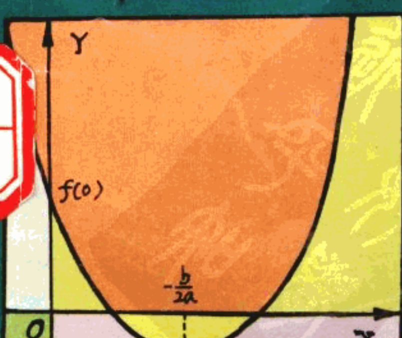
九年义务教育新教材

初三数学课后疑难题一题多解与强化训练

马 飞 编著

陕西师范大学出版社

CHU SAN SHU XUE KE HOU YI NAN TI YI TI DUO JIE YU QIANG HUA XUN LIAN



例题丰富
一题多解
指点方法
培养能力

九年义务教育新教材

初三数学课后疑难题一题多解与强化训练

马　飞　编著

(陕)新登字 008 号

九年义务教育新教材

初三数学课后疑难题一题多解与强化训练

马　飞　编著

陕西师范大学出版社出版发行
(西安市陕西师大 120 信箱　邮政编码 710062)
新华书店经销　陕西凤翔县印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 5.875　字数 127 千
1996 年 3 月第 1 版　　1996 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—20000
ISBN 7-5613-1325-X/G·984
定　价:5.20 元

开户行:西安工行小寨分理处　帐号:216—065026—27
读者购书、书店添货或发现印刷装订问题，请与发行科联系、调换。
电话:(029) 5251046

内容提要

本套丛书与教学同步，对九年义务教育课本中的疑难题进行一题多解，可使学生较深刻地理解课本知识，熟练地掌握相应的解题方法和技巧，进行启迪思维、开发智力。

强化训练部分的习题，大部分选自近年全国各省市的中考题或重点中学的各种考题，力求突出重点难点，扩大覆盖面。学生通过解答这些习题，不仅强化了对课本知识的掌握和应用，而且对学生开阔视野、提高应试能力都是大有裨益的。

目　录

●代数部分

第十二章　一元二次方程

范例一

解方程 $3x^2-16x+5=0$.(《代数》第三册 P_{21} 例 3(1))

解法 1　$\because$　$a=3, b=-16, c=5$,

$\therefore$　$x=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\times3\times5}}{2\times3}=\frac{8\pm7}{3}$.

$\therefore$　$x_1=\frac{1}{3}, x_2=5$.

解法 2　原方程可化为

$$(3x-1)(x-5)=0.$$

$\therefore$　$x_1=\frac{1}{3}, x_2=5$.

解法 3　原方程两边都乘以 3,可得

$$(3x)^2-16(3x)+15=0,\text{即}$$

$$[(3x)-1][(3x)-15]=0.$$

$\therefore$　$3x-1=0$,或 $3x-15=0$.

$\therefore$　$x_1=\frac{1}{3}, x_2=5$.

解法 3 称为归一法,即把首项系数化归为“1”来解(这里把 $3x$ 整个作为未知量),这种方法在解某些大系数一元二次

方程时，能收到化繁为简之效.

例 1 解方程 $196x^2-42x-2=0$.

分析 原方程的二次系数 196 显然太大了，直接应用求根公式来解是麻烦的，但我们注意到 196 是 14 的平方.而一次项系数 -42 又是 14 的 -3 倍，于是可得下面的简便解法.

解 原方程可化为 $(14x)^2-3(14x)-2=0$.

$14x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$，即 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{28}$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{28}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{28}$.

例 2 解方程 $27x^2-24x-35=0$.

分析 这里的二次项系数 27 不是完全平方数，但方程两边都乘以 3，即可将原方程化成 $(9x)^2-8\cdot(9x)-105=0$. 由于这里的常数项其绝对值较大，若用求根公式来解仍然较繁.但注意到 $-105=-15\times7$. 而 $-15+7$ 等于一次项系数 -8，故此时可用因式分解法来解.

解 原方程两边都乘以 3，可得

$(9x)^2-8\cdot(9x)-105=0$，即

$(9x-15)(9x+7)=0$.

$\therefore\quad x_1=\dfrac{5}{3}, x_2=-\dfrac{7}{9}$.

范例二

解方程 $(3-t)^2+t^2=9$.（《代数》第三册 P_{23} 第 3(5) 题）

解法 1 原方程可化为

$2t^2-6t=0$，即 $t(t-3)=0$.

$\therefore\quad t_1=0, t_2=3$.

解法 2 原方程可化为

$(3-t)^2+t^2-9=0$,

即　$(t-3)^2+(t+3)(t-3)=0$,

即　$(t-3)t=0$.

∴　$t_1=3, t_2=0$.

解法 3　观察已知方程特点，可知 $t=0, t=3$ 是方程的解，又因为已知方程为一元二次方程，最多有两个实数解，故知原方程的解为 $t_1=0, t_2=3$.

说明　本题还可以用求根公式来解，但由于用求根公式来解较繁，所以尽可能不予采用.

范例三

解关于 x 的方程 $10a^2x^2+13abx-3b^2=0(a\neq 0)$.

(《代数》第三册 P_{23}第 2(2)题)

解法 1　原方程左边分解因式得

$(2ax+3b)(5ax-b)=0$.

∴　$x_1=-\dfrac{3b}{2a}, x_2=\dfrac{b}{5a}$.

解法 2　原方程可化为

$10(ax)^2+13b(ax)-3b^2=0$.

∴　$(2ax+3b)(5ax-b)=0$.

∴　$x_1=-\dfrac{3b}{2a}, x_2=\dfrac{b}{5a}$.

解法 3　将原方程整理成关于 b 的方程

$3b^2-13ax\cdot b-10(ax)^2=0$.

∴　$(3b+2ax)(b-5ax)=0$.

∴　$x_1=-\dfrac{3b}{2a}, x_2=\dfrac{b}{5a}$.

范例四

求证关于 x 的方程 $x^2+(2k+1)x+k-1=0$ 有两个不相

等的实数根.（《代数》第三册 P_{29} 第 3 题）

证明 $\Delta=(2k+1)^2-4(k-1)$

$=4k^2+4k+1-4k+1$

$=4k^2+2.$

不论 k 为何实数，$4k^2+2>0.$

故知原方程有两个不相等的实数根.

一元二次方程根的判别式还有另外一些应用.

例 1 已知实数 x、y、z 满足 $x=6-y$，$z^2=xy-9$. 试求 x、y、z 的值.

解 已知即 $x+y=6$，$xy=z^2+9$. 因此 x、y 是方程 $u^2-6u+(z^2+9)=0$ 的二根.

$\because$ x、y 是实数. $\therefore \Delta\geqslant 0$，即

$36-4(z^2+9)\geqslant 0$，也即 $z^2\leqslant 0$，

$\therefore$ $z^2=0$，$z=0$. 此时 $\Delta=0$，$x=y$.

又 $x+y=6$，$xy=9$，

$\therefore$ $x=y=3$.

例 2 如果 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 能分解成两个一次因式的乘积，试求 m 的值.

解 原式 $=x^2+mx-(y^2-5y+6)$.

欲使上式能分解成两个一次因式的乘积，必须其判别式 $\Delta=m^2+4(y^2-5y+6)=4y^2-20y+24+m^2$ 是一个完全平方式，而 Δ 是关于 y 的二次三项式，故要求 Δ 的判别式 Δ' 是零，

即 $\Delta'=20^2-4\times 4\times(24+m^2)=0.$

解之得 $m=\pm 1$.

例 3 已知 a、b、c 为实数，且 $a+b+c=0$，$abc=1$. 求证：

a、b、c 中必有一个大于$\frac{3}{2}$.

证明　$\because a+b+c=0, abc=0$，$\therefore$ a、b、c 中只能是一个正数，不妨设 a 为正数，又 $b+c=-a, bc=\frac{1}{a}$，

$\therefore b$、c 是方程 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$ 的二根.

$\because b$、c 为实数，$\therefore \Delta \geqslant 0$，即

$a^2-\frac{4}{a}=\frac{a^3-4}{a}\geqslant 0$. 由所设 a 为正数，故

$\therefore a^3\geqslant 4$，$\therefore a\geqslant \sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{32}{8}}>\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$.

例 4　m 取什么值时，方程组$\begin{cases}x^2+2y^2=6,\\mx+y=3\end{cases}$有一个实数解？（《代数》第三册 P_{79}第 4(2)题）

解　将 $y=3-mx$ 代入另一方程得

$x^2+2(3-mx)^2=6$，即$(1+2m^2)x^2-12mx+12=0$.

$\Delta=(-12m)^2-4(1+2m^2)\cdot 12=0$. 解得 $m=\pm 1$. 故知 m 取± 1 时，原方程组有一个实数解.

范例五

已知方程 $x^2-2x-1=0$，求作一个一元二次方程，使它的根是原方程各根的平方.（《代数》第三册 P_{35}第 2 题）

解法 1　设已知方程的两根为 x_1, x_2，则所求方程的两根为 x_1^2, x_2^2. 于是有

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=(-2)^2-2\times(-1)=6\end{aligned}$$

$x_1^2\cdot x_2^2=(x_1x_2)^2=(-1)^2=1$.

故知所求方程为 $y^2-6y+1=0$.

解法 2　设 y 是所求方程的根，则 $y=x^2$，$x=\pm\sqrt{y}$，代入已知方程得

$$(\pm\sqrt{y})^2-2(\pm\sqrt{y})-1=0,$$

即　$\pm 2\sqrt{y}=1-y$.

两边平方、整理得 $y^2-6y+1=0$.

解法 3　设 y 是所求方程的根，则 $y=x^2$.

又由已知方程得 $x^2=2x+1$.

$\therefore$　$y=x^2=2x+1$，即 $x=\dfrac{y-1}{2}$

代入已知方程，得 $\left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2-2\left(\dfrac{y-1}{2}\right)-1=0$.

故知所求方程为 $y^2-6y+1=0$.

解法 4　设所求方程为 $y^2+py+q=0$，则 $y=x^2$，同解法 3 可得 $y=2x+1$. 代入所求方程，得

$$(2x+1)^2+p(2x+1)+q=0,$$

即　$4x^2+(4+2p)x+p+q+1=0$.

此方程与原方程的根相同，所以

$$4:1=(4+2p):(-2)=(p+q+1):(-1)$$

解得　$p=-6, q=1$.

故知所求方程为 $y^2-6y+1=0$.

说明　解法 1 是解这类问题最一般的方法，解法 2 简便易行，后三种解法都是依据了方程根的定义.

范例六

设 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，求证 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{b}{c}=0$.（《代数》第三册 P_{35} 第 1(2) 题）

证明 $\because\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$,

$$\therefore\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{b}{c}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{b}{c}$$

$$=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}+\frac{b}{c}$$

$$=-\frac{b}{c}+\frac{b}{c}=0.$$

范例七

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根之比为 2∶3，求证 $6b^2=25ac$.(《代数》第三册 P_{78}第 14 题)

证法 1　由已知及求根公式得

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}:\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=2:3,$$

即　$2(-b-\sqrt{b^2-4ac})=3(-b+\sqrt{b^2-4ac})$

$b=5\sqrt{b^2-4ac}$.

$\therefore\quad 6b^2=25ac$.

证法 2　设方程的两根为 x_1,x_2，由已知及韦达定理得

$$\begin{cases}x_1:x_2=2:3 & ①\\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}, & ②\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. & ③\end{cases}$$

由①、②，得 $x_1=-\frac{2b}{5a},x_2=-\frac{3b}{5a}$，代入③，得

$$\left(-\frac{2b}{5a}\right)\cdot\left(-\frac{3b}{5a}\right)=\frac{c}{a}.$$

化简、整理得　$6b^2=25ac$.

证法 3　依题意，设方程两根为 $2s$、$3s$，则

$$\begin{cases} 2s+3s=-\dfrac{b}{a}, & ① \\ 2s\cdot 3s=\dfrac{c}{a} & ② \end{cases}$$

由①得 $s=-\dfrac{b}{5a}$，代入②，并整理得

$6b^2=25ac$.

说明　若方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根之比为 $q:p$，则 $pqb^2=(p+q)^2ac$.

范例八

把 $5x^2+11x+6$ 分解因式.

(《代数》第三册 P_{39} 第 1(1)题)

解法 1　(十字相乘法)

$5x^2+11x+6=(5x+6)(x+1)$.

解法 2　(拆项法)

$$\begin{aligned} 5x^2+11x+6 &= 5x^2+5x+6x+6 \\ &= 5x(x+1)+6(x+1) \\ &= (x+1)(5x+6). \end{aligned}$$

解法 3　(归一法)

$$\begin{aligned} 5x^2+11x+6 &= \frac{1}{5}[(5x)^2+11(5x)+30] \\ &= \frac{1}{5}(5x+5)(5x+6) \\ &= (x+1)(5x+6). \end{aligned}$$

解法 4　(求根法)

由于方程 $5x^2+11x+6=0$ 的两根为 $x_1=-1$，$x_2=-\dfrac{6}{5}$，于是可得

$$5x^2+11x+6=5(x+1)\left(x+\frac{6}{5}\right)$$
$$=(x+1)(5x+6).$$

说明　利用求根法分解因式，如果二次三项式首项系数不是1，分解因式时应给两因式的积再乘以二次项系数.

范例九

把 $a^2+40a+384$ 分解因式.

(《代数》第三册 P_{39}第 1(5)题)

解法 1　(拆项法)

$$a^2+40a+384=a^2+40a+400-16$$
$$=(a+20)^2-4^2$$
$$=(a+16)(a+24).$$

解法 2　(常值换元法)

$a^2+40a+384=a^2+5\times 8a+6\times 8^2$.

设 $b=8$，则

原式 $=a^2+5ab+6b^2$

$=(a+2b)(a+3b)=(a+16)(a+24)$.

解法 3　(求根公式法)

方程 $a^2+40a+384=0$ 的根是

$$a=\frac{-40\pm\sqrt{40^2-4\times 384}}{2}=-20\pm 4.$$

$\therefore\quad a_1=-16, a_2=-24.$

$\therefore\quad a^2+40a+384=(a+16)(a+24).$

范例十

把 $14x^2-67xy+18y^2$ 分解因式.

(《代数》第三册 P_{39}第 1(4)题)

解法 1　(十字相乘法)

$14x^2-67xy+18y^2=(2x-9y)(7x-2y).$

解法 2 （公式法）

方程 $14x^2-67xy+18y^2=0$ 的根是

$$x=\frac{67y\pm\sqrt{(-67y)^2-4\times14\times18y^2}}{2\times14}$$

$$=\frac{67y\pm59y}{28}.$$

$$\therefore\quad 14x^2-67xy+18y_2$$

$$=14\left(x-\frac{9y}{2}\right)\left(x-\frac{2y}{7}\right)$$

$$=(2x-9y)(7x-2y).$$

范例十一

把$(x^2+x)^2-2x(x+1)-3$ 分解因式.

(《代数》第三册 P_{39}第 2(2)题)

解法 1 （换元法）

设 $y=x^2+x$,则

$(x^2+x)^2-2x(x+1)-3=y^2-2y-3=(y-3)(y+1)$

$=(x^2+x-3)(x^2+x+1)$

$=\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)(x^2+x+1).$

解法 2 （公式法） 略.

说明 因式 x^2+x-3 在实数范围内还可以继续分解,应对此类问题引起注意. 即在因式分解时,在给定的范围内,应分解到不能分解时为止。

范例十二

解关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$.

(《代数》第三册 P_{51}第 1(2)题)

解　原方程可化为

$$x-1+\frac{1}{x-1}=a-1+\frac{1}{a-1}.$$

又 $(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}=1$,

$\therefore$　$x-1$ 与 $\frac{1}{x-1}$ 是方程 $y^2-\left(a-1+\frac{1}{a-1}\right)y+1=0$ 的两根.

解得　$y_1=a-1, y_2=\frac{1}{a-1}$.

$\therefore$　$x-1=a-1$,或 $x-1=\frac{1}{a-1}$

$\therefore$　$x_1=a, x_2=\frac{a}{a-1}$.

说明　课本 P_{50} 第 3(2)题,P_{51} 第 1(1)、(3),第 2 题,都可以用类似的方法解决.

范例十三

某车间加工 300 个零件,在加工完 80 个后,改进了操作方法,每天能多加工 15 个,一共用 6 天完成了任务,求改进操作方法后每天加工的零件数.(《代数》第三册 P_{51} 第(6 题))

解法 1　(从时间入手)

设改进操作方法后,每天能够加工 x 个零件,则改进操作方法前每天加工 $(x-15)$ 个零件.

根据题意得　$\frac{80}{x-15}+\frac{220}{x}=6$.

解得　$x_1=55, x_2=10$.

经检验知 x 只能取 55.

答　改进操作方法后每天加工 55 个零件.

解法 2　(从时间入手)

设改进操作方法后，每天能加工 x 个零件，改进操作方法前每天能加工 y 个零件，则

$$\begin{cases} x=y+15 \\ \dfrac{80}{y}+\dfrac{220}{x}=6. \end{cases}$$ 下略.

解法 3 （从工作量入手）

设改进操作方法后每天加工 x 个零件，则

$$(x-15)\left(6-\frac{220}{x}\right)=80.$$

解法 4 （从工作量入手）

设改进操作方法前工作了 x 天，则

$$\left(\frac{80}{x}+15\right)(6-x)=220.$$

解法 5 （从工作效率入手）

设改进操作方法前工作了 x 天，则

$$\frac{220}{6-x}-\frac{80}{x}=15,$$

范例十四

一个容器盛满烧碱溶液，第一次倒出 10 升后，用水加满，第二次又倒出 10 升，再用水加满，这时容器内的溶液浓度是原来浓度的 $\frac{1}{4}$，求容器的容积.（《代数》第三册 P_{77}第 22 题）

解　设容器的容积为 x 升，原来烧碱溶液的浓度为 a，则第一次倒出 10 升烧碱溶液用水加满后容器中溶液的浓度为 $\frac{ax-10a}{x}$，第二次倒出的 10 升溶液中所含的纯烧碱为 $\frac{ax-10a}{x}\cdot 10$，于是，根据题意，得