ 时，有 $S_k - s = o(1), k \geqslant m$，于是