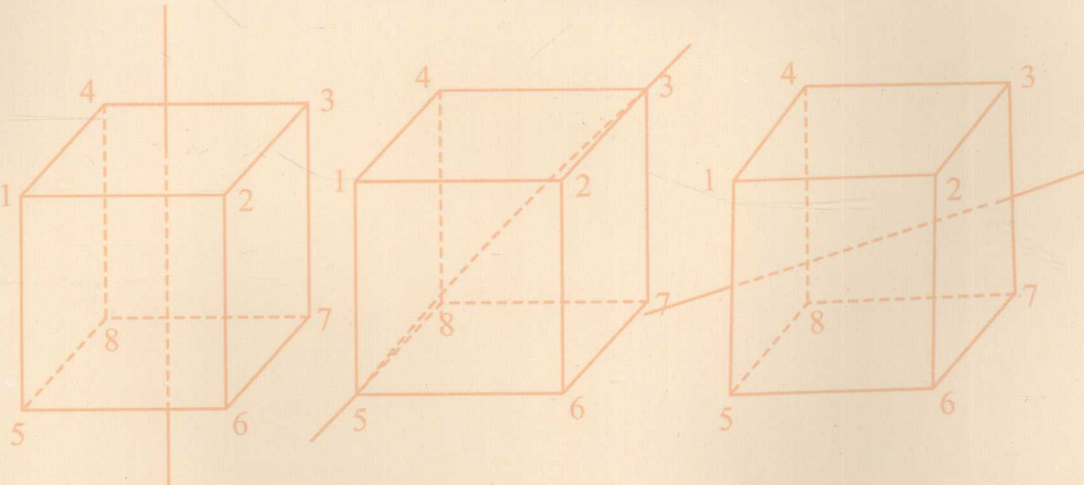
"十一五"国家重点图书 中国科学技术大学精品教材

组合数学引论

第 2 版

许胤龙 孙淑玲 编著



中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学精品教材

组合数学引论

ZUHE SHUXUE YINLUN

第 2 版

许胤龙　孙淑玲　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书以组合计数问题为重点，介绍了组合数学的基本原理和思想方法. 全书共分10章：鸽巢原理，排列与组合，二项式系数，容斥原理，生成函数，递推关系，特殊计数序列，Pólya计数理论，相异代表系，组合设计. 取材的侧重点在于体现组合数学在计算机科学特别是在算法分析领域中的应用. 每章后面都附有一定数量的习题，供读者练习和进一步思考.

本书可作为计算机专业、应用数学专业研究生和高年级本科生的教材或教学参考书，也可供从事这方面工作的教学、科研和技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合数学引论/许胤龙，孙淑玲编著. —2版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2010.4

"十一五"国家重点图书

(中国科学技术大学精品教材)

安徽省高等学校"十一五"省级规划教材

ISBN 978-7-312-02665-2

Ⅰ.组…　Ⅱ.①许…　②孙…　Ⅲ.组合数学—高等学校—教材　Ⅳ.O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第048844号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址　安徽省合肥市金寨路96号，230026

网址　http://press.ustc.edu.cn

安徽辉隆农资集团瑞隆印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本：710×960 1/16　印张：19.5　插页：2　字数：366千

1999年2月第1版　2010年4月第2版

2010年4月第10次印刷

印数：25001—28000册

定价：33.00元

总　序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年.为了反映五十年来办学理念和特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列.在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列.

1958年学校成立之时,教员大部分都来自中国科学院的各个研究所.作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统.同时,根据"全院办校,所系结合"的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中.五十年来,外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变.正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一.当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献.建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生.这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使"科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合"的方针得到进一步

深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校.在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点，用创新的精神编写教材.五十年来，进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生，针对他们的具体情况编写教材，才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合，根据自己的科研体会，借鉴目前国外相关专业有关课程的经验，注意理论与实际应用的结合，基础知识与最新发展的结合，课堂教学与课外实践的结合，精心组织材料、认真编写教材，使学生在掌握扎实的理论基础的同时，了解最新的研究方法，掌握实际应用的技术.

这次入选的50种精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校五十年教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.该系列精品教材的出版，既是向学校五十周年校庆的献礼，也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念.

侯建国

2008年8月

第 2 版前言

本书第 1 版自 1999 年出版以来,成为了多所高校计算机与数学等相关专业的教材与教学参考书,在使用中深受广大师生的欢迎和好评.

经过十年来的使用,通过一些读者的反馈意见以及作者本人在中国科学技术大学的教学体会,在原书第 1 版的基础上,本书内容得以重新组织,并修订成第 2 版.在第 2 版的撰写过程中,作者尽最大的努力,使得教材的内容能够充分反映组合数学的基本原理、基本方法以及相关的应用背景,强调数学是描述物理现象的一种工具,而数学定理、公式只是世间物理规律的总结;修正了第 1 版中的错误,增加了一些例子与解释,使得第 2 版更加通俗易懂,也增加了一些习题,供读者们练习.

具体的修订内容有:

(1) 第 1 版中的第 2 章太长,在第 2 版中,将二项式定理等相关内容作为独立的一章.

(2) 第 1 版第 2 章中,正整数的分拆数以及第二类 Stirling 数的部分内容要用到生成函数,所以在第 2 版中将这些内容重新整理,放到生成函数这一章之后的其他章节.

(3) 由于生成函数是求解递推关系的重要手段,所以在第 2 版中将生成函数这一章放在递推关系这一章的前面.

(4) 在 Pólya 计算理论与相异代表系这两章,增加了一些基础知识的介绍以及一些例子,增强这两章的可读性.

在中国科学技术大学计算机科学与技术学院以及学校相关部门的关怀与支持下,本书第 2 版非常荣幸地作为中国科学科学技术大学 50 周年校庆精品教材出版.在此对关心此书的领导、同仁以及相关学生表示衷心的感谢!

本书第2版的编写工作由许胤龙完成.由于作者水平有限,书中难免存在不足与错误,恳请读者批评指正.

作　者

2009年12月于中国科大

第 1 版前言

组合数学主要研究一组离散对象满足一定条件的安排的存在性,以及这种安排的构造、枚举计数及优化等问题,它是整个离散数学的一个重要组成部分.

人们对组合数学的兴趣可以追溯到很早的年代,例如,四千多年前我国古代的《河图》、《洛书》中就已给出了 3 阶幻方问题的解答.历史上,组合数学的发展与数论及概率计算有着密切的联系,有些问题最初是以数学游戏的形式出现的,后来在实际背景的刺激下获得了新的生命力和发展.近几十年来,计算机科学、数字通信、规划和实验设计等理论和应用学科的发展,特别是 20 世纪 50 年代末以来计算机科学的飞速发展,一方面对离散数据结构的设计与研究提出了迫切的要求,另一方面又对大型数据结构的研究和求解提供了现实的可能性,因此,为许多离散对象的安排问题提供数学模型和研究方法的组合数学也获得了极大的发展.目前,组合数学不仅已成为数学中的一个重要分支,而且还是计算机科学、管理科学及其他许多学科中一些分支的数学基础.

组合数学与计算机科学有着十分密切的关系.用计算机求解一个问题时,总要涉及设计离散数据结构并对其进行运算,算法所需的运算次数及存储单元量是评价一个算法的两个基本标准,即所谓的时间复杂度和空间复杂度,组合数学为其提供了实用的分析方法和技巧.因此,国内外许多高等学校都把组合数学作为计算机系的一门基础理论课.

本书以组合计数问题为重点,介绍了组合数学的基本原理和思想方法.全书共分 8 章:鸽巢原理,排列与组合,容斥原理,递推关系,生成函数,Pólya 计数理论,相异代表系,组合设计.取材的侧重点在于体现组合数学在计算机科学特别是在算法分析领域中的应用.每章后面都附有一定数量的习题,供读者练习和进一步思考.本书可作为计算机专业、应用数学专业研究生和高年级本科生的教材或教学参考

书，也可供从事这方面工作的教学、科研和技术人员参考.

本书是作者总结对计算机系高年级本科生和研究生教学的实践经验，在原有讲义的基础上修改整理而成的. 孙淑玲编写第 5～8 章，许胤龙编写绪论及第 1～4 章.

在本书编写过程中，得到了中国科学技术大学计算机系领导和老师们的支持与帮助，在此谨致谢意.

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，恳请读者批评指正.

作　者

1998 年 4 月于中国科大

目　　次

绪　论

许多组合问题经常出现在我们的日常工作、生活及娱乐中，相信本书的读者在此之前一定接触过组合问题，例如：

(1) n 个队之间的循环赛总共有多少场比赛？

(2) 如何设计一个学校的课程表，使得同一间教室、同一个班级以及同一位教员在同一时间内没有安排两门课程？

(3) 一位旅客要去 n 个城市旅游，如何安排其行程，使得总的行程最短、花费最少？

组合数学也称为组合学或组合分析，它是一门既古老又年轻的数学分支．说其古老，是因为它所研究的有些问题可以追溯到很久很久以前，组合学在 17 和 18 世纪与数论、概率计算交叉地发展，特别是在数学游戏中有着较深的根源，以往只是它的娱乐性及高雅性吸引人们去研究它．近几十年来，计算机科学、数字通信理论、规划论和试验设计等理论和应用学科的发展促进了组合学的飞速发展，特别是 20 世纪 50 年代末以来计算机科学的飞速发展，又使这门古老的数学分支焕发了新的生机．计算机惊人的计算速度，使得其可以解决以前难以想象的大规模计算问题，但计算机是不能独立工作的，它所执行的只是人编写的程序，这些程序中经常包含了许多组合问题的求解算法．现在，组合学不仅在理论科学，而且在应用科学中也产生了很大的作用，它的“思想”和“技巧”在物理学、生物学乃至社会科学中都有应用．

组合学所研究的中心问题是“按照一定的规则(模式)来安排有限多个对象”，它提出的问题有如下 4 类：

1．*安排的存在性(存在性问题)*

如果人们想把有限多个对象按照它们所应满足的条件来进行安排，当符合要求的安排并非显然存在或显然不存在时，首要的问题就是要证明或否定它的存在．

例如，某校外语教研室有 4 位教员 A,B,C,D，下学期要开设英语、日语、德

语、法语 4 门外语课. 设 A 与 B 都能教英语、日语, C 能教英语、德语、法语, D 能教德语. 问能否设计一种工作安排方案, 使得每位教员在下学期教且仅教一门外语课?

在平面上将每位教员和每门外语课分别用一个点来表示, 若教员 x 能教外语课 y, 则在相应的两点间连一条边. 如此构造出图 1, 将原问题变为在图 1 中找出 4 条边, 使这 4 条边两两之间无公共端点.

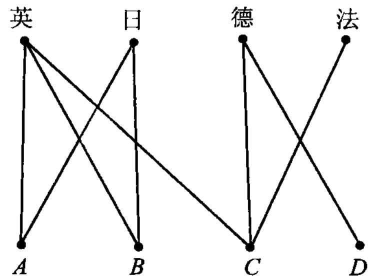


图 1

从图 1 可以看出, 有两种不同的工作安排方案: A 教英语、B 教日语、C 教法语、D 教德语, 或者 A 教日语、B 教英语、C 教法语、D 教德语. 但如果 A, B, C, D 能教的语种分别为英语与日语、德语与法语、英语、日语, 就不存在一种每位教员教且仅教一门外语课的工作安排.

从上例可以看出, 满足一定条件的安排并不总是存在的, 这就给我们提出了这样一个问题: 在什么样的条件下这种安排是存在的? 这也是安排的存在性所研究的中心问题.

2. 安排的枚举和分类(计数问题)

如果所要求的安排存在, 则可能有多种不同的安排. 这又经常给人们提出这样的问题: 有多少种可能的安排方案? 如何对安排的方案进行分类?

例如, 对正三角形的 3 个顶点进行红、蓝两色着色, 如图 2 所示, 共有 $2^3 = 8$ 种方案.

在图 2 中, 如果我们将经旋转后互相重合的两种方案看成是同类的, 则图中的每一列就是一类着色方案, 共有 4 类着色方案.

对于一般的计数问题, 我们需要给出两个分配方案是否属于同一类的数学模型, 表明判定同类分配方案的数学方法, 进而给出计算分配方案分类的计算公式.

虽然任何组合问题中都包含存在性问题和计数问题, 但通常来说, 若一组合问题的存在性问题需作大量研究的话, 则其计数问题的难度是难以想象的. 然而, 若

一组合问题已有一特定解，则还是有可能计算出其解的个数或对其进行分类的.

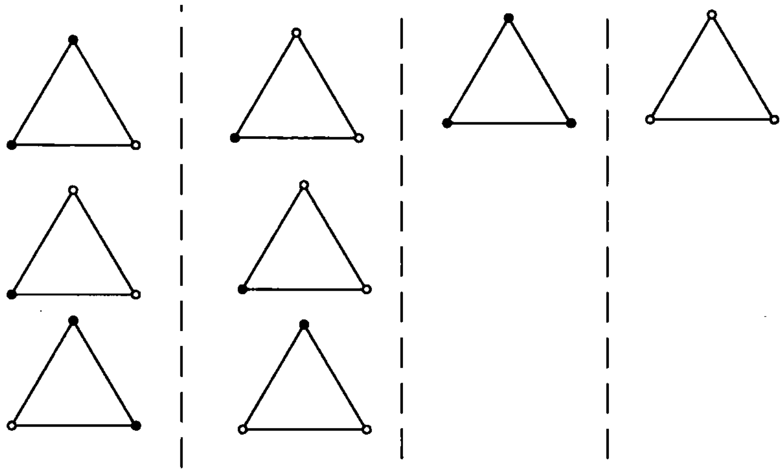


图 2

3. 构造性问题

在实际应用中，仅仅判定分配方案是否存在或给出可能的分配方案个数常常是不够的，很多应用都需要给出具体的分配方案，因而需要给出求其某一特定解的算法，这就是所谓的构造性问题.

例　幻方问题.

将 $1,2,\cdots,n^2$ 共 n^2 个整数填入 $n\times n$ 的棋盘中，使每行、每列及两条对角线上的元素之和均相等. 满足上述条件的一个安排称为一个 n 阶幻方. 图 3 中的(a) 和 (b) 分别是一个 3 阶幻方和一个 4 阶幻方.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(b)

图 3

一个 n 阶幻方中，所有整数的和为

$$1+2+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

因为每行、每列的和相等，共有 n 行和 n 列，所以每行或每列的和均为$\frac{n(n^2+1)}{2}$.

组合学所研究的是 n 取何值时 n 阶幻方存在，并且要找出构造 n 阶幻方的一般方法. 容易证明2阶幻方是不存在的，但对其余所有的正整数 n，n 阶幻方都可以构造出来. 有许多构造 n 阶幻方的方法，这里我们给大家介绍 de la Loubére 构造奇数阶幻方的方法：首先将1放入第一行的中间位置上；若 i 已填入，则除了以下几种特殊情况外，将 $i+1$ 填入 i 所在位置的右边一列的上一行：

(1) 若 i 在第一行，则将 $i+1$ 填入 i 所在位置的右边一列的底行；

(2) 若 i 在最后一列，则将 $i+1$ 填入 i 的上一行的第一列；

(3) 若 i 在第一行的最后一列或 $i+1$ 该填的位置已被填上，则 $i+1$ 直接填入 i 所在位置的正下方.

利用 de la Loubére 方法构造的 5 阶幻方如图 4 所示.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

图 4

4. 优化问题

很多的应用问题都有多种分配方案，不同分配方案所需的成本或所带来的效益等方面是不同的. 在实际应用中，当然希望最小化成本或最大化效益，此类问题是在一定的条件下找出一个(或几个) 最优或近乎最优的安排方案.

例如，产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 生产某种产品的产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 对该种产品的需求量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 假设从产地 A_i 到销地 B_j 的单位运费为 c_{ij}，产和销是平衡的，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

现问应怎样合理安排该种产品的运输方案，使其总运费最少？

设从 A_i 到 B_j 的运量为 x_{ij}，则原问题即求解方程