初中学生自学丛书

SHUXUE QUYUAN

数学趣苑

下册·几何部分

杨梦一 主编

杭州出版社

初中学生课外学习丛书

数 学 趣 苑

（下册·几何部分）

杨梦一　主编

杭 州 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据
数学趣苑/杨梦一主编.—杭州:杭州出版社,
2001.8
ISBN 7-80633-105-0
Ⅰ.数...Ⅱ.杨...Ⅲ.数学课-中小学-课外
读物 Ⅳ.G634.603
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 051406 号

责任编辑:任 远
封面设计:李 莎

数学趣苑

(下册·几何部分)

杨梦一 主编

杭州出版社出版发行(杭州市体育场路 286 号 邮编:310003)
浙江省新华书店经销 余杭人民印刷有限公司印刷
开本 850×1168 1/32 印张 9.625 字数 23.2 万
1998 年 5 月第 1 版 2001 年 8 月第 4 次印刷

ISBN 7-80633-105-0/O·1 定价:(上、下册)24.00 元

初中学生课外学习丛书

序

改革开放以来，邓小平同志关于**“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”**的指示日益深入人心，“三个面向”成了我国当代教育发展与改革的战略方针。杭州市教育学会所属的“杭州市中小学生三向课外教育活动中心”，遵循邓小平同志的指示，以“丰富学生课余生活，提高学生基本素质”为宗旨，根据“自愿报名、自主选择”的原则，积极组织青少年学生参与“双休日”和寒暑假的多彩的教育活动，为他们徜徉在宽松优雅的假日环境之中，陶冶情操，提高素养创造了条件。

本丛书是根据多年来的课外教育活动的实践经验，邀请杭州市长期从事教育研究的骨干教师合作编写的。它方向正确，情趣高雅，联系实际，取材广泛，通俗易懂，富有科学性、知识性、趣味性。作为青少年的一种课外教育读物，不仅有助于他们目前的健康成长，而且有助于为他们在未来的社会接受终身教育奠定良好的基础。

本丛书取名为“初中学生课外学习丛书”，先出版《语言万象》、《数学趣苑》、《物理漫谈》、《人生初步》，如受读者欢迎，以后拟组织续编。

初中学生课外学习丛书编委会

1998年5月

前　言

《数学趣苑》从一系列新颖、有趣、奇妙、贴近社会生活的实际问题出发，介绍相关的初中数学基础知识，从而在提高读者基本数学能力的基础上，培养解决涉及实际情境的种种数学问题的综合能力。这种按“提出实际问题——介绍相关知识——解决实际问题”的编写体例与人们的认识过程“从问题出发——形成认知结构——提高分析和解决问题的能力”是一致的。

《数学趣苑》的特色是：通过问题，展示数学的简洁、严谨、奇异、和谐等美妙风韵和朴素、具体、生动、实用的日常面貌，引导读者尤其是儿童少年去感受、欣赏数学的无穷之美，努力学会应用数学知识和数学方法解决身边的问题，从而体验到求知的欢乐，并激起学好数学的兴趣和信心。

《数学趣苑》分上、下两册，每册30讲。上册，通过系列问题对初中代数知识作了疏理和提高；下册，通过系列问题对初中几何知识作了归纳和综合。全书配有近700道例题和900余道习题。例题有分析和解答，有的还附有“说明”，从数学思想方法的高度揭示思维规律，总结解题经验。习题附有参考解答，可以方便读者自学和研究。

《数学趣苑》由杨梦一主编，徐水法、孙厚康、杨梦一、胡祝三、陈立群、何坚编写。

对于本书中的错误和不当之处，真诚欢迎读者给予批评指正。

编　者

1998年5月

目　录

1　张齐家里的养鱼缸

张齐家里新添了一个养鱼缸“海底世界”,热热闹闹地养了一缸热带鱼,红红绿绿的,家里好像增添了一道风景线.但美中不足的是,不管怎么看,鱼缸似乎有些倾斜.是缸的四脚高低不一,还是放缸的茶几不平,或者是地面不平整的缘故呢?张齐想检测一下,但怎样检测简单易行呢?为了解决这一问题,我们先来回顾有关的基础知识.

线段沿着一个方向无限延长就成为射线.线段向两方无限延长就成为直线.直线的基本性质是:两点确定一条直线.线段的性质是:在所有连结两点的线中,线段最短.

有公共端点的两条射线所组成的图形就是角.两条直线相交,得到两对对顶角.对顶角相等.若两个角的和为 $90°$($180°$),则这两个角就是互余(互补)的角.同角或等角的余角(补角)相等.

关于平行线,有平行公理:经过直线外一点,有一条而且只有一条直线和这条直线平行.平行线的判定公理是:同位角相等,两直线平行.平行线的性质公理是:两直线平行,同位角相等.

三角形三内角的和等于 $180°$,三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和,且大于任何一个和它不相邻的内角.三角形的两边之和大于第三边,两边之差小于第三边.

在空间,如果一条直线和一个平面交于一点,且与平面内经过这个交点的两条相交直线都垂直,那么这条直线就和这个平面垂直.如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面就互相垂直.

例 1　如图 1—1,延长线段 AB 到 C,使 $BC=2AB$. AB 的中点

为 D,点 E,F 在 BC 上,且 $EF=2BE,5EF=2FC$.若 $AC=60\text{cm}$,求 DE,DF 的长.

分析:求 DE,DF 时,都要涉及到 BE,所以设 BE 为 x,根据题设条件,把求线段长的问题转化为解方程的问题,从而求得结论.

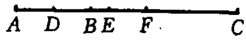

图 1—1

解:设 $BE=x\text{cm}$,则 $EF=2x\text{cm}$, $FC=5x\text{cm}$.

$\therefore BC=BE+EF+FC=8x$.

$\because BC=2AB$, $\therefore AB=4x$.

$\because AC=AB+BC=4x+8x=12x$,且 $AC=60$,

$\therefore 12x=60, x=5$.

又 D 为 AB 的中点,

$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=2x$.

$\therefore DE=DB+BE=2x+x=3x=15(\text{cm})$.

$DF=DE+EF=5x=25(\text{cm})$.

例 2 如图 1—2. M 为线段 AB 的中点,P 是 BM 上一点.求证:$PA^2-PB^2=2AB\cdot PM$.

分析:$PA^2-PB^2=(PA+PB)(PA-PB)$,由图可知 $PA+PB=AB$.所以只需证 $PA-PB=2PM$.又因为 M 是 AB 的中点,所以可设法在 AB 上确定点 P 关于点 M 的对称点 P' 这样,$PM=P'M$,$\therefore 2PM=PA-PB$.

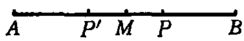

图 1—2

证明:在 AM 上取 P',使 $P'M=PM$.

$\because AM=BM$,

$\therefore PB=P'A$.

$\therefore PP'=PA-P'A=PA-PB$.即 $2PM=PA-PB$.

又 $PA+PB=AB$,

$\therefore PA^2 - PB^2 = (PA - PB)(PA + PB)$

$= AB \cdot 2PM = 2AM \cdot PM.$

例 3 已知锐角$\angle A$的余角的度数与$\angle B$的补角的度数之比是$1:4$，$\angle B > 100°$，求$\angle A$的范围.

解： $\angle A$的余角为$90° - \angle A$，$\angle B$的补角为$180° - \angle B$.由题意得

$$90° - \angle A = \frac{1}{4}(180° - \angle B),$$

整理，得　$\angle B = 4\angle A - 180°$.

$\because \angle B > 100°$,

$\therefore 4\angle A - 180° > 100°$.

$\therefore$　$\angle A > 70°$.

又　$\angle A$是锐角,

$\therefore 70° < \angle A < 90°$.

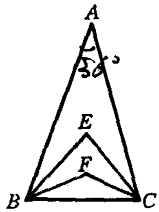

图 1—3

例 4 如图 1—3，$\triangle ABC$中，$\angle A = 36°$，且$\angle B$和$\angle C$的三等分线分别交于点E，F.求$\angle E$，$\angle F$的度数.

解： $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°, \angle A = 36°$,

$$\therefore \frac{1}{3}\angle B + \frac{1}{3}\angle C = 60° - \frac{1}{3}\angle A = 60° - 12° = 48°.$$

$$\therefore \angle F = 180° - (\frac{1}{3}\angle B + \frac{1}{3}\angle C) = 180° - 48° = 132°.$$

$$\because \frac{2}{3}\angle B + \frac{2}{3}\angle C = 96°,$$

$$\therefore \angle E = 180° - (\frac{2}{3}\angle B + \frac{2}{3}\angle C)$$

$$= 180° - 96° = 84°.$$

例 5 如图 1—4，求$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$的度数.

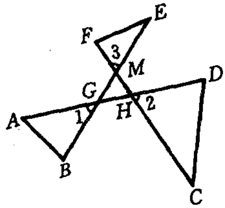

图 1—4

分析： $\angle A$和$\angle B$，$\angle C$和$\angle D$，$\angle E$和$\angle F$分别在三个不同的三角形中，所以关键是求出三角形中$\angle 1$,

$\angle 2$,和$\angle 3$的度数.显然$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$.

解:$\because \angle A+\angle B=180^\circ-\angle 1$,

$\angle C+\angle D=180^\circ-\angle 2$,

$\angle E+\angle F=180^\circ-\angle 3$,

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=3\times 180^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=540^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$.

$\because \angle MGH=\angle 1, \angle GHM=\angle 2, \angle HMG=\angle 3$,

又 $\angle MGH+\angle GHM+\angle HMG=180^\circ$,

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$.

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=540^\circ-180^\circ=360^\circ$.

例 6 如图 1—5,$\angle ACB$ 和$\angle AED$ 的平分线交于点 F.求证:$\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

分析:显然,首先要确定$\angle F$ 与$\triangle ABC$,$\triangle ADE$ 的内角的数量关系.注意到$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中,$\angle BAC=\angle DAE$.所以$\angle B+\angle ACB=\angle D+\angle AED$.这样便可用三角形外角性质得到结论.

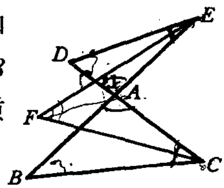

图 1—5

证明:$\because \angle BAC=\angle DAE$,

$\therefore \angle B+\angle ACB=\angle D+\angle AED$.

$\because \angle 1=\angle D+\frac{1}{2}\angle AED, \quad \angle F=\angle 1-\frac{1}{2}\angle ACB$,

$$\therefore \angle F=\angle D+\frac{1}{2}\angle AED-\frac{1}{2}\angle ACB$$

$$=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle AED-\frac{1}{2}\angle ACB)$$

$$=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}(\angle D+\angle AED-\angle ACB)$$

$$=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}(\angle B+\angle ACB-\angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle D).$$

例 7 如图 1—6,已知直线 $AB /\!/ CD$,直线 EF 交 AB 于 G,交 CD 于 H,点 P 为 HD 上任意一点,由 P 作直线 PQ,交射线 HF 于 Q.求证:$\angle HQP = \angle AGF - \angle HPQ$.

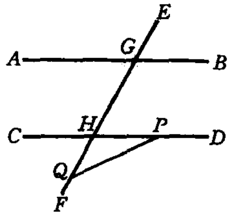

图 1—6

证明: $\because \angle GHP$ 是 $\triangle PHQ$ 的外角,

$\therefore \angle GHP = \angle HQP + \angle HPQ$.

$\therefore \angle HQP = \angle GHP - \angle HPQ$.

又 $\because AB /\!/ CD$,

$\therefore \angle AGF = \angle GHP$.

$\therefore \angle HQP = \angle AGF - \angle HPQ$.

例 8 如图 1—7,已知 E 为 AC 上的一点,$BE \perp DE$,$\angle AEB = \angle B$,$\angle CED = \angle D$,求证:$AB /\!/ CD$.

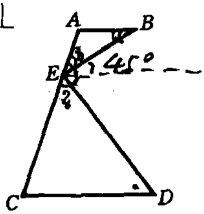

图 1—7

证明: $\because BE \perp DE$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90°$.

$\because \angle 1 = \angle B, \angle 2 = \angle D$,

$\therefore \angle 1 + \angle B + \angle 2 + \angle D = 180°$.

又 $\because \angle A = 180° - (\angle 1 + \angle B)$,

$\angle C = 180° - (\angle 2 + \angle D)$,

$\therefore \angle A + \angle C = 360° - (\angle 1 + \angle B + \angle 2 + \angle D) = 360° - 180° = 180°$.

$\therefore AB /\!/ CD$.

例 9 如图 1—8,已知 $\angle ADE = \angle B$,$FG \perp AB$ 于 G,$\angle EDC = \angle GFB$.求证:$CD \perp AB$.

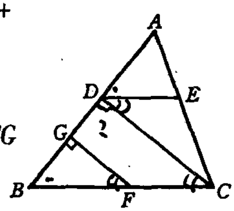

图 1—8

证明: $\because \angle ADE = \angle B$,

$\therefore DE /\!/ BC$.

$\therefore \angle BCD = \angle EDC$.

$\because \angle EDC = \angle GFB$,

$\therefore \angle BCD = \angle GFB$.

$\therefore FG /\!/ CD$.

$\because FG \perp AB$,

$\therefore CD \perp AB$.

例 10 如图 1—9, P 是$\triangle ABC$ 内任意一点.求证: $AB + AC > PB + PC$.

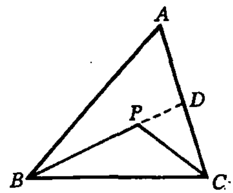

图 1—9

证明:延长 BP 交 AC 于 D.在$\triangle ABD$ 中,由三角形两边之和大于第三边,得

$$AB + AD > PB + PD.$$

同理,在$\triangle PCD$ 中, $DC + PD > PC$.

$$\therefore AB + AD + DC + PD > PB + PD + PC.$$

$$\therefore AB + AC > PB + PC.$$

例 11 如图 1—10,在六边形 $ABCDEF$ 中, $AB /\!/ ED$, $BC /\!/ FE$, $CD /\!/ AF$,且 $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$.求证:六边形 $ABCDEF$ 的各角都相等.

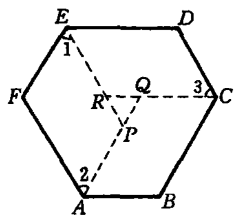

图 1—10

分析:本题的条件在图中比较分散,所以要设法把条件集中起来.若作 $AP /\!/ BC$, $CQ /\!/ DE$, $ER /\!/ FA$,并交成$\triangle PQR$,就可运用三角形和平行线的有关性质来推出各角的关系了.

证明:过 A, C, E 分别作 BC, DE, FA 的平行线,三线交成$\triangle PQR$.

$$\therefore QR = ED - AB, PR = AF - CD, PQ = BC - EF.$$

又 $ED - AB = AF - CD = BC - EF > 0$,

$\therefore QR = PR = PQ$, $\triangle PQR$ 是正三角形.

$\therefore \angle QRP = \angle DER = \angle 3 = 60°$,

$\angle RPQ = \angle FAP = \angle 1 = 60°$,

$\angle PQR = \angle BCQ = \angle 2 = 60°$.

$\therefore \angle FED = \angle EDC = \angle DCB = \angle CBA = \angle BAF = \angle AFE$

$= 2 \times 60° = 120°$.

即六边形 $ABCDEF$ 的各角相等.

现在,我们来帮助张齐做检测工作.找一个螺丝,一根线和一张完整的信纸,把线一端系于屋顶的钉子上,另一端系上螺丝,让"线锤"尽量靠近鱼缸和茶几.螺丝以刚接触到地面为好(如图 1—11).然后以信纸的一个角(直角)去测量$\angle GNB$,$\angle GMD$ 和$\angle GKF$,看哪个角与信纸的这个角不重合,就说明哪个物体是倾斜的.这是因为受地球重力的作用,"线锤"垂直于地平面.而如果鱼缸水面 AB,茶几桌面 CD 和地板表面 EF 都是水平的,则 $AB /\!/ CD /\!/ EF$,$\angle GNB = \angle GMD = \angle GKF = 90°$(平行线的同位角相等).当然,如果哪个角与信纸的这个角不重合,就说明是倾斜的.

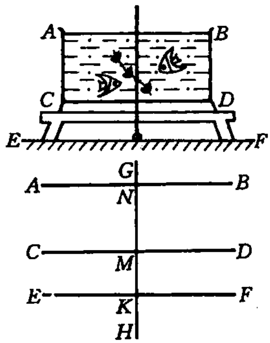

图 1—11

【题组一】

1. 已知线段 $AB = 12.4\text{cm}$,反向延长 AB 到 C,使 $AC = 18.6\text{cm}$.若 M 为 BC 中点,求线段 AM 的长.
2. 已知 B 在线段AC 上,P 是AB 的中点,Q 是AC 的中点.求证:$BC = 2PQ$.
3. 在线段 AB 的延长线上取一点 C,使 $BC = 2AB$,再在 BA 的延长线上取一点 D,使 $AD = 3AB$.若 $BC = 2\text{cm}$,求 DB 的长.
4. 已知一个角的补角比这个角的余角的$\frac{5}{2}$倍少 9°.求这个角的

度数.

5. 若 $OA \perp OC$, $\angle AOB : \angle AOC = 2:3$. 求 $\angle BOC$ 的度数.

6. 已知两个角的两条边分别平行,且其中一个角比另一个角的 4 倍少 $30°$. 求这两个角的度数.

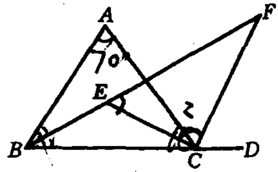

图 1—12

7. 如图 1—12, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 70°$, $\angle ABC$ 的平分线与外角 $\angle ACD$ 的平分线相交于 F, CE 平分 $\angle ACB$ 交 BF 于 E. 求 $\angle ECF$ 和 $\angle FEC$ 的度数.

8. 如图 1—13, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, $AC \parallel BD$, $CE \parallel DF$, $\angle A = 61°15'$, $\angle E = 58°42'$. 求 $\angle ACD$, $\angle ECD$, $\angle ACE$, $\angle BDF$ 的度数.

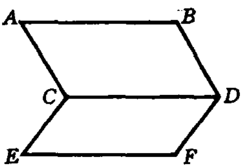

图 1—13

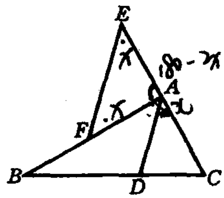

图 1—14

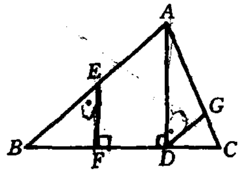

图 1—15

9. 如图 1—14, 已知点 E, A, C 在一条直线上, $\angle EFA = \angle E$, $\angle EFA = \angle CAD$. 求证: AD 平分 $\angle BAC$.

10. 如图 1—15, $AD \perp BC$ 于 D, $EF \perp BC$ 于 F, $\angle BEF = \angle GDA$. 求证: $DG \parallel BA$.

【题组二】

11. 已知 $AB = 10\text{cm}$, C 为线段 AB 的中点, D 在 AC 上, 且 $AD = \frac{1}{3}AC$, E 为 CB 的中点. 求线段 DE 的长.

12. 已知 P 为线段 EF 的中点, Q 为线段 PF 上任意一点. 求证: $EQ - QF = 2PQ$.

13. 如图 1—16, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 在 AC 上, E 在 AB 上, 且

$AD = DE = EC$. 求$\angle A$的度数.

14. 如图 1—17, $\angle A = 20°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 30°$. 求:(1)$\angle AOC$ 180° 的度数;(2)$\angle E$, $\angle F$ 的度数的和. 80°

15. 如图 1—18 中,求$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7$ 的度数.

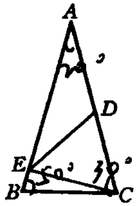

图 1—16

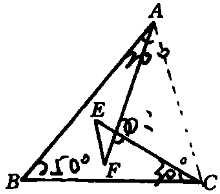

图 1—17

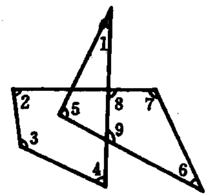

图 1—18

16. $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$, AD 是 BC 边上的高线, AE 是$\angle BAC$ 的平分线. 求证:$\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

17. 如图 1—19, EP 平分$\angle AED$, FP 平分$\angle AFB$. 求证:$\angle EPF = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ECF)$.

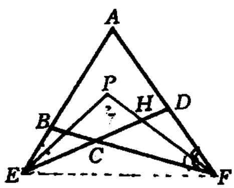

图 1—19

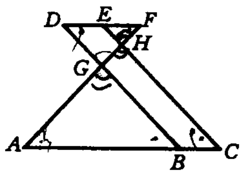

图 1—20

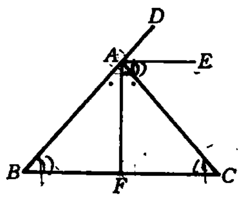

图 1—21

18. 如图 1—20, 已知$\angle C = \angle D$, $\angle AGB = \angle FHE$. 求证:$\angle A = \angle EFH$.

19. 如图 1—21, 已知$\angle B = \angle C$, $AE \parallel BC$, AF 平分$\angle BAC$. 求证:$AF \perp BC$.

20. 如图 1—22, $\triangle ABC$ 的三个内角的平分线交于 P, 延长 AP 交 BC 于 D, 作 $PE \perp BC$ 于 E. 求证:$\angle BPD = \angle CPE$.