

编 者 的 话

本书内容是根据高等学校理科数学教材编写大纲讨论会上所制定的化、生、地类《高等数学》教材编写大纲编写的。全书分三册出版。第一册包括一元函数微积分、常微分方程和概率统计初步；第二册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、富里哀级数与富里哀积分、偏微分方程初步；第三册内容为矩阵与群论初步等。其中群论部分是为适应量子化学、晶体化学等有关专业的需要而编写的。各校可根据实际情况予以取舍。

本书前四章由上海师范学院张方盛同志参照1966年谭肅、陈开明、邹继福、吴卓人等同志合编的，但未及出版的《高等数学简明教程》上册编写的。由于时间紧迫，其中微分、微分方程部分的基本内容，几乎全部的习题以及不少例题等都采用了原稿。第六、七、八各章由上海师范大学林克伦副教授编写，第五、九、十各章由中山大学关伟德同志编写，最后三章由上海师范大学朱福祖副教授编写。

先后参加本书编写与审稿的还有复旦大学吴卓人、北京大学刘婉如、上海师范学院徐锦龙、中山大学周健伟和吉林大学牛凤文等同志。

在全书的编写与审稿过程中，得到上海师范大学程其襄、北京大学冷生明两位教授的指导，特于此致谢。

一九七八年五月

目 录

引言	1
第一章 函数与极限	4
§ 1.1 函数	4
1. 常量与变量(4) 2. 函数概念(4) 3. 建立函数关系举例(9) 4. 基本初等函数(12)	
§ 1.2 函数的极限	15
1. 函数极限的定义(16) 2. 极限的四则运算法则(19) 3. 极限存在的两个准则及两个重要极限(21) 4. 无穷小量及其比较(27)	
§ 1.3 函数的连续性	30
1. 函数的连续性定义(30) 2. 闭区间上连续函数的性质(33) 3. 用对分法求三次方程的一个根(33)	
第二章 一元函数的微分学	38
§ 2.1 微商的概念	38
1. 几个实例(39) 2. 微商的概念(41) 3. 微商的几何意义(42) 4. 几个基本初等函数的微商(44)	
§ 2.2 微商运算法则和公式	48
1. 微商的四则运算法则(48) 2. 复合函数的微商法则(52) 3. 指数函数与幂函数的微商法则(55) 4. 隐函数与反三角函数的微商法则(58)	
§ 2.3 变化率	64
§ 2.4 高阶导数	69
§ 2.5 微商的应用	73
1. 微分中值定理(73) 2. 函数的单调性(76) 3. 函数的极大(小)值与最大(小)值(78) 4. 函数作图(86)	
§ 2.6 微分	90
1. 微分的概念(90) 2. 微分的运算及基本公式、法则(92) 3. 微分的应用(97)	
第三章 积分学	105
§ 3.1 不定积分的概念与简单性质	105

§ 3.2 换元积分法	110
1. 第一类换元法(111) 2. 第二类换元法(114)	
§ 3.3 分部积分法	118
§ 3.4 有理分式的积分	121
1. 几类简单分式的不定积分(121) 2. 真分式的部分分式法(123)	
§ 3.5 积分表的使用法	126
§ 3.6 定积分的定义、性质及计算方法	128
1. 定积分的概念(129) 2. 定积分的性质(135) 3. 定积分的计算(136)	
4. 定积分的近似计算(141)	
§ 3.7 定积分的应用	145
1. 平面图形的面积(145) 2. 旋转体的体积(149) 3. 已知平行截面面积的 立体体积(152) 4. 弧长(154) 5. 功(156) 6. 流量的计算问题(159)	
7. 函数的平均值(160)	
§ 3.8 广义积分	162
1. 连续函数在无限区间上的积分(163) 2. 无界函数的积分(165)	
第四章 常微分方程	168
§ 4.1 基本概念	168
§ 4.2 一阶微分方程	171
1. 可分离变量的微分方程(171) 2. 一阶线性微分方程(175)	
§ 4.3 二阶线性常系数齐次方程	180
§ 4.4 二阶线性常系数非齐次方程	184
§ 4.5 微分方程的应用	189
1. 在动力学中的应用(189) 2. 在可逆化学反应中的应用(192) 3. 在电 学中的应用(193)	
第五章 概率论与数理统计	200
§ 5.1 概率论初步	202
1. 基本概念(202) 2. 随机变量及其分布(222) 3. 随机变量的数字特征 (236) 4. 大数定律和中心极限定理(248)	
§ 5.2 数理统计简介	253
1. 基本概念(254) 2. 参数估计与假设检验(259) 3. 回归分析(276)	
4. 正交试验设计(288)	
附录 I 简单积分表	309
附录 II 平面解析几何	317

引 言

本书是为适应化学、生物、地理等各专业的需要而编写的，是为了给上述有关专业的同学打下必要的、初步的数学基础。

本书的重点是微积分。微积分是研究什么的呢？让我们来考察如下的两个典型例子。

例 1 自由落体的瞬时速度

物体受重力作用自由落下，运动开始时 $t=0$ ，到任一时刻 t 时下落的路程 s 由公式

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad (g \text{ 是重力加速度})$$

确定。这个运动不是等速的，物体在下落时间内每一时刻的速度都不同。今求物体下落到时刻 $t=1$ (秒) 时的“瞬时速度 v ”。

设落体在 1 (秒) 时的位置为 M_0 ，经过的路程为 $s_0 = OM_0$ (图 0-1)，这里

$$s_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 1^2 = \frac{1}{2} g.$$

再设落体在时刻 t 的位置为 M ，经过的路程 $s = OM$ 是

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$



图 0-1

从第 1 秒到 t 秒这段时间内，落体的平均速度 $\bar{v}$ 是

$$\bar{v} = \frac{s - s_0}{t - 1} = \frac{\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g \cdot 1^2}{t - 1} = \frac{1}{2} g \frac{t^2 - 1}{t - 1} = \frac{1}{2} g (t + 1).$$

$\bar{v}$ 刻划了在这段时间内落体的平均快慢程度，但不能刻划 $t=1$ 这一“瞬间”物体下落的快慢程度。不过，只要 t 愈接近 1， $\bar{v}$ 就愈接

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

由上式可知, 当 n 无限增大 (记为 $n \rightarrow \infty$, 符号 ∞ 叫做无穷大) 时, A_n 就无限接近 $\frac{1}{3}$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $A_n \rightarrow \frac{1}{3}$. 数值 $\frac{1}{3}$ 就是这个平面图形的面积 A .

采用前面的说法, A 是 A_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限. 由于 A_n 是 n 个小矩形面积之和. 因此这个极限又称为“和数极限”.

和数极限问题, 在自然现象中也很普遍. 如力学中求变力做功、质量中心及转动惯量; 物理、化学中求非均匀物体的质量、热量及压力; 几何学中求曲线长度、面积及体积等等. 把这些具体问题概括为一般数学问题, 并找出解决他们的简便方法 (积分方法), 这就是积分学的主要课题.

类似于上述问题, 在物理、化学中屡见不鲜, 单纯用初等数学是不能解决的, 要用微积分才能解决. 进一步讲, 有些问题单靠微积分也不能奏效. 因而还需引进种种新的概念和新的方法, 这就是在下面各章将要逐步展开的内容, 如微分方程、概率统计、群论初步等.

学习本书时, 要坚持以马列主义、毛泽东思想为指导, 坚持理论联系实际的方向, 要求正确理解基本概念、基本理论, 熟练地掌握运算方法, 不断地提高分析问题和解决问题的能力.

化过程中,当 t 取某值 t_0 时,按照依赖关系, s 就有一确定值 s_0 与之对应. 这个依赖关系是:把 t_0 平方,再乘以常数 $\frac{1}{2}g$,就得到 s 的对应值 s_0 :

$$s_0 = \frac{1}{2}gt_0^2.$$

例 2 在引言的例 2 中, A_n 和 n 也是两个变量. 它们之间有关系式:

$$A_n = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \quad (n \text{ 为正整数}).$$

这里 n 和 A_n 的地位与上例中 t 和 s 的地位是一样的,只不过 n 和 A_n 的依赖关系及 n 的变化范围与上例不同而已.

例 3 当温度一定时,一定质量的气体的容积 V 与压力 P 成反比(波义耳定律):

$$V = \frac{C}{P}.$$

其中 C 是比例常数.

例 4 气温对时间的依赖关系

某气象站用自动温度记录仪记下某一昼夜气温变化情况. 图

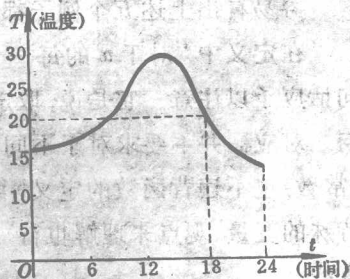


图 1-1

1-1 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图(其中横坐标是时间 t , 纵坐标是温度 T), 它形象地表示出温度 T 随时间 t 变化而变化的规律: 对于某一确定的 t ($0 \leq t \leq 24$ (时)), 就有一个确定的 T 与它相对应. 例如当 $t=18$ 时, 有 $T=20^\circ\text{C}$.

例 5 由实验知道硝酸钾的溶解度随温度而变化, 变化情况如下表:

温度($^\circ\text{C}$)	0	10	20	30	40	50	100
溶解度	13.9	21.2	31.6	45.6	61.3	83.5	245

$$-\infty < x < -2, -2 < x < 2 \text{ 以及 } 2 < x < +\infty;$$

函数的值域为 $-\infty < y < +\infty$.

$$(2) \text{ 函数 } y = \sqrt{(x-a)(b-x)} \quad (a < b)$$

要使 y 有意义(在实数范围内), 必须 $(x-a)(b-x) \geq 0$, 从而要求 $x-a \geq 0$ 又 $b-x \geq 0$ (即 $a \leq x \leq b$) 成立; 或 $x-a \leq 0$ 又 $b-x \leq 0$ (即 $x \leq a$ 又 $x \geq b$) 成立. 但后者不可能(因 $a < b$), 故此函数的定义域为 $a \leq x \leq b$.

如果我们把数和数轴上的点对应起来, 那末限制在两个数 a 、 b 之间的一切数, 就是介于数轴上两点 a 、 b 之间的全部点. 我们称它为区间, a 、 b 称为区间的端点. 如果区间包含端点 a 、 b , 就称为闭区间, 记为 $[a, b]$ (即 $a \leq x \leq b$); 如果区间不包含端点 a 、 b , 就称为开区间, 记为 (a, b) . 因此, 用区间的记号来记, (1)的定义域是 $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ 以及 $(2, +\infty)$; (2)的定义域是 $[a, b]$; 而函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b)$$

的定义域是开区间 (a, b) .

自然, 当 x 的变化范围为 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 时, 就应分别记为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$.

对于稍为复杂的初等函数, 同样可求出它的定义域. 如

$$(3) y = \lg(|x-a| - b);$$

由 $|x-a| - b > 0$, 即 $|x-a| > b$, 这就要求 $x-a > b$ 或 $x-a < -b$. 故函数 y 的定义域为

$$x > a+b \text{ 以及 } x < a-b.$$

$$(4) y = \sqrt{(x-1)(5-x)} + \ln(x-3)(x-4).$$

要求出函数 y 的定义域, 即求函数 $\sqrt{(x-1)(5-x)}$ 的定义域与函数 $\ln(x-3)(x-4)$ 的定义域的公共部分, 也就是求解下列不

等式组:

$$\begin{cases} (x-1)(5-x) \geq 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-4) > 0. & (2) \end{cases}$$

由上面已得出 $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ ($a < b$) 的定义域为 $a \leq x \leq b$, 可知(1)式的解为 $1 \leq x \leq 5$; 而(2)式的解为 $x < 3$ 及 $x > 4$ (因从 $x-3 > 0$ 同时 $x-4 > 0$, 可得出 $x > 4$; 从 $x-3 < 0$ 同时 $x-4 < 0$, 可得出 $x < 3$). 因而函数 y 的定义域为 $1 \leq x \leq 5$ 和 $x < 3$ 以及 $x > 4$ 的公共部分, 即 $1 \leq x < 3$ 以及 $4 < x \leq 5$ (也就是不等式组的解).

必须注意的是, 并不是所有函数的定义域都是区间. 例如引言中的例 2: $A_n = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)$, 即 A_n 是 n 的函数, 它的定义域为所有的正整数 ($n=1, 2, 3, \dots$).

我们称自变量取正整数的函数为数列. 并用记号

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

来表示, 也可简单记为 $\{u_n\}$.

因此我们可以把

$$A_n = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

写成

$$0, \frac{1}{8}, \frac{5}{27}, \dots, \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right), \dots,$$

也可简单记为 $\left\{ \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right\}$.

3. 建立函数关系举例

运用数学(特别是高等数学)工具解决实际问题时, 通常先要找出问题中变量之间的函数关系, 并用解析法把它表示出来, 然后进行分析和计算. 由于实际问题的多样性, 建立函数关系式并没有统一的方法, 必须对具体问题作具体分析, 分清实际问题中的

当 t 由大于 0°C 增加到 10°C 时, $q=t+85$.
于是 q 就是定义在 $[-10, 0)$, $(0, 10]$ 上的函数:

$$q = \begin{cases} 0.5t + 5 & (-10 \leq t < 0), \\ t + 85 & (0 < t \leq 10). \end{cases}$$

它的图形也分成二段(图 1-4).

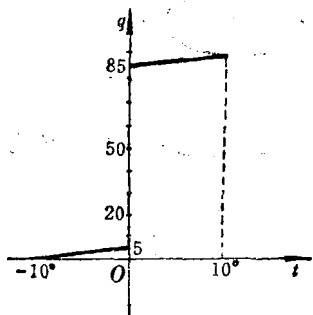


图 1-4

例 7、例 8 称为分段函数.

计算分段函数的值时, 特别要注意自变量所取的值在哪个范围. 如例 8, 当 $t_0 = -3$ 时, 则按 $q = 0.5t + 5$ 来计算, 得

$$q_0 = 0.5(-3) + 5 = 3.5;$$

当 $t_1 = 2$ 时, 则按 $q = t + 85$ 来计算, 得

$$q_1 = 2 + 85 = 87.$$

例 9 以每秒 A 立方厘米的速度往一圆锥形容器倒水. 容器的底半径为 R 厘米, 高为 h 厘米(图 1-5), 显然, 容器中的水将随时间的增加而增加, 试把容器中水的容积 V 分别表示成时间 t 及高度 y 的函数.

解 1) 由题设, t 秒后容器中水的容积 V 与时间 t 的函数关系为

$$V = At (0 \leq t \leq t_1, t_1 \text{ 为注满水的时间});$$

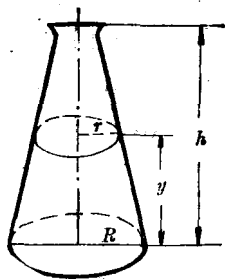


图 1-5

2) 设水的容积为 V 时, 容器中水的高度为 y , 液面半径为 r , 利用锥体体积公式, 这时

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 (h-y)}{3},$$

并注意到 r 与 y 的关系, 由相似三角形性质, 知

$$\frac{r}{R} = \frac{h-y}{h},$$

即

$$r = \frac{R}{h}(h-y),$$

代入上式, 得

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^3 \right] \quad (0 \leq y \leq h).$$

这就是水的容积 V 与高度 y 的函数关系.

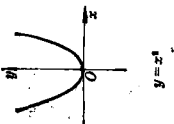
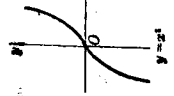
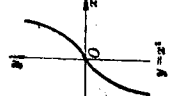
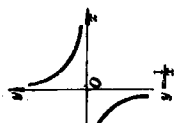
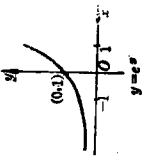
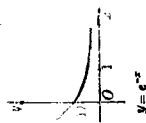
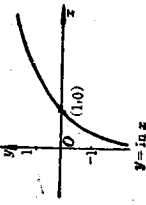
4. 基本初等函数

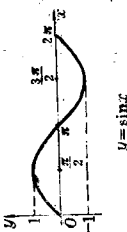
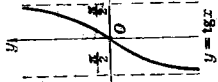
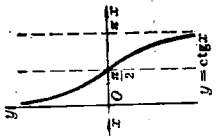
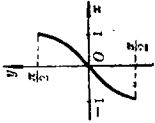
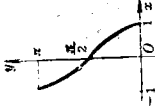
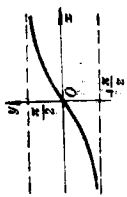
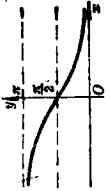
过去学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数, 是实际问题中经常遇到的几类最简单的函数; 并且许多函数, 是由它们通过加、减、乘、除、乘方、开方及有限次复合^①表示出来, 因此, 这几类函数称为基本初等函数.

为了便于查阅, 我们将它们归纳成表(基本初等函数表).

^① 有关复合函数的概念见 §1.3.

基本初等函数表

类别	名称	解析式	定义域	值域	
幂函数	二次抛物线	$y = x^2$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
	三次抛物线	$y = x^3$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	
	抛物线	$y = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
	等轴双曲线	$y = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$	
无理数幂	无理数幂	$y = x^\alpha, \alpha > 0$ $\alpha < 0$	$[0, +\infty)$ $(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$ $(0, +\infty)$	
指数函数	指数函数	$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	 
对数函数	对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	

类别	名称	解析式	定义域	值域	
三角函数	正弦函数	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
	余弦函数	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
	正切函数	$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	
	余切函数	$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq n\pi$	$(-\infty, +\infty)$	
反三角函数	反正弦函数	$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	
	反余弦函数	$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
	反正切函数	$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数	$y = \operatorname{arccotg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	

$$2) \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } A_n = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{3}.$$

现在我们对这两个例子作一些分析:

首先, 在例 1 中, $t \rightarrow 1$ 是指 t 无限接近 1, 所谓 t 无限接近 1, 就是说 t 接近 1 可以达到任何程度, 但并不要求 $t=1$, 因为 $\bar{v}$ 在 $t=1$ 处没有定义.

其次, $t \rightarrow 1$ 是这样的变化过程: t 既可以取大于 1 的值而无限接近于 1, 也可以取小于 1 的值或摇摆地而无限接近于 1.

第三, $\bar{v} \rightarrow g$ 是以 $t \rightarrow 1$ 这个变化过程为前提的, 也就是说, v 随着 t 无限接近于 1 而无限接近于 g ; 如果不考虑 $t \rightarrow 1$ 这个变化过程, 只说 $\bar{v} \rightarrow g$ 是没有意义的.

例 2 的变化过程与例 1 不同, 例 1 中的 t 趋于定数 1, 而例 2 中的 n 趋于无穷.

我们把上面两种情况综合起来, 就得到下面的定义.

1. 函数极限的定义

定义 如果自变量 x 无限接近一个定数 a , 但不等于 a 时, 函数 $f(x)$ 无限接近一个定数 A , 那么, 我们就说 $f(x)$ 当 x 趋于 a 时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (1)$$

如果自变量 x 趋于无穷时, 函数 $f(x)$ 无限接近一个定数 A , 那么, 我们就说 $f(x)$ 当 x 趋于无穷时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A. \quad (2)$$

有时把 (1)、(2) 式分别表示为

$$\text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, 有 } f(x) \rightarrow A;$$

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, 有 } f(x) \rightarrow A.$$

其中记号“ $x \rightarrow \infty$ ”, 表示 $|x|$ 无限地增大. 如果 x 变到一定程度以后, 总取正值而无限增大, 就记为 $x \rightarrow +\infty$; 总取负值而 $|x|$ 无限增

数 K 就是

$$K = \frac{W_1}{V_1} \div \frac{W - W_1}{V_2} = \frac{W_1 V_2}{V_1 (W - W_1)},$$

即

$$W_1 = W \frac{KV_1}{KV_1 + V_2}. \quad (3)$$

第二次萃取: 再用 V_2 毫升新的有机溶液对含有 W_1 克被萃取物的水溶液进行萃取, 平衡后水溶液中还剩溶质 W_2 克, 因为被萃取物在两溶液中的浓度之比是不变的, 故仍有

$$K = \frac{W_2}{V_1} \div \frac{W_1 - W_2}{V_2} = \frac{W_2 V_2}{V_1 (W_1 - W_2)},$$

即

$$W_2 = W_1 \frac{KV_1}{KV_1 + V_2},$$

将(3)式代入之, 得

$$W_2 = W \left(\frac{KV_1}{KV_1 + V_2} \right)^2.$$

如此进行下去, 第 n 次萃取后水溶液中还剩被萃取物 W_n 为

$$W_n = W \left(\frac{KV_1}{KV_1 + V_2} \right)^n.$$

如果设想萃取过程一直进行下去, 归结为数学问题, 就是求数列 $\{W_n\}$ 的极限问题.

因 V_1 、 V_2 、 K 均为正的常数, 所以 $0 < \frac{KV_1}{KV_1 + V_2} < 1$, 从而当 n 无限增大时, $W_n = W \left(\frac{KV_1}{KV_1 + V_2} \right)^n$ 无限趋近于 0. 用数学式子来表示, 就是 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$.

2. 极限的四则运算法则

为了求比较复杂的函数的极限, 我们来建立极限的四则运算法则: 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 皆存在, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{设 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0).$$

在第二个等式中, 若 $g(x) = c$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

对我们来说, 正确地运用极限的四则运算法则来计算极限是重要的. 由于这些等式在一定条件下成立, 就可以使得求等式左边的极限转化为求等式右边的极限. 而且这些法则还将在下一章证明导数的四则运算法则时被用到.

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x)$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x \\ &= 1 \cdot 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(2+3x)}{x-1}$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$, 用除法公式, 得

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(2+3x)}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x(2+3x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)}.$$

但由乘法公式得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} x(2+3x) &= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (2+3x) = 2 \cdot (\lim_{x \rightarrow 2} 2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x) \\ &= 2(2+6) = 16, \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(2+3x)}{x-1} = \frac{16}{1} = 16.$$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{1-x^2} = \infty$, 即这两个极限均

$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOD 的面积 $<$ $\triangle AOC$ 的面积, 而
 $\triangle AOB$ 的面积 $= \frac{1}{2} OB \cdot AB = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$); 扇形 AOD 的面积 $= \frac{1}{2} OA^2 \cdot x = \frac{x}{2}$; $\triangle AOC$ 的面积 $= \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. 故有不等式

$$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

即

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

从而

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x; \quad (1)$$

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 即 $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ 时, 就有

$$\frac{1}{\cos(-x)} > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x), \quad (2)$$

而 $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, 即(2)式可化为(1)式. 这表明当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 不等式(1)同样成立.

又因当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x \rightarrow 1$ 及 $\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$, 由准则一可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

由于在单位圆内, $2 \sin x$ 是弦 $\overline{AA_1}$, $2x$ 是所对应的弧 $\widehat{AA_1}$, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{AA_1}}{\widehat{AA_1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

因此, 这一重要极限表明当角 x (弧度) 充分小时, 所对的弦长近似于弧长.

这个重要极限在求三角函数的极限问题时经常要用到.

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

准则二 单调有界数列必有极限

这个准则的正确性在直观上是容易理解的. 设 $\{a_n\}$ 是单调有界数列, 不妨设它是递增的, 且对一切 n 都有 $a_n \leq M$, 那么从图 1-8 看, 它是有极限的.

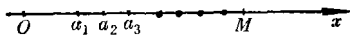


图 1-8

利用准则二, 可以证明另一个重要的极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是存在的.

证明 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在, 只要证明数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调有界就行了.

1) 证明 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是递增的

$$\text{从 } a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4},$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27}$$

可知 $a_1 < a_2 < a_3$. 这一规律对任何 a_n 都是对的, 我们利用二项式定理来证明之.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)(n+1-1)}{2!} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$+ \frac{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)}{3!} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

$$+ \frac{(n+1)(n+1-1)(n+1-2) \dots 3 \cdot 2}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} \dots$$