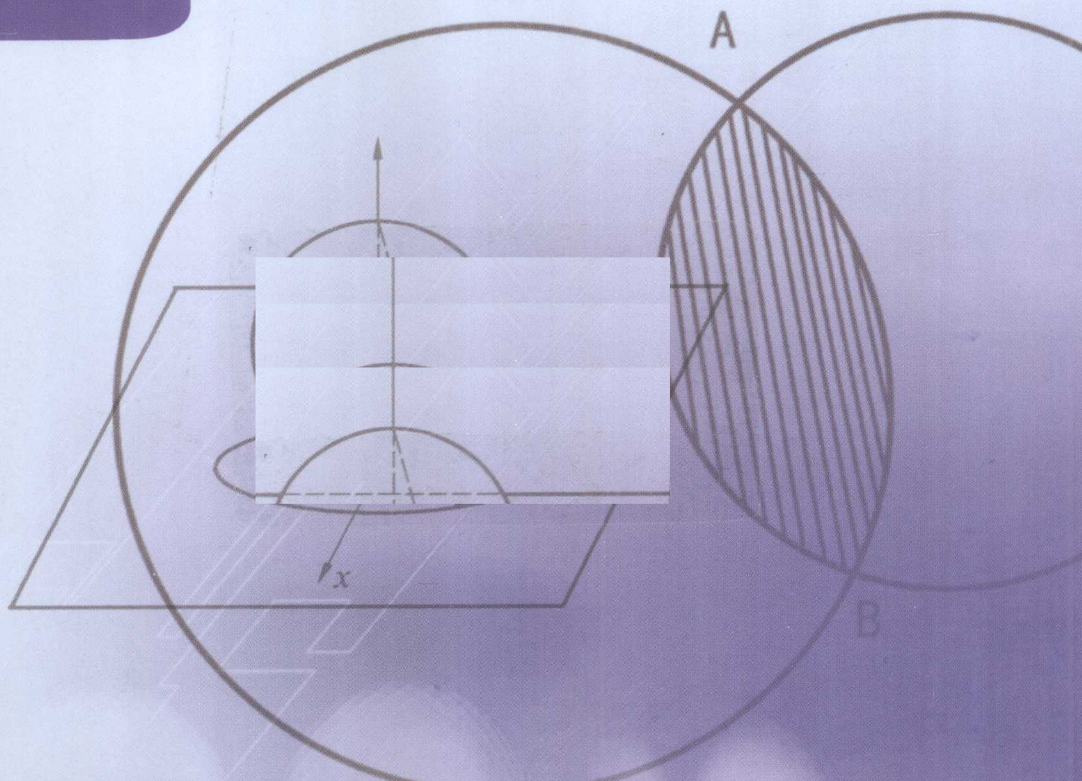
复变函数与积分变换

邢宇明 包革军 编



哈爾濱工業大學出版社

复变函数与积分变换

邢宇明　包革军　编

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系，根据教育部工科数学课程教学指导委员会最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求（修订稿）”的精神和原则，结合多年的教学实践和研究而编写的教材。全书共8章：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换。每章后进行了简明的总结且精心设计了适量的习题，并在书末附有参考答案。书中有*号部分供读者选用。

本书可作为高等工科院校各专业本科生的复变函数与积分变换课程教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/邢宇明，包革军，编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.5

ISBN 978-7-5603-3024-2

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①邢…②包…　Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ.①O174.5　②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第078572号

责任编辑　尹继荣
封面设计　刘长友
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张18.25　字数409千字
版　　次　2010年6月第1版　2010年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3024-2
印　　数　1～5 000册
定　　价　30.00元

前 言

培养基础扎实、勇于创新的人才，是大学教育的一个重要目标。随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出。在工科大学的教育体系中，数学课程是基础课程，在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等诸方面起着特别重要的作用。工程数学中复变函数与积分变换是理工科院校学生继工科数学分析课程之后的又一门数学基础课。通过本课程的学习，不仅能学到复变函数与积分变换中的基本理论及工程技术中的常用数学方法，同时还可以巩固和复习工科数学分析的基础知识，为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识而奠定必要的数学基础。为此我们按照教育部关于课程改革的精神，结合多年从事同名课程的教学实践，并参照国家教育部工科数学课程教学指导委员会最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)”编写了这本《复变函数与积分变换》教材。该教材可供高等工科院校的电类及与电类有关的各专业使用，也可供其他专业选用，此外，可作为工程技术人员自学复变函数与积分变换的参考书。

在编写过程中我们力求突出以下几个特点：

1. 将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起，既保证了教学质量的提高，又压缩了教学时数。完成本教材的全部教学内容需要 46 学时。

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生的基本素质。对基本概念的引入尽可能联系实际，突出其物理意义；基本理论的推导深入浅出、循序渐进，适合工科专业的特点；基本方法的阐述富于启发性，使学生能举一反三、融会贯通，以期达到培养学生创新能力的目的。

3. 为提高本书的趣味性和可读性，力求做到语言通俗易懂、简洁流畅。在每章中还配有较多的例题，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力。并在章末精心设计了适量的习题，书末附有参考答案。

4. 尽量使理论更系统完善，为学生展望新知识留下窗口。我们在编写过程中，适当增加了些超出大纲的内容，这样为学生进一步拓宽数学知识指出了方向。这在教材中已打了“*”号，可供有关专业选用。

该书在编写过程中得到了哈尔滨工业大学数学系及出版社的大力支持，以使这本书能尽快与读者见面。在此，一并表示感谢!

由于编者的水平有限，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编 者

2010 年 3 月于哈尔滨工业大学

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

在这一章里，我们先介绍一下复数系统的代数和几何结构，然后引进复变量的函数——复变函数，进而介绍它的极限和连续性.

1.1　复数运算及几何表示

1. 复数概念及四则运算

为了便于以后讨论，在这里回顾一下有关复数的基本定义及结论.

设 x, y 为两实数，称形如

$$z = x + \mathrm{i}y \quad (\text{或 } x + y\mathrm{i})$$

的数为复数，这里 i 为虚单位，具有性质 $\mathrm{i}^2 = -1$. x 及 y 分别叫做 z 的实部与虚部，常记作

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z$$

虚部为零的复数为实数，简记作 $x + \mathrm{i}0 = x$. 因此，全体实数是复数的一部分. 特别记 $0 + \mathrm{i}0 = 0$，即当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零. 实数为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**. 如果两复数的实部和虚部分别相等，则称两复数相等.

设

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$$

定义两复数 z_1, z_2 的四则运算法则是

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.3}$$

如果 $z_2 \neq 0$，则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.4}$$

从式(1.1) ~ (1.4) 即知复数经过四则运算得到的仍旧是复数. 又从式(1.1)、(1.2)以及实部与虚部的定义得出

$$\mathrm{Re}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 \pm \mathrm{Re}\, z_2$$

$$\mathrm{Im}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 \pm \mathrm{Im}\, z_2 \tag{1.5}$$

例 1.1.1　化简 $\mathrm{i}^3, \dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

解

$$\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = -1 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}^2 + (1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}} = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

例 1.1.2 计算

(1) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$; (2) $\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}$.

解 (1) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\dfrac{(2+3\mathrm{i})^2}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}=\dfrac{4+12\mathrm{i}-9}{4+9}=-\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}\mathrm{i}$

(2) $\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}=\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}-\dfrac{3}{\mathrm{i}(\sqrt{3}+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}+\dfrac{3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

例 1.1.3 已知 $x+y\mathrm{i}=(2x-1)+y^2\mathrm{i}$,求 $z=x+\mathrm{i}y$.

解 比较等式两端的实部与虚部,得

$$x=2x-1,\quad x=1$$
$$y=y^2,\quad y=0 \text{ 或 } y=1$$

由此解得

$$z=1 \text{ 或 } z=1+\mathrm{i}$$

2. 复数的几何表示

任意给定一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$,都与一对有序实数(x,y)相对应. 而任意一对有序实数(x,y)都与平面直角坐标系中的点$P(x,y)$对应,这样能够建立平面上的全部点与全体复数间的一一对应关系. 于是可用平面直角坐标系中的点来表示复数,见图 1.1.

表示复数 z 的直角坐标平面称为**复平面**或**z-平面**,复平面也常用$\mathbb{C}$来表示. 因复平面上的 x 轴上的点对应实数,y 轴上非零的点对应纯虚数,故称 x 轴为实轴,y 轴为虚轴. 由于复数全体与复平面上的点的全体是一一对应的,以后把"点 z"和"复数 z"作为同义词而不加区别.

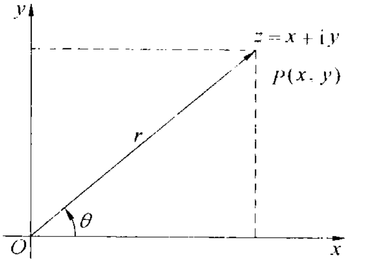


图 1.1

在复平面上,如图 1.1 所示,从原点 O 到点 $P(x,y)$ 作向量$\overrightarrow{OP}$. 我们看到复平面上由原点出发的向量的全体与复数的全体之间也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量),因此也可以用向量$\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$.

在物理学中,力、速度、加速度等都可用向量表示,说明复数可以用来表示实有的物理量.

向量$\overrightarrow{OP}$的长度 r 称为复数 z 的**模**或**绝对值**,记作$|z|$,即$|z|=r$. 实轴正向转到与向量$\overrightarrow{OP}$ 方向一致时,所成的角度 θ 称为复数的**辐角**,记作 $\mathrm{Arg}\,z$,即 $\mathrm{Arg}\,z=\theta$.

复数 0 的模为零,即$|0|=0$,其辐角是不确定的. 任何不为零的复数 z 的辐角 $\mathrm{Arg}\,z$ 均有无穷多个值,彼此之间相差 2π 的整数倍. 通常把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的**主值**,记作 $\arg z$,于是

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

并且可以用复数 z 的实部与虚部来表示辐角主值 $\arg z$

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0\end{cases}$$

由直角坐标与极坐标的关系(见图 1.1),我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$\begin{cases}r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\dfrac{y}{x}\end{cases}\tag{1.6}$$

以及

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\tag{1.7}$$

于是复数 z 又可表示为

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\tag{1.8}$$

式(1.8) 通常称为复数 z 的**三角表示式**. 如果再利用欧拉(Euler) 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

我们又可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tag{1.9}$$

这种形式称为复数的**指数表示式**.

在上一小节中已经指出:两复数的实部与虚部分别相等,则称两复数相等. 于是从式(1.6) 与式(1.7) 即知两复数相等,其模必定相等,其辐角可以差 2π 的整数倍(辐角如果都取主值,则应相等). 反之,如果复数的模及辐角分别相等,则从式(1.8) 即知这两个复数必然相等.

因复数可用向量表示,故复数是既有大小,又有方向的量,所以两个复数,如果不都是实数,就无法比较大小. 但是,两个复数的模都是实数,就可以比较大小.

从图 1.1 可以看出

$$-r\leqslant x,\quad y\leqslant r$$

即

$$-|z|\leqslant \mathrm{Re}\,z,\quad \mathrm{Im}\,z\leqslant|z|\tag{1.10}$$

例 1.1.4　求下列各复数的模及辐角.

(1) -2;　(2) $-\mathrm{i}$;　(3) $1+\mathrm{i}$.

解　由 z-平面上的对应点的位置,可以看出

(1) $|-2|=2,\arg(-2)=\pi,\mathrm{Arg}(-2)=\pi+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(2) $|-\mathrm{i}|=1,\arg(-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2},\mathrm{Arg}(-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(3) $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4},\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

例 1.1.5　将复数 $z=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 分别化为三角表示式和指数表示式.

解　因为 $x=-1, y=-\sqrt{3}$，所以

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

又 z 在第三象限内，于是

$$\arg z=\arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

所以

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

由正、余弦函数的周期性，也可表为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$$

相应的指数表示式为

$$z=2\mathrm{e}^{\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\mathrm{i}},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

以 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2，通过图 1.2 可以说明，复数的加法、减法法则与向量的加法、减法法则一致. 通过两向量的和与差的几何作图法，在复平面中可以求出相应两复数的和 z_1+z_2 与差 z_1-z_2 的对应点.

在图 1.3 中，以向量 $\overrightarrow{Oz_1}$、$\overrightarrow{Oz_2}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线向量 $\overrightarrow{Oz}$ 及 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 就分别对应于复数 z_1+z_2 及 z_1-z_2. 由于 $\overrightarrow{Oz}$ 的起点为原点 O，因而终点 z 所对应的复数就是 z_1+z_2；而向量 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 的起点不是原点，经平移得起点为原点 O 的向量 $\overrightarrow{OS}$，则终点 S 所对应的复数就是 z_1-z_2. 从图 1.3 还可以看到，$|z_1-z_2|$ 表示复平面上两点 z_1 与 z_2 之间的距离. 事实上，有

$$|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

这正是平面上两点距离的表达式.

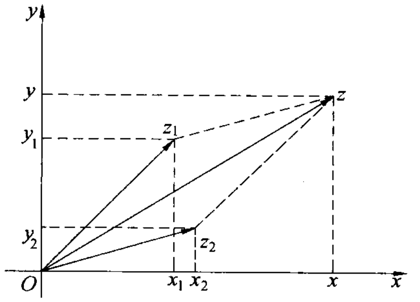


图 1.2

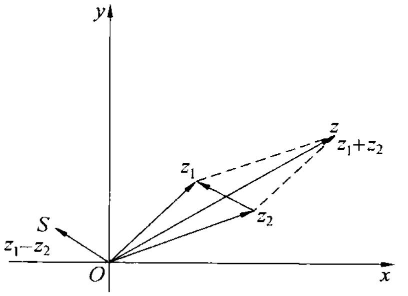


图 1.3

3. 共轭复数

实部相等、虚部互为相反数的两个复数称为**共轭复数**. 如果其中一个复数记作 z，则

其共轭复数记作 $\bar{z}$. 于是

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}$$

由定义,显然$\bar{\bar{z}}=z$. 特别地,实数的共轭复数是该实数本身;反之,如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等,则这个复数便是一个实数.

由定义不难验证,两复数的和、差、积、商的共轭复数,分别等于这两复数的共轭复数的和、差、积、商,即

$$\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2} \tag{1.11}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \tag{1.12}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0) \tag{1.13}$$

我们还可以用共轭复数来表示复数的实部与虚部以及模. 如

$$2\ \mathrm{Re}\ z=z+\bar{z}$$

$$2\mathrm{i}\mathrm{Im}\ z=z-\bar{z}$$

$$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$$

$$|\bar{z}|=|z|$$

利用共轭复数的性质,我们能够比较容易地证明两个重要的不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.14}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \tag{1.15}$$

事实上,由共轭复数的性质,我们有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}=\\&|z_1|^2+\overline{z_1\overline{z_2}}+z_1\overline{z_2}+|z_2|^2=|z_1|^2+2\ \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\leqslant\\&|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

由此可得不等式(1.14). 如将上式中 z_2 换成 $-z_2$,则有

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=|z_1|^2-2\ \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\geqslant\\&|z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|-|z_2|)^2\end{aligned}$$

即得不等式(1.15).

当然在图 1.3 中利用三角形三边关系也可证明式(1.14) 及(1.15).

例 1.1.6　设 A,C 为实数,$A\neq 0$,β 为复数且 $|\beta|^2>AC$,证明 z-平面上的圆周可以写成

$$Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0$$

证　在平面解析几何中,已知任意一圆的方程可写作

$$A(x^2+y^2)+Bx+Dy+C=0 \tag{1.16}$$

这里 A,B,C,D 为实数,且 $A\neq 0$,$B^2+D^2-4AC>0$. 我们知道

$$x^2+y^2=z\bar{z},\quad x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$$

以此代入方程式(1.16),有

$$Az\bar{z}+\frac{B}{2}(z+\bar{z})+\frac{D}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})+C=0$$

也就是

$$Az\bar{z}+\frac{1}{2}(B-D\mathrm{i})z+\frac{1}{2}(B+D\mathrm{i})\bar{z}+C=0 \tag{1.17}$$

令

$$\beta=\frac{1}{2}(B+D\mathrm{i})$$

以此代入式(1.17)即得证.

例 1.1.7　计算$(2+3\mathrm{i})\overline{(2+3\mathrm{i})}-(4-3\mathrm{i})^2$.

解　$(2+3\mathrm{i})\overline{(2+3\mathrm{i})}-(4-3\mathrm{i})^2=(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})-(16-24\mathrm{i}-9)=$

$$4+9-7+24\mathrm{i}=6+24\mathrm{i}$$

有时利用复数的代数运算来证明平面几何问题也很方便,如例 1.1.8.

例 1.1.8　证明等式$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并对此等式作出几何解释.

证　$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

将此二式相加便得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

这等式的几何意义是:平行四边形的对角线的平方和等于四条边的平方和(见图 1.4).

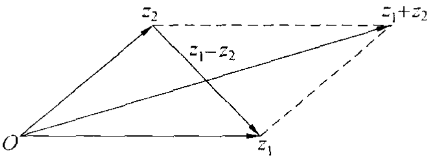


图 1.4

例 1.1.9　若$z_1+z_2+z_3+z_4=0$,且$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$,则此四点构成一个内接于单位圆的矩形.

证　因为$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$,故四边形$z_1z_2z_3z_4$内接于单位圆$|z|=1$.

又由$z_1+z_2+z_3+z_4=0$知

$$\frac{z_1+z_2}{2}=-\frac{z_3+z_4}{2}$$

若设$z_k=x_k+\mathrm{i}y_k(k=1,2,3,4)$,则有

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{x_3+x_4}{2},\quad \frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{y_3+y_4}{2}$$

故边z_1z_2的中点与边z_3z_4的中点关于原点为对称,从而$z_1z_2z_3z_4$为一矩形.

4. 乘除、乘方与开方

把复数表示成三角表示式,再进行乘除或乘方、开方,比直接用代数式运算有时要方便得多.下面我们首先来讨论乘法.

设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2) \tag{1.18}$$

则

$z_1z_2=[r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)]=$

$$r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]=$$
$$r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.19}$$

由此可知，把两复数相乘，只要把它们的模相乘、辐角相加即可.

由此也可得到两复数乘积的几何作图法：将向量 z_1 沿本身方向伸长 $|z_2|$ 倍，再旋转一个角 $\arg z_2$，该向量的终点即为积 z_1z_2（见图 1.5）.

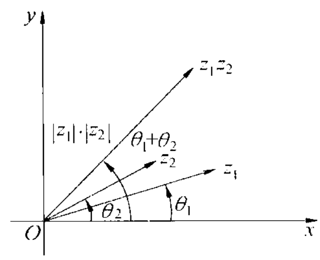


图 1.5

特别地，当 $|z_1|=1$ 时，两复数 z_1 与 z_2 的乘积就只是旋转. 比如，$z_2=\mathrm{i}$，由于 i 的辐角主值是 $\pi/2$，那么 $\mathrm{i}z_1$ 就可由向量 z_1 逆时针旋转 $\pi/2$ 弧度的角而得到；再如 $z_2=-1$，那么 $-z_1$ 就可由向量 z_1 逆时针旋转 π 弧度的角而得到.

其次讨论除法. 设式(1.18) 中的 $z_2\neq 0$，则 $r_2>0$. 由除法的定义式(1.4) 得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)=$$
$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.20}$$

表示一复数，其模为 r_1/r_2，其辐角为 $\theta_1-\theta_2$. 由此可知，把两复数相除，只要把它们的模相除、辐角相减即可.

例 1.1.10　化简 $\dfrac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$.

解　因为

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta=\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)$$

所以

$$\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}=$$
$$\frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right][\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]}=$$
$$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right](\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)=$$
$$\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

例 1.1.11　试证 z_1,z_2,z_3 在一条直线上的条件是 $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 为实数.

证　z_1, z_2, z_3 在一直线上的条件是以线段 $\overline{z_2z_3}$ 与线段 $\overline{z_1z_3}$ 为两边的角 $\angle z_2z_3z_1$ 是 π 的整数倍，即将 z_3 平移到原点来考虑(见图 1.6)，则

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=n\pi$$

故 $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 为实数是充要条件. 令

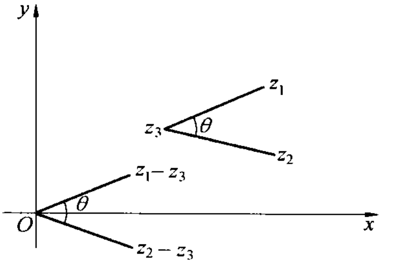


图 1.6

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$$
$$\vdots$$
$$z_n=r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)$$

重复地应用式(1.19)可得

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)] \tag{1.21}$$

如果 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则上式可化为

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.22}$$

由此可知，求复数的 n 次方(n 为正整数)只要求它的模的 n 次方、辐角的 n 倍即可.

特别地，当 $r=1$ 时，式(1.22)就是有名的棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.23}$$

上面，我们已经证明：n 为正整数时，式(1.23)成立. 当 $n=0$ 时，式(1.23)的左右两端都是 1，显然式(1.23)成立. 还可以证明：当 n 为负整数时，式(1.23)也成立. 事实上，令 $n=-m$，m 为正整数，则根据负指数幂的定义以及式(1.23)对正整数成立，并利用公式(1.20)即得

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{-m}=\frac{1}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^m}=\frac{\cos 0+\mathrm{i}\sin 0}{\cos m\theta+\mathrm{i}\sin m\theta}=$$
$$\cos(-m\theta)+\mathrm{i}\sin(-m\theta)=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

这就证明当 n 为负整数时，式(1.23)也成立. 综上所述，即知对所有整数来说，式(1.23)恒成立.

例 1.1.12　设 n 为正整数，试证明

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n+1}=-1$$

证　因为

$$\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$$

于是

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^{3n+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^{3n+1}=$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)=$$

$$(\cos 2n\pi+\mathrm{i}\sin 2n\pi)\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)+(\cos 4n\pi+\mathrm{i}\sin 4n\pi)\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)=$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}=-1$$

若对于复数 z，存在复数 w 满足等式：$w^n=z$（n 是大于 1 的整数），则称 w 为 z 的 n 次方根，记作$\sqrt[n]{z}$，即 $w=\sqrt[n]{z}$. 求方根的运算叫做开方.

为从已知的 z 求 w，我们把 z 及 w 均用三角表示式写出. 设

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$

则由 $w^n=z$ 及乘方运算有

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

考虑到辐角的多值性，得到

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

由此，$|w|=\rho=r^{\frac{1}{n}}$，$r^{\frac{1}{n}}$ 是 r 的 n 次算术根，则

$$\operatorname{Arg} w=\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

这就是所求的 z 的 n 次方根. 从这个表达式可以看出：

(1) 当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的值

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$

当 k 取其他整数值时，将重复出现上述 n 个值. 因此，一个复数 z 的 n 次方根有且仅有 n 个相异值，即

$$\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\quad k=0,1,2,\cdots,n-1\tag{1.24}$$

由此可见，在复数范围内，任何非零复数的 n 次方根都有 n 个不同的值，即$\sqrt[n]{z}$ 是多值的. 注意，此处用 $r^{\frac{1}{n}}$ $(r>0)$ 表示 r 的 n 次算术根，以区别复数 r 的 n 次方根的记号$\sqrt[n]{r}$.

(2) 上述 n 个方根的相异值 w_k $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 具有相同的模的 $r^{\frac{1}{n}}$，而每两相邻值的辐角的差为 $2\pi/n$，故在几何上，w 的 n 个值分布在以原点为中心、$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆内接正 n 边形的顶点上.

例 1.1.13　求$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解　因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，所以

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad(k=0,1,2,3)$$

即

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9}{16}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{9}{16}\pi\right)$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17}{16}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{17}{16}\pi\right)$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25}{16}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{25}{16}\pi\right)$$

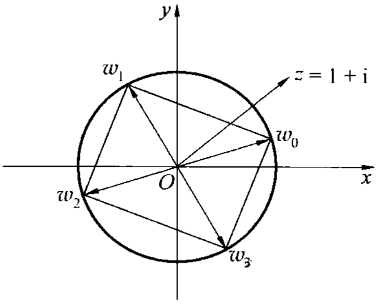


图 1.7

这四个根是内接于中心在原点，半径为$\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点上(见图 1.7)，并且

$$w_1=\mathrm{i}\,w_0,\quad w_2=-w_0,\quad w_3=-\mathrm{i}\,w_0$$

5. 复球面与无穷远点

在第 2 小节中我们建立了复数与复平面上的点的一一对应关系. 下面我们再建立复数与球面上的点的一一对应关系，以便引进无穷远点的概念.

将 xOy 平面看作复平面，取一个球面将其南极 S 与复平面上原点相切(见图 1.8). 设 P 为球面上的任一点，从球面北极 N 作射线 NP，必交于复平面的一点 Q，它在复平面上表示一个模为有限的复数. 反过来，从球极 N 出发，且过复平面上任一模为有限的点 Q 的射线，也必交于球面上的一个点，记为 P. 于是复平面上的点与球面上的点(除 N 点外) 建立了一一对应关系.

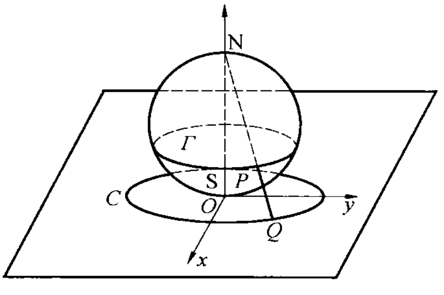


图 1.8

考虑复平面上一个以原点为中心的圆周 C，在球面上对应的也是一个圆周 Γ. 当圆周 C 的半径越大时，圆周 Γ 就越趋于北极 N. 因此，北极 N 可以看成是与复平面上的一个模为无穷大的假想点相对应，这个唯一的假想点称为**无穷远点**，并记作∞. 复平面上加点∞后，称为**扩充复平面**，与它对应的就是整个球面，称为**复球面**，并且扩充复平面上的点与复球面上的点构成一一对应. 简单说来，扩充复平面的一个几何模型就是复球面. 对于模为有限的复数，我们称为**有限复数**，除去∞的复平面称为**有限复平面**.

有限复平面常记作$\mathbb{C}$，扩充复平面记作$\overline{\mathbb{C}}$，故有$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，对于所有有限复数

$a \in \mathbb{C}$，规定 $a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$，且当 $a \neq 0$ 时，规定 $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$，$\frac{a}{0} = \infty$，$\frac{a}{\infty} = 0$ 以及 $|\infty| = +\infty$，且 ∞ 的实部、虚部及辐角都无意义. 显然，复平面上每一条直线都通过点 ∞.

1.2　复平面上的点集

1. 基本概念

由不等式 $|z - z_0| < \delta\ (\delta > 0)$ 所确定的复平面点集（简称点集），就是以 z_0 为心、δ 为半径的圆的内部，称为点 z_0 的 **δ－邻域**，常记作 $N(z_0, \delta)$. 如果 z_0 不属于其自身的 δ－邻域，则称该邻域为 z_0 的去心 δ－邻域，常记作 $\mathring{N}(z_0, \delta)$，可用不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 表示.

在扩充复平面上，无穷远点的邻域应理解为以原点为心的某圆周的外部，即 ∞ 的 δ－邻域 $N(\infty, \delta)$ 是指满足条件 $|z| > 1/\delta$ 的点集.

若点集 D 的点 z_0 有一邻域全含于 D 内，则称 z_0 为 D 的**内点**；若点集 D 的点皆为内点，则称 D 为**开集**；若在点 z_0 的任意邻域内，同时有属于点集 D 和不属于 D 的点，则称 z_0 为 D 的**边界点**；点集 D 的全部边界点所组成的点集称为 D 的**边界**，常记作 ∂D.

若有正数 M，对于点集 D 内的点 z，皆满足条件 $|z| \leqslant M$，即若 D 全含于一圆之内，则称 D 为**有界集**，否则称 D 为**无界集**.

若点 z_0 的任意邻域内总有点集 D 中的无穷多点，则 z_0 称为 D 的**极限点或聚点**；若 D 的所有极限点都属于 D，则称 D 为**闭集**.

2. 区域，曲线

为引进复变函数，我们需要介绍区域的概念.

定义 1.2.1　如果复平面上非空点集 D 具有下面的两个性质：

(1) 属于 D 的点都是 D 的内点；

(2) D 内任意两点都可用一条具有有限折的折线把它们连接起来，且这折线上所有的点均属于 D（此性质称为 D 的连通性）；

则称点集 D 为区域（见图 1.9）.

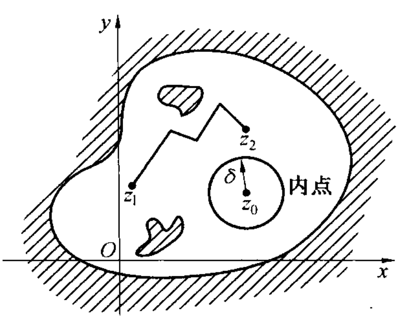


图 1.9

区域加上它的全部边界点所构成的点集，称为**闭区域**，记作 $\overline{D} = D \cup \partial D$.

应用关于复数 z 的不等式来表示 z－平面上的区域，有时是很方便的.

例 1.2.1　z－平面上以原点为心、R 为半径的圆（即圆形区域）

$$|z| < R$$