高中数学专题精讲

高中数学的若干基本观点

主编：熊 斌 冯志刚
编著：况亦军

中国出版集团
東方出版中心

书香策划

策　　划　周立园
封面设计　周祥根

高中数学专题精讲
高中数学的若干基本观点　10.00

2 077100 890358

ISBN 7-80186-213-9

9 787801 862136 >

ISBN 7-80186-213-9
定价：100.00元（共10册）
本册定价：10.00元

高中数学专题精讲

高中数学的若干基本观点

主编　熊　斌　冯志刚

编著　况亦军

中国出版集团
東方出版中心

高中数学专题精讲

高中数学的若干基本观点

主　编：熊　斌　冯志刚

编　著：况亦军

出版发行：东方出版中心
地　　址：上海市仙霞路 335 号
电　　话：021—62596195
邮政编码：200336
印　　刷：华东师范大学印刷厂
开　　本：890×1240 毫米 1/32
字　　数：2300 千字
印　　张：77
版　　次：2004 年 9 月第 1 版第一次印刷
ISBN7－80186－213－9

定　　价：100.00(共 10 册)
本册定价：10.00 元

高中数学专题精讲
编委会

主编　熊　斌　冯志刚

编委　（按姓氏笔画）

王元庆　冯志刚　朱永庆　况亦军
杨德胜　孟小龙　周建新　周　珺
张进兴　柯新立　曹建华　舒国樑
熊　斌　潘　宁

序　言

近年来，新课标，新教材在中小学中被越来越多地采用，中学教材出现了“一纲多本”，“一标多本”的多元化格局。在这些众多的教材中，虽然教材的形式有所不同，编排的顺序有所不同，但是万变不离其宗的是教材的知识内容和能力要求。基于这样的原因，我们组织了一批长期在教学第一线的特级教师和高级教师编写了这套《高中数学专题精讲》，“专题精讲”针对性强，可完整、系统、深入地把这一专题的内容讲透彻，实现知识和能力的升华和突破，另外，内容讲述的空间较大，综合性强，很少受到教材变动的影响。

这套丛书由如下 10 本书组成：《函数》，《不等式》，《三角函数》，《复数》，《数列（数列、数学归纳法）》，《向量与几何》，《解析几何》，《排列、组合与概率统计》，《应用题、开放题与探索题》，《高中数学的若干基本观点》。它们涵盖了高中数学的所有内容。

每一本书以讲为单位编写，根据本讲的要求，分若干小节，每一小节中都有以下栏目：

知识梳理与方法点拨　主要着重介绍该节的基础知识及相关的拓展知识以及该类问题一般的解题方法和特别的方法。构建知识体系和方法体系。

重点、难点、高考考点　介绍该节的重点、难点和高考考点。

典型例题精讲　选择经典考题和作者原创或改编的典型问题，分析解题思路和主要步骤，并给出详细的解答，以达到举一反三，触类旁通。

自我检测 提供了与该部分内容有关的习题，注重精练，循序渐进，以利于学生巩固强化。

自我检测参考答案与提示 对自我检测中的试题作出提示或解答，切实提高学生的学习效果。

引申与拓广 主要介绍该节教材中没有涉及到的，但在解题中需要用到的基础知识和方法，以便快速、有效地提高学生分析问题解决问题的能力。

能力测试 这一节的一个综合测试，内容包括引申与拓广的部分。给学生的一个综合练习，检测一下自己对这一节内容的掌握情况。

能力测试参考答案与提示 能力测试试题的提示与参考答案。

《高中数学专题精讲》力求体现最新的教改精神和新课标的要求，通过对高中数学中的重点知识举行深入、细致的分析和讲解，使得学生能够解决学习中的困难，提高分析问题和解决问题的能力，使自己的数学能力有进一步的提升。

我们衷心希望广大教师和学生对本套丛书的编写提出宝贵的建议和意见。

《高中数学专题精讲》编委会

目 录

第一讲 函数

知识梳理与方法点拨

函数是数学领域最重要的概念之一.函数的有关知识在世界各国的中学数学教科书中都有相当的篇幅.它包括函数的概念以及定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性等各种函数的基本性质,并研究正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等各种特定初等函数的图像以及它们各自所具有的特别性质.但是,函数是一个具有丰富内涵的数学概念,函数的每一种性质都是从某一个侧面对函数的某一些特征的描述,因此,我们还可以有更多的视角对函数的性质加以更深入的考察.如中学数学一般都不研究函数图像的弯曲情况(高等数学中有一些用以刻划函数图像的弯曲状况的概念如"凸函数","曲率","拐点"等等).中学数学主要研究函数的最大值与最小值,几乎不涉及求解函数极值问题(函数的最大值与极大值是两个有联系但又是有本质区别的概念).另一方面,即使是同一个问题,研究的方法也是多种多样的,比如函数单调性的研究,中学数学领域通常的方法是借助函数的图像对函数单调性的结论作出一个合理的猜想然后再根据函数单调性的概念加以证明,但在高等数学领域函数单调性的研究可能会更多地以"导数"作为解决问题的工具.因此,中学数学所提供的函数知识只能说是对"函数"作了一个初步的刻划,就像我们对身边的某一位同学,在获悉了姓名、性别、年龄、身高、体重等信息以后,我们对他(她)好像有一个大致的了解,但随着接触的增加,我们会感到对他(她)了解更多,但也会觉得他(她)不被人们了解的方面也更多.对于函数的研究可以说大体上也是如此.这样一段解说无非是想说明一个观点,各种不同的函数以及函数的各种不同的性

质,都只是构建“函数”这个数学基本概念的一些组成部分,它们都不是孤立的,而是相互依存、相互制约,它需要我们把相关的知识编织成一个紧密的网络体系,能够灵活地、综合地运用它们来研究面临的问题.

函数本身是最重要的数学研究对象,但它同时又是最重要的数学研究工具.针对不同学龄段的学生,对于函数概念,我国的中学数学教材采用了一种比较倾向于直观描述的定义方式和另一种更倾向于抽象表述的定义方式.它们是:“设在一个变化的过程中有两个变量 x 与 y,如果对于 x 的每一个值,y 都有唯一的值与它对应,那么就说 x 是自变量,y 是 x 的函数”,“如果 A、B 都是非空数集,那么 A 到 B 的映射 $f{:}A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数”.不论我们用怎样的方式表述函数,函数概念所揭示的是一个量的变化服从于另外一个量(从具有更广泛适用性的角度思考,应该是说服从于其他若干个量)的变化规律.现实世界中存在着许许多多的变量,函数是研究这些变量所满足的客观规律的重要工具.

方程和不等式也是中学数学的重要教学内容,通常,它们都以独立章节的形式出现于数学教科书.但是,这并不等于说方程、不等式、函数是三个互不联系的概念.对于函数 $y=f(x)$而言,如果应变量 y 取一个特定的值 y_0,那么 $f(x)=y_0$ 就被认为是一个方程,同样,$f(x)>y_0$ 便是不等式.可以这样说,方程和不等式都是函数的一种特殊情形,因此,函数的各种性质经常被应用于方程和不等式的研究领域.还有,数列知识通常也是被单列于各种不同版本的教材或参考书籍,但是,数列是一种定义域为正整数集的函数,由于定义域的特殊性使得数列确实拥有许多一般函数所不曾有的性质,而且数列的研究在方法上也有许多仅适用于数列问题的特殊手段,但是,函数工具对于研究数列的性质仍然可以发挥强大的作用,原因很简单,因为数列只是一种比较特殊的函数.

作为重要的数学知识,中学数学所包含的函数知识已经构成了一个相当丰富多采的知识框架,但是,对于函数概念的理解决不能只停留在知识体系的层面,还要进一步把它作为一种观念,一种工具而在数学问题的解决过程中发挥它作为数学理念的引领作用.

典型例题精讲

$y'=3x^2-2x-1$

[例 1] 求函数 $f(x)=x^3-x^2-x(x\geqslant 0)$的最小值.

解题策略 这是一个中学数学教材未曾直接探讨过的函数,而且,教科书所提供的求解函数最小值的一般方法对于该问题也难以切入.面对一个已有的函数知识难以直接应用的函数性质研究问题[这里根据函数定义域不是一个关于原点对称的区间可知函数 $f(x)=x^3-x^2-x(x\geqslant 0)$是一个非奇非偶函数,但这一结论对于函数最小值的研究没有直接作用],如果它的解析式是已知的,那么,利用计算器或计算机等计算工具算出函数图像上某些点的坐标,然后用描点法作出函数的大致图像,可能是发现和猜想函数各种性质的最直观、最有效的途径之一.用描点法可得函数 $f(x)=x^3-x^2-x(x\geqslant 0)$的大致图像如右并可猜想此函数的最小值是 $f(1)=-1$.接下来的问题是如何证明这个猜想.函数最小值的概念是:对函数 $y=f(x)$定义域 D 上的任何一个自变量 x 都有函数值 $f(x)\geqslant m$,这里 m 是一个常数且至少存在 $x_0\in D$ 使得 $f(x_0)=m$ 成立.因此,要证明函数 $f(x)=x^3-x^2-x(x\geqslant 0)$的最小值是$-1$,就是要证明 $f(x)\geqslant -1$ 对任意满足 $x\geqslant 0$ 的实数 x 都成立,这一问题用求差比较法即可解决.

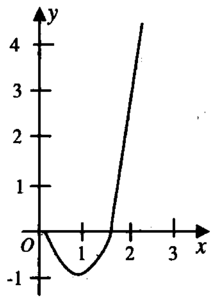

图 1-1

解 $f(x)-(-1)=x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)^2(x+1)$,由 $x\geqslant 0$ 得 $f(x)+1\geqslant 0$ 当 $x\geqslant 0$ 时恒成立,所以,当 $x=1$ 时,函数 $f(x)=x^3-x^2-x(x\geqslant 0)$取

得最小值－1.

点评 对于解析式和定义域都已经给定的函数,它有许多性质特征可以探索和研究.但是,首先选择哪一个视角对函数的性质展开研究?哪一方面的工作比较容易入手?或者问,世界上第一个研究函数 $f(x)=x^3-x^2-x$ $(x\geqslant 0)$的人是如何发现该函数有最小值存在?提出这些问题的目的,就是要说明一个十分重要的数学观点,函数性质研究最重要、最基本,也是最直观的突破口之一是用描点法作出函数图像,通过对函数图像的观察再猜想函数性质的各种结论.要特别指出的是,由于描点法作图的应用可以几乎不依赖于函数的固有性质,因此,函数图像有可能对于函数性质的原创发现提供最直观的支持,它不仅仅是一种解题手段,它具有一定的科学发现意义.当然,问题的另一个方面是描点法作图,尤其是手工描点作图对于函数图像结构特征的表现是相当粗糙的,有时,我们不得不先借助于函数的基本性质先了解了函数图像的某些特征之后,才能获得比较准确的函数图像.形象地说,函数的图像与函数的性质,是一个先有鸡还是先有蛋的问题,不能一概而论.然而实践证明,由图像到性质,尽管不是万能钥匙,但确实是相当有效的途径.

[**例 2**] 对于函数$f(x)=\begin{cases}\sin x & 若\sin x\geqslant\cos x\\ \cos x & 若\sin x<\cos x\end{cases}$给出下列四个命题:

(1)该函数的值域是$[-1,1]$;

(2)当且仅当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时,该函数取得最大值 1;

(3)该函数是以π为最小正周期的周期函数;

(4)当且仅当 $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时 $f(x)<0$,

上述命题中正确的命题是_____.

(A) (1) (B) (2) (C) (3) (D) (4)

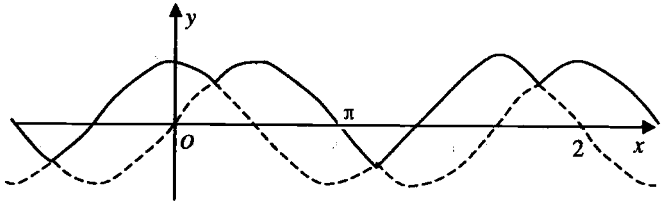

图 1-2

解题策略 函数 $f(x)$是由两个常见函数构建的,因此,在同一个坐标系中作出正弦函数和余弦函数的图像,对于任意的$x\in\mathbf{R}$,函数$y=\sin x$和$y=\cos x$的图像上各有一点,根据函数 $f(x)$的定义,取所有位于上方的点即构成它的图像.通过对图像的观察,再思考所给出的命题是否正确.

解 函数$f(x)=\begin{cases}\sin x & 若\sin x\geqslant\cos x\\ \cos x & 若\sin x<\cos x\end{cases}$的图像如图所示:

由图像可知只有命题(4)是正确的.

点评 如果记 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大数值,那么,$f(x)=\max\{f_1(x),f_2(x),\cdots f_n(x)\}$是定义在 n 个函数 $y=f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$的定义域的交集上函数,它在原本互不关联的 n 个函数之间建立了一种联系,例 2 中 $f(x)=\max\{\sin x,\cos x\}$,它的出发点是两个十分熟悉的函数,因此,它的图像可以由已知函数的图像直接叠加而得到,获得了函数图像以后便可以对函数的值域、最大值、周期性等函数基本性质的作出判断,尽管问题中给出的结论是错误的,但我们可以根据图像对给出的错误命题作出修正:(1)函数$f(x)$的值域是$[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$;(2)当且仅当$x=2k\pi$或$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时,该函数取得最大值 1;(3)该函数是以 2π为最小正周期的周期函数.不仅如此,我们还可以获得问题中没有指出的函数 $f(x)$的性质,如“当且仅当

$x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$时,该函数取得最小值$-\frac{\sqrt{2}}{2}$”,“该函数是非奇非偶函数”,“该函数的图像关于直线 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$轴对称”;“该函数在$[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$, $[2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+2\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$上单调递增;在$[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}]$, $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{5\pi}{4}]$ $(k\in\mathbf{Z})$上单调递减”;“当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$时,该函数取得极小值$\frac{\sqrt{2}}{2}$”(这是一个不属于中学数学范畴的结论)等等.因此,学习例 1 和例 2 的最重要的成果,是在于建立解决函数问题时的图像意识,不论是熟悉的还是不熟悉的函数,都要能自觉地发掘函数图像对于问题解决的潜在价值.

[例 3] 求函数$f(x)=\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)$的值域并指出它的严格单调递增区间. $\frac{\pi}{2} < \sin x < -\frac{\pi}{2}$

解题策略 这个函数也是以正弦函数和余弦函数为基础构建的,关于它的性质,最容易获得结论是此函数的定义域为 $\mathbf{R}$,它是以 2π为周期的周期函数,如果能获得该函数在区间$[0,2\pi]$上函数单调性的结论,那么,由函数周期性便可推演得到此函数所有的严格单调递增区间.反三角函数知识提供的两个条件等式:若$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,则 $\arcsin(\sin x)=x$;若 $0\leqslant x\leqslant\pi$,则$\arccos(\cos x)=x$.它们为化简此函数的解析式提供了可能,在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上,函数$f(x)=\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)$是正比例函数的“一部分”,而在其他自变量取值区间上,尽管 $\arcsin(\sin x)$和 $\arccos(\cos x)$不能直接被化简,但是,利用诱导公式对它们作适当的变形,上述两个条件等式仍可发挥作用,这种等

式变形的目标是希望此函数的解析式转换为接近一次函数的形式.

解 $f(x+2\pi)=\arcsin[\sin(x+2\pi)]+\arccos[\cos(x+2\pi)]$

$=\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)$,

即 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

若 $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$,则 $f(x)=2x$,

若 $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$,则 $0\leqslant\pi-x<\frac{\pi}{2}$,$f(x)=\arcsin[\sin(\pi-x)]+\arccos[-\cos(\pi-x)]=\pi-x+\pi-(\pi-x)=\pi$,

若 $\pi<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$,则 $0<x-\pi\leq\frac{\pi}{2}$,$f(x)=\arcsin[-\sin(x-\pi)]+\arccos[-\cos(x-\pi)]=-(x-\pi)+\pi-(x-\pi)=3\pi-2x$,

若 $\frac{3\pi}{2}<x\leqslant 2\pi$,则 $0\leq 2\pi-x<\frac{\pi}{2}$,

$f(x)=\arcsin[-\sin(2\pi-x)]+\arccos[\cos(2\pi-x)]$
$=-(2\pi-x)+(2\pi-x)=0$,

所以,函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)$ 在 $[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$ 上严格单调递增,

在 $[2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$ 上严格单调递减.

点评 根据上述解析式的化简工作以及函数周期性的结论,我们便可以方便地得到一些描述此函数性质特征的"副产品",如函数的图像,将函数的解析式以分段函数的形式

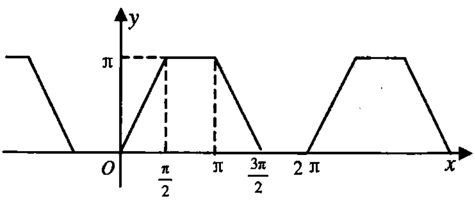

图 1-3

$$f(x)=\begin{cases} x-2k\pi & 2k\pi\leqslant x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ \pi & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<2k\pi+\pi \\ 3\pi-2(x-2k\pi) & 2k\pi+\pi\leqslant x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2} \\ 0 & 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\leqslant x<2k\pi+2\pi \end{cases}$$ $(k\in\mathbf{Z})$ 表达等等.例 3

的目的是在于研究函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)$的各种性质,它以函数单调性为代表而不直接提出其他方面的问题,但是,函数的各种性质是相互依存,相互制约的,尽管问题的表面不涉及函数的周期性,然而问题的解决过程会使我们意识到它实际上是不可回避的.还有,在没有自动函数作图工具的情况下,处理本问题由函数性质入手显然比从函数图像入手更为合理,这个函数的图像应当是函数性质研究的后续产品.运用这一例题我们试图说明一个事实,那就是函数的各种性质应当综合应用,为了研究函数某一方面性质,解决问题的出发点可能是函数的另一个性质.

[例 4] 函数 $y=x^3-x+2$ 的图像是曲线 C,则下列命题中正确的是______.

(A) 曲线 C 不是中心对称图形;

(B) 曲线 C 关于原点中心对称;

(C) 曲线 C 上任意一点 P 关于点(0,2)的对称点 P' 必在曲线 C 上;

(D) 过点(0,2)的任意一条直线必定与曲线 C 有三个不同的交点.

解题策略 我们可以利用描点法作出函数 $y=x^3-x+2$ 的大致图像并估计此函数的图像关于点(0,2)对称.

解 设 $P(x,y)$是函数 $y=x^3-x+2$ 的图像上的任意一点,点 $P'(x',y')$与点 P 关于点(0,2)对称,则 $\dfrac{1}{2}(x+x')=0$, $\dfrac{1}{2}(y+y')=2$,

$y'=4-y=4-(x^3-x+2)=(-x)^3-(-x)+2=x'^3-x'+2$，所以，点 $P'(x',y')$ 在函数 $y=x^3-x+2$ 的图像上.

点评 本问题的四个命题是对函数 $y=x^3-x+2$ 图像对称特征的判断，而函数奇偶性是对函数图像的对称特征的代数表述，因此，解决上述问题除了作图估计的方法以外，似乎还可以考虑用函数的奇偶性作为解决问题的工具.函数 $y=x^3-x+2$ 是一个非奇非偶函数，这一结果是由于解析式中的常数项造成的，函数 $y=x^3-x$ 显然是一个奇函数，它的图像关于原点中心对称，$y=x^3-x+2$ 中常数项"2"的作用是将函数 $y=x^3-x$ 的图像向上平移 2 个单位，由此便可以获得"函数 $y=x^3-x+2$ 图像上任意一点 P 关于点(0,2)的对称点 P' 必定在此函数图像上"的结论.这一解法将函数的奇偶性与函数图像的平移观点相结合，是函数基本性质综合运用的一个实例.

[例 5] 已知定义在 R 上的函数 $f(x)=x^3+x$.证明：对于任意的 $a,b\in R$，若 $a+b>0$，则 $f(a)+f(b)>0$.

$f(a)=a^3>0$　$(a+b)(a^2-ab+b^2)+a+b$

解题策略 对代数式 $f(a)+f(b)$ 实施因式分解并逐一说明每个因式的值的正负情况，应该是解决此问题的最直接的切入点.

解法一 $f(a)+f(b)=a^3+a+b^3+b=(a+b)(a^2-ab+b^2+1)$

$$=(a+b)[(a-\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2+1]>0.$$

解法二 $f(-x)=(-x)^3-x=-f(x)$，即 $f(x)=x^3+x$ 是奇函数，

设 $x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3+x_1-(x_2^3+x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)<0$，

即 $f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是增函数，于是，由 $a>-b$ 得 $f(a)>f(-b)=-f(b)$，所以，$f(a)+f(b)>0$.

点评 上述两种不同的解题方法实际上是两种不同的解决问题的指