# 随机信号分析

SUIJI XINHAO FENXI

邵朝 等编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

# 随机信号分析

邵朝 曾耀平 孙爱晶 毕萍 编著

国防工业出版社
·北京·

# 内 容 简 介

全书共分为5章。主要内容包括:随机变量基础知识;随机信号的基本概念,涉及平稳、遍历随机信号的基本内容;平稳随机信号的谱分析;线性系统对随机信号的作用机理,涉及到一些随机信号特别是平稳随机信号的线性变换或线性滤波的基本问题;窄带随机信号的表示及其统计特性。为实现窄带信号的表示,对希尔伯特变换给出了较细致的分析。

本书可作为电子、通信、控制工程专业本科生及硕士研究生教材,也可作为应用数学专业本科及硕士研究生阶段的参考书;对于希望学习和了解随机信号分析与应用的电子、通信、控制工程等专业技术人员,也是很好的参考资料。

**图书在版编目(CIP)数据**

随机信号分析 / 邵朝等编著. —北京:国防工业出版社,2010.5

ISBN 978-7-118-06828-3

Ⅰ.①随… Ⅱ.①邵… Ⅲ.①随机信号-信号分析 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第069513号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 10¼ 字数 180千字

2010年5月第1版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 19.00元



国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

# 前　言

“随机信号分析”是电子、通信、控制工程类专业的主要专业基础课程之一。它是专门研究随机信号的变化规律、统计特性、表达特征等的学科。它的思想精髓广泛渗透于雷达、通信、自动控制、随机震动、地震监测、气象预报、生物电子、宏观及微观经济预测等领域。特别是随着现代通信、信息技术的发展及与各个领域的融合，学习、理解和掌握随机信号的理论分析及处理方法，对相关领域的工程技术人员是不可或缺的。

本书是编著者在多年的教学工作实践积累基础上完成的。编写宗旨是适合电子信息类工程专业本科生在较短学时学习掌握随机信号的基础知识，为后续课程学习打下基础，特别是为学习、理解及掌握“通信原理”课程提供坚实的理论基础。在写作内容选取上，参考了樊昌信主编的《通信原理》的相关内容及需求。尽量抓住随机信号分析理论的主线与骨干，精炼内容，突出重点，围绕主线节减内容。依据这样的原则，本书由 5 章构成，计划用 32 个学时完成教学。每章后附有习题，书后附有习题参考解答。

第 1 章介绍随机变量的基础知识，对随机变量的核心概念——概率空间、分布函数、密度函数、数字特征以及“通信原理”课程经常用到的条件概率等给予重点关注。

第 2 章围绕随机信号的基本概念展开，涉及狭义、广义平稳及广义遍历等随机信号一些基本概念。

第 3 章讨论平稳随机信号的谱分析，维纳—辛钦定理是其中心内容，广义平稳概念是其基础。

第 4 章分析线性系统对随机信号的作用机理，这里涉及到随机信号特别是平稳随机信号的线性变换或线性滤波的基本问题，讨论问题的重点是平稳随机信号的（互、自）相关函数及功率谱密度函数经线性变换或线性滤波后的表征。作为应用环节，本章还简要分析讨论了白噪声、色噪声及等效带宽的一些概念。

第 5 章分析窄带随机信号的表示及其统计特性。窄带随机信号是通信工程及其他电子信息领域经常遇到或需要处理的信号。为实现窄带信号的表示，本

章也对希尔伯特变换给出较细致的分析。因为希尔伯特变换是一个线性变换或线性滤波器，而窄带随机信号是平稳随机信号中特别重要的一类，因此，第5章是第3章、第4章内容的综合应用。

阅读本书要求具备线性系统的基础知识，特别是熟练应用傅里叶变换的基础知识。而通过对本书的学习，不但能为“通信原理”等核心课程提供基础准备，也有助于加深理解“概率与统计”、“信号与系统”等课程，提高读者对于信号分析处理问题的感悟能力。

本书配备有教学幻灯片，有需要的可以向作者(shaochao@ xupt. edu. cn)或通过出版社索取。

本书主要由邵朝完成，习题部分由曾耀平、孙爱晶、毕萍完成。

本书得到了西安邮电大学通信与信息工程学院教学改革项目的资助，对此表示感谢；官银莹、卢鹏飞、马建等硕士研究生阅读和校正了本书稿件，在此对他们的工作表示感谢；最后，还要特别感谢国防工业出版社的各位老师，是他们的辛勤劳动才使本书得以出版，在此对他们表达衷心的谢意。

由于编者水平所限，书中难免有不足之处，敬请读者指正。

编著者

# 目　录

# 第 1 章　随机变量的基础知识

随机性事件或称不确定性事件，是我们生活中经常遇到的事件。从信息论角度讲，只有随机性事件才能携带(提供)信息。要确定随机性事件携带的信息量，必须要确定随机性事件的物理范围。对于这一问题的详细讨论，是概率论研究的范畴。本章对它做简要复习。

## 1.1　随机变量的一般表述

**定义**　设给定一个概率空间$(S,\mathscr{F},P)$，其中，$S$ 为样本空间(物理背景)；$\mathscr{F}$ 为随机事件空间(所有在给定物理背景下可能的事件总体)；$P$ 为概率取值空间(在给定物理背景中，发生某确定事件可能性大小)。

对于 $s\in S$，$X(s)$ 是一个实单值函数，且对于任意给定实数 $x$，$\{s:X(s)<x\}$ 是一个随机事件，即 $\{s:X(s)<x\}\in\mathscr{F}$，则称 $X(s)$ 为随机变量，将随机事件 $\{s:X(s)<x\}$ 简化为 $(X(s)<x)$。

**定义**　设$(S,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，$X(s)$ 是定义在其上的一个随机变量，$\mathfrak{R}=\{x:-\infty<x<\infty\}$ 称为实数空间，对于任意 $x\in\mathfrak{R}$，$p(X(s)<x)$ 表示事件 $(X(s)<x)$ 的概率，令

$$F(x)=p(X(s)<x)$$

显然 $F(x)$ 是以实数 $x$ 为自由变量的函数，称 $F(x)$ 为随机变量 $X(s)$ 的分布函数。若 $\partial F(x)/\partial x=f(x)$ 存在，则称 $f(x)$ 为随机变量 $X(s)$ 的分布密度函数。显然 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ (初学者应该注意区分确定性变量与不确定性变量)。

在连续型随机变量中，最重要的是服从正态(又名 Gaussian)分布的随机变量，一般正态分布的随机变量 $X$ 的分布密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

式中：$\mu$、$\sigma$ 为常数，记：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。标准正态分布的随机变量 $X$ 的分布密度函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

记:$X\sim N(0,1)$。

随机变量的分布函数 $F(x)$ 的性质如下:

(1)非负单调递增性。即 $1\geqslant F(x)\geqslant 0$,$F(x)$ 是单调递增函数。

(2)右连续性。即 $\lim\limits_{x\to a+0}F(x)=F(a)$。

(3)0、1 左右趋向。$0=F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$;$1=F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$。

## 1.2 多维随机变量

### 1.2.1 多维随机变量的基本概念

多维随机变量是一维随机变量概念的拓展,用以讨论不同物理范畴随机事件之间的关联及影响。

**定义** 设 $X$、$Y$ 为定义在同一空间 $(S,\mathscr{F},P)$ 上的两个随机变量,则 $(X,Y)$ 称为二维随机变量,对于任意 $x,y\in\mathfrak{R}$,$p(X(s)<x,Y(s)<y)$ 表示事件 $(X(s)<x,Y(s)<y)$ 的概率,令

$$F(x,y)=p(X(s)<x,Y(s)<y)$$

称 $F(x,y)$ 为随机变量 $X(s)$、$Y(s)$ 的联合分布函数,或二维分布函数。

函数 $F(x,y)$ 有以下性质:

(1)对于变量 $x,y$ 的非负单调递增性。即 $1\geqslant F(x,y)\geqslant 0$,$F(x,y)$ 是变量 $x,y$ 的单调递增函数。

(2)对于变量 $x,y$ 的右连续性。即 $\lim\limits_{x\to a+0}F(x,y)=F(a,y)$,$\lim\limits_{y\to b+0}F(x,y)=F(x,b)$。

(3)0、1 左右趋向。$0=F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)$;$0=F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)$;$1=F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)$。

(4)在任意可度量二维区域的非负性。即对任意 4 个实数,$a_1\leqslant a_2$,$b_1\leqslant b_2$,有

$$F(a_2,b_2)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1)+F(a_1,b_1)\geqslant 0$$

此式表示了函数 $F(x,y)$ 在图 1.1 所示区域上的值。

若 $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y)$ 存在,则称 $f(x,y)$ 为随机变量 $X(s)$、$Y(s)$ 的联合分布

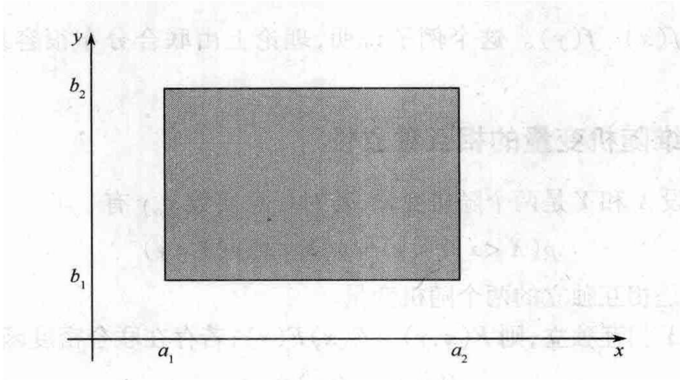


图 1.1　二维分布函数性质的说明

密度函数。显然有关系式：$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$。

### 1.2.2　多维随机变量边际分布

边际分布是随机变量从高维向较低维数的退化分布。设随机变量 $X$、$Y$ 的联合分布函数为 $F(x,y)$，则

$$F(x) = F(x, +\infty);F(y) = F(+\infty, y)$$

分别称为随机变量 $X$ 和 $Y$ 关于 $F(x,y)$ 的边际分布函数。

容易验证：$F(x, +\infty)$，$F(+\infty, y)$ 满足分布函数的所有性质和条件。

若与 $F(x,y)$ 对应的 $f(x,y)$ 存在，则

$$F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

类似地可以确定 $F(+\infty, y)$。很显然：

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y;\ f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

分别是随机变量 $X$ 和 $Y$ 边际分布密度函数。

【例 1.1】　设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合分布密度函数为（二维正态分布）

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}\right\}$$

其中 $|r| \leqslant 1$，求对应 $f(x)$、$f(y)$（一维正态分布）。

请读者利用高斯积分 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = 1$ 自行解答。很容易利用高斯积分计算参量积分 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 和 $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，进而求得边

际分布函数$f(x)$、$f(y)$。这个例子说明,理论上由联合分布很容易得到边际分布。

### 1.2.3 多维随机变量的相互独立性

**定义** 设$X$和$Y$是两个随机变量,若对任意实数$x$、$y$有

$$p(X<x,Y<y)=p(X<x)p(Y<y)$$

则称$X$和$Y$是相互独立的两个随机变量。

若$X$和$Y$相互独立,则$F(x,y)=F(x)F(y)$;若存在联合密度函数,则

$$f(x,y)=f(x)f(y)$$

这说明对于相互独立随机变量,由边际分布可以得到其联合分布。进而说明独立性是一个非常“强”的概念。

【例1.2】 设随机变量$X$和$Y$的联合分布密度函数为(二维正态分布)

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}\right]$$

若$r=0$,则

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)=f(x)f(y)$$

所以随机变量$X$和$Y$相互独立,称系数$r$为随机变量$X$和$Y$的相关系数。若随机变量$X$和$Y$相互独立,则它们不相关;反之,一般不成立,但对服从正态分布的随机变量成立,这也是正态分布的一个特点。

### 1.2.4 多维随机变量的条件分布

对于二维分布,若已知关于某个随机变量的事件已经发生,则关于另外一个随机变量的事件发生的概率就称为条件概率。

**定义** 若已知$X$、$Y$是两个随机变量,它们的联合分布函数为$F(x,y)$。设$A$、$B$分别是与$X$、$Y$有关的事件;在给定事件$B$的条件下,事件$A$发生的概率$p(A|B)$为

$$p(A|B)=\frac{p(A,B)}{p(B)}$$

【例1.3】 设$X$、$Y$的联合分布密度函数为$f(x,y)$,$\Delta y$为一个无穷小量。事

件 $B$ 定义为 $B=(y-\Delta y<Y\leqslant y+\Delta y)$；$A=(X\leqslant x)$，则

$$p(A\mid B)=\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}=\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f(v)\,\mathrm{d}v}$$

若 $X$、$Y$ 相互独立，$f(x,y)=f(x)f(y)$，则

$$p(A\mid B)=\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f(v)\,\mathrm{d}v}=\int_{-\infty}^{x}f(u)\,\mathrm{d}u=p(A)$$

这说明，若事件 $A$ 和 $B$ 相互独立，则事件 $A$ 发生的概率与事件 $B$ 是否发生无关。

**定义**　若 $X$、$Y$ 的联合分布密度函数为 $f(x,y)$，则已知 $Y$ 条件下 $X$ 的概率密度函数记为 $f(x|y)$，其定义式：

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$$

类似确定已知 $X$ 条件下 $Y$ 的概率密度函数。上面的讨论很容易推广到离散随机变量。

## 1.3　多维随机变量的坐标变换

在工程实践中，常常遇到一个不确定性事件的结果呈现是其他不确定性事件的因果，我们称其为随机变量的函数或坐标变换。

【例 1.4】　假设 $X_1$、$X_2$ 为相互独立的正态随机变量，它们的概率分布密度函数分别为 $f_1(x)$、$f_2(x)$，令

$$Y=\sqrt{X_1^2+X_2^2},\ \Phi=\arctan(X_2/X_1)$$

求 $Y$、$\Phi$ 的联合概率密度函数 $f(y,\varphi)$；$Y$、$\Phi$ 的边际分布密度函数，验证 $Y$、$\Phi$ 的独立性。由 $X_1$、$X_2$ 与 $Y$、$\Phi$ 的关系，可得

$$X_1=Y\cos\Phi,X_2=Y\sin\Phi,Y\geqslant 0,\ -\pi\leqslant\Phi\leqslant\pi$$

密度函数的变换关系为

$$f(y,\varphi)=f(x_1,x_2)\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y,\varphi)}\right|=f(x_1)f(x_2)\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y,\varphi)}\right|$$

其中:坐标变换之间 Jacobi 行列式的绝对值为

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -y\sin\varphi \\ \sin\varphi & y\cos\varphi \end{vmatrix} = y$$

$$f(y,\varphi) = y\cdot f(y\cos\varphi)f(y\sin\varphi)$$

若进一步假设 $X_1$、$X_2 \sim N(0,1)$,则

$$y\cdot f(y\cos\varphi)f(y\sin\varphi) = \frac{y}{2\pi}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

称 $f(\varphi) = \int_0^{+\infty} f(y,\varphi)\mathrm{d}y = 1/2\pi$ 为区间 $(-\pi,\pi]$ 上的均匀分布,称 $f(y) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(y,\varphi)\mathrm{d}\varphi = y\exp(-y^2/2)$ 为 Cauchy 分布。

## 1.4 随机变量的数字特征

前面几节讨论了随机变量、随机变量构成的随机事件、随机事件形成的分布函数及密度函数,为认知随机变量提供了不可或缺的手段。但在工程实际中,获得随机变量的分布函数很可能是奢望,而通过不断观察获得它的一系列样本是较为容易的。因此下面的概念更有实践意义。对下面的积分表达式,我们都认为是求和(加法)运算。

**1. 数学期望(均值)**

设 $X$ 为随机变量,其密度函数为 $f(x)$,$X$ 的数学期望为 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$,记为 $E(X)$,即 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$。

**2. 方差**

随机变量 $X$ 的方差计算式为 $\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x$,记为 $D(X)$,$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x$。容易验证,对于随机变量 $X\sim N(0,1)$,则有

$$E(X)=0;D(X)=1$$

**3. 相关系数**

设随机变量 $X$、$Y$ 的联合分布密度函数为 $f(x,y)$,则随机变量 $X$、$Y$ 的相关性用它们之间的相关系数确定,定义为

$$r_{XY}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{D(X)D(Y)}$$

若 $r_{XY}=0$,称随机变量 $X$、$Y$ 不相关。容易证明,当随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立时,$r_{XY}=0$,即它们不相关。当随机变量 $X$ 和 $Y$ 服从高斯分布时,不相关性等价于独立性。

**4. 各阶矩**

随机变量 $X$ 的 $k$(原点)阶矩

$$E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)\mathrm{d}x$$

随机变量 $X$ 的 $k$(中心)阶矩

$$E[X-E(X)]^k=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^k f(x)\mathrm{d}x$$

**5. 条件数学期望**

设随机变量 $X$、$Y$ 的联合分布密度函数为 $f(x,y)$,则给定 $X$,$Y$ 的条件期望定义为

$$E(Y|X)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y|x)\mathrm{d}y$$

条件数学期望的性质如下:

(1)$E(X)=E[E(X|Y)]$;

(2)$E[g(Y)X|Y]=g(Y)E(X|Y)$;

(3)$E[g(Y)X]=E[g(Y)E(X|Y)]$;

(4)$E[g(Y)|Y]=g(Y)$;

(5)$E[X-E(X|Y)]^2\leqslant E[X-g(Y)]^2$;

(6)(期望的线性性质)设随机变量 $X$、$Y$、$Z$,则

$$E(aX+bY|Z)=aE(X|Z)+bE(Y|Z)$$

**[证明]**

性质(1):$E[E(X|Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y)f(y)\mathrm{d}y=$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x|y)\mathrm{d}x\right)f(y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

性质(5)：当 $g(y) = E(X \mid Y = y)$ 时，$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(y))^2 f(x \mid y)\,\mathrm{d}x$ 达到最小值。

对于任意固定的 $y$，有

$$E[X - g(y)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(y))^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(y))^2 f(x \mid y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

现在证明当 $g(y) = E(X|Y=y)$ 时，$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(y))^2 f(x \mid y)\,\mathrm{d}x$ 取得最小值。

对于任意固定的 $x$，定义 $f(x) = E([X-x]^2)$，则

$$f(x) = E([X-x]^2) = E(X^2) - 2xE(X) + x^2$$

所以，

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -2E(X) + 2x$$

$x = E\{X\}$ 是 $f(x)$ 的一个极点，又 $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 2 > 0$，所以 $x = E(X)$ 是 $f(x)$ 的一个极小点。

因此，当 $g(y) = E(X|Y=y)$ 时，$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(y))^2 f(x \mid y)\,\mathrm{d}x$ 取最小值。

## 要点难点总结

1. 理解随机变量的分布函数、密度函数是将随机(不确定性)变量转化为确定性变量的分析手段。

2. 随机变量的函数变换对应 Jacobi 行列式的绝对值是为了积分的“保向”。

3. 随机变量的数字特征是一个“很工程”的概念。随机信号分析的核心是其数字特征。

4. 条件分布和条件数字特征是“通信原理”课程中常用到的关于随机信号分析的概念。

5. 正态高斯分布是一个具有许多优良特性且最常用的分布。