高等学校适用教材

线性代数基础

XIANXING DAISHU JICHU

王敬修　主编

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

高等学校适用教材

线性代数基础

王敬修　主编

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数基础/王敬修主编. —北京:中国计量出版社,2009.8

ISBN 978-7-5026-2991-5

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 036246 号

内 容 提 要

本书是依据工科院校的《线性代数课程教学基本要求》编写的。遵循“以应用为目的,以必需够用为度”的原则。在内容编写上,力求做到科学性与通俗性结合,由浅入深、逐步提高。向读者介绍线性代数基础的知识。全书分为行列式、矩阵、线性方程组求解、矩阵的特征值、实二次型,共五大部分。

本书可作为高等独立学院教材使用,也可供其他读者学习使用。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码 100013
电话 (010)64275360
http://www.zgjl.com.cn
三河市东方印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*
850 mm×1168 mm 32 开本 印张 5 字数 130 千字
2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
*
定价:12.00 元

编　委　会

主　编： 王敬修

编　委： 牛玉玲　薛　威　张　欣
何　云　陈凡红　丁茂震

前　言

进入21世纪以后，我国高等教育事业迅速发展。课程的教学理念和教学内容都要适应教育改变的新形势。本书是根据国家教委颁布的《线性代数课程教学基本要求》编写的。本教材编写过程遵循“以应用为目的”、“以必需够用为度”的原则。

众所周知，线性代数这一数学工具在运筹、物流、复杂电路的计算，以及在自动控制论等学科有着广泛的应用。

我们在课程的基本要求的思想指导下，在内容编写上，力求做到科学性与通俗性结合，由浅入深、逐步提高，向读者介绍线性代数最基础的知识。对一些比较困难的概念，尽量多举例子；对一些复杂的定理，只介绍其结论，要求弄清含义，只需记住结论就可以了。

全书内容共分五章，第一章的内容以行列式为中心，介绍了行列式的概念、性质与计算以及用克莱姆法则求解线性方程组的方法。第二章介绍了矩阵这一十分有用的工具，讨论了矩阵的运算及初等变换。第三章以矩阵为工具，进一步讨论了线性方程组的求解与解的结构。第四章简要地介绍了矩阵特征值理论。第五章简要地介绍实二次型的理论。读者学完这些内容，将为以后进一步的学习打下必要的基础。本课程的教学时数建议为42～48学时。

编者希望读者树立起坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，最大限度地发挥自己的潜能，得取好的效果。

书中不妥之处，望广大读者赐教。

编　者

2008年7月

目　　录

预备知识

一、和号 $\sum$

我们引进求和号"$\sum$"(读作"西格玛",为了书写与运算的简便,用它表示若干个数的和,即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

式中,$\sum$ 表示求和,$i=1$ 表示 a_i 脚标 i 从 1 开始,n 表示到 a_n 为止。一般都将开始脚标写在 $\sum$ 的下方,而终止脚标写在 $\sum$ 的上方。如

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

求和号的简单的性质:

性质 1 $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

性质 2 $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c(\sum_{i=1}^{n} a_i)$ c 是常数

性质 3 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ $(1 \leqslant k < n)$

对同一个和式,有时因为运算的需要,可以采用不同的表示方式,主要有以下两种变化。

第一种:用 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 与 $\sum_{j=1}^{n} a_j$ 都表示和式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。因此 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$。由此看来,虽然脚标符号不同,实质上都表示从 a_1 一直加到 a_n。

第二种：$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 看上去似乎不一样，只要仔细算一下，发现 $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$ 中，$i=0$ 时 $a_{i+1}=a_1$，当 $i=n-1$ 时 $a_{i+1}=a_n$。由此可知，$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 。

总之，上式相等关键是要看被求和的项究竟是什么，从而认定其异同。

二、充分必要条件

“充分必要条件”是数学命题中常用术语。所谓“充分必要条件”实际上由两部分组成：一是**“充分条件”**，即这个条件如满足就足以保证命题的正确性，但它是必不可少的；二是**“必要条件”**，即这个条件虽然不一定能保证命题的正确性，但它是必不可少的。换言之如果缺少这个条件，命题就肯定不成立。下面举例说明：

例 1　**命题：一个三角形是等腰三角形的充分必要条件是它的两个底角相等。**

这个命题有两层意思，一是如果一个三角形的两底角相等，则它一定是等腰三角形。也就是说两底角相等是三角形为等腰三角形的充分条件。第二层意思是说若一个三角形是等腰三角形，则它的两底角必相等，即两底角相等是三角形为等腰三角形的必要条件。充分必要条件常简称为**充要条件**。

要证明一个条件是充分而且必要的，必须从两方面进行论证。一方面必须证明条件是充分的，即若这个条件成立，则结论必正确。另一方面必须证明条件是必要的，即证明若结论为真，则条件必成立。或者证明若条件不成立，结论必不成立。在许多场合，一个条件不一定是结论的充分必要条件，可能只是充分条件，也可能只是必要条件。

例 2　**命题：一个四边形是正方形的必要条件是四边相等。**

在命题中，四边相等是一个四边形成为正方形所必不可少的，因而是必要条件，但是四边相等的四边形并不一定是正方形，

它可能是菱形。因此四边相等并不是四边形成为正方形的充分条件。

例 3　一个四边形为平行四边形的充分条件是它的四个角相等。

在命题中，四个角相等保证了一个四边形一定是平行四边形，因而是充分条件。但是平行四边形的四个角不一定相等，或者说，四个角不相等的四边形也有可能是平行四边行（只需要两对对角相等就可以了），因此这个条件即四个角相等并不是必要条件。

充分必要条件还有另一种说法，即**“当且仅当”**。比如例 1 命题可说为：一个三角形为等腰三角形当且仅当它的两底角相等。这里“当”的意思即是条件的充分性，就是说当这个条件满足时，结论必成立；“仅当”的意思是条件的必要性，即如果条件不满足，结论必不成立。换言之，结论“仅仅”在这个条件下成立。

三、数学归纳法

数学归纳法是用来论证数学命题的一种常用的方法。

用数学归纳法来论证数学命题，一般分两步来做。

第一步：证明命题对 $n=1$ 正确，这一步叫归纳基础。

第二步：假设命题对 $n=k$ 正确（不必证明），从这个假设（又称归纳假设）出发，证明命题对 $n=k+1$ 也正确，这时便完成命题的证明。

例 1　用数学归纳法证明公式对一切 n 均成立。

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

证：当 $n=1$ 时，左边等于 1、右边 $=\frac{1}{2}1\cdot(1+1)=1$，因此公式成立。

现假设 $n=k$ 时公式成立，$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

当 $n=k+1$ 时，

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=(1+2+\cdots+k)+(k+1)$$

由假设 $1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$，因此

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]$$

即当 $n=k+1$ 时，公式也成立，因而命题得证。

四、反证法

反证法是一种论证数学命题的常用方法。在论证数学命题时从命题的条件直接推出结论有困难，或比较繁，就往往采用反证法。所谓反证法就是假设结论不真，然后一步一步引出矛盾的根源是因为否定了结论，也就是说结论应该是对的。

五、命题的四种形式

令“如果 A，则 B”为原命题，对这种命题形式可以作如下另外三个重要的变形：

原命题：**如果 A，则 B**。逆命题：**如果 B，则 A**。

否命题：**如果非 A，则非 B**。

逆否命题：**如果非 B，则非 A**。

可以用反证法证明：原命题和逆否命题是等值的；逆命题和否命题是等值的。

六、向量、向量组线性组合

（一）向量

在中学里学过向量，那时候的向量概念是一个几何概念，即所谓向量是平面上的一根有向线段，其中一端称为它的起点，另一端称为终点。如图 1 所示，若将 o 与 c 连接起来。并用箭头

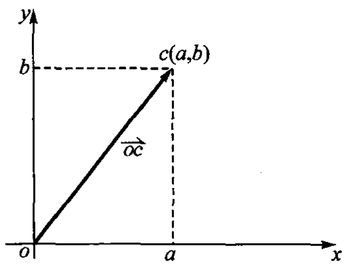


图 1

表示这根线段的方向，则$\overrightarrow{oc}$就是一个向量，它的起点是原点 o，终点是 c。

引进直角坐标系之后，由于平面上的点与一对实数之间存在着一一对应的关系，这样我们完全可以用一对实数代替平面上从原点出发的向量。或者，更直接地，把有序实数偶(a,b)就定义为平面上的向量。

这种把向量“代数化”的方法有着明显的好处：一是可以运用代数的工具来研究几何对象，二是它可以推广到更一般的情形——即所谓 n 维向量。

定义 1　n 个有序数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 n 维向量。数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 叫作向量 $\vec{\alpha}$ 的分量（有时称 a_i 为 $\vec{\alpha}$ 的第 i 个分量或第 i 个坐标）。

向量相等：如果两个 n 维向量 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的对应分量全相等。即 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称向量$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$相等。

向量的加法及数乘运算统称为向量的**线性运算**。

向量的线性运算满足下列运算规律：设 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$是 n 维向量，k,l 是数。

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ （交换律）

(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ （结合律）

(3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ （零向量的作用）

(4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$ （负向量的作用）

(5) $1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$

(6) $k(l\vec{\alpha})=(kl)\vec{\alpha}$

(7) $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$ （分配律）

(8) $(k+l)\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}+l\vec{\alpha}$ （分配律）

例 1　设向量 $\vec{\alpha}=(4,7,-3,2)$；　$\vec{\beta}=(11,-12,8,58)$

求满足 $5\vec{\gamma}-2\vec{\alpha}=2(\vec{\beta}-5\vec{\gamma})$ 的向量 $\vec{\gamma}$

解
$$15\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$$

所以 $\vec{\gamma}=\dfrac{2}{15}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\dfrac{2}{15}(15,-5,5,60)=(2,-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},8)$

（二）向量的线性组合

定义 2 设 V 是由一些 n 维向量组成的向量集合，如果 V 关于向量的线性运算满足：

(1) 对于 V 中任意两个向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 和向量 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ 也是 V 中的向量（向量的加法运算封闭性）；

(2) 对 V 中任意向量 $\vec{\alpha}$ 及任意常数 k，数量乘积 $k\vec{\alpha}$ 也是 V 中的向量（向量数乘运算封闭性）。

则称 V 是一个向量空间。

例 2 对于方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\2x_1+3x_2+4x_3=4\\-x_2+2x_3=2\end{cases}$$

它的 3 个方程分别对应方程组增广矩阵的 3 个行向量。

$\vec{\alpha}_1=(1,2,1,1),\vec{\alpha}_2=(2,3,4,4),\vec{\alpha}_3=(0,-1,2,2)$

可以看出
$$\vec{\alpha}_3=-2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$$

这表明，$\vec{\alpha}_3$ 可由 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 经过线性运算而得到，说明第 3 个方程是多余的。

例 3 证明向量 $\vec{\beta}=(-1,1,5)$ 是向量 $\vec{\alpha}_1=(1,2,3),\vec{\alpha}_2=(1,0,4),\vec{\alpha}_3=(2,3,6)$ 的线性组合表示的一个线性方程组。

证：假定 $\vec{\beta}=x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+x_3\vec{\alpha}_3$

其中 x_1,x_2,x_3 为数，则

$$(-1,1,5)=x_1(1,2,3)+x_2(0,1,4)+x_3(2,3,6)$$

$$(-1,1,5)=(x_1+2x_3,2x_1+x_2+3x_3,3x_1+4x_2+6x_3)$$

由于两个向量相等的充要条件是它们的分量分别相等，得

$$\begin{cases} x_1+2x_3=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ 3x_1+4x_2+6x_3=5 \end{cases}$$

解出 $x_1=1, x_2=2, x_3=-1$

于是 $\vec{\beta}$ 可以表示为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 的线性组合。即

$$\vec{\beta}=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3$$

由此可知，线性表示的问题可以归结为求解一个线性方程组问题，反过来，判断一个线性方程组是否有解的问题也可归结为向量的线性组合问题。

（三）向量的内积、距离与夹角

1. 向量的内积

定义 3 设 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是 n 维线性空间中的向量。定义 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的内积

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

即 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的内积是一个实数，等于 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 相应的坐标分量乘积之和。内积有时亦称“点积”或“数量积”。内积记号写作$(\vec{\alpha},\vec{\beta})$或 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$。

内积有以下性质：

（ⅰ）$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

（ⅱ）$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

（ⅲ）$k(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=(k\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(k\vec{\beta})$ （k 为任意实数）

（ⅳ）$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\geqslant 0$，且 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=0$ 成立的充要条件是 $\vec{\alpha}=\vec{0}$

例 求三维空间中向量 $\vec{\alpha}=(1,3,5)$，$\vec{\beta}=(2,4,6)$的 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

解 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2+12+30=44$

有了内积的概念就可以很容易地定义向量的长度，两向量的夹角以及距离等概念了。

2. 向量的距离与夹角

定义 4　设 $\vec{\alpha}$ 是实 n 维线性空间中的向量，且 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则 $\vec{\alpha}$ 的长度（记作 $\|\vec{\alpha}\|$）定义为

$$\|\vec{\alpha}\|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

例 1　求三维实空间向量 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$ 的长度

解　$\|\vec{\alpha}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

例 2　设 $\vec{\alpha}$ 是 n 维实空间的一个非零向量，则向量 $\dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}$ 的长度等于 1。

证：$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 则 $\|\vec{\alpha}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

因此 $\left\|\dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}\right\|=\left\|\dfrac{a_1}{\|\vec{\alpha}\|},\dfrac{a_2}{\|\vec{\alpha}\|},\cdots,\dfrac{a_n}{\|\vec{\alpha}\|}\right\|=\dfrac{1}{\|\vec{\alpha}\|}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}=1$ 称单位向量。

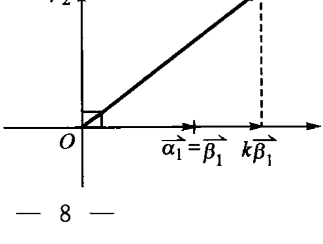
定义 5　设 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 是线性空间中的两个非零向量。则定义 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 之间夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\ \|\vec{\beta}\|}$$

七、施密特（Schmidt）正交化方法

线性无关向量组未必是正交向量组，但正交向量组又是重要的向量组，为此对于一个线性无关向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$，能否从它得到一个正交单位向量组 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_m$，且使对于 $r=1,2,\cdots,m$ 均有

$$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r\}\cong\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_r\}$$



等价。

为了能比较直观地说明这种方法，我们以几何空间中 3 个线性无关向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 为例，来找一个满足上述条件的正交向量组 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$。

第一步：找 $\vec{\beta}_1$，因为要满足 $\vec{\alpha}_1$ 与 $\vec{\beta}_1$ 等价的条件。故取

$$\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1$$

第二步：找 $\vec{\beta}_2$，因 $\vec{\alpha}_2$ 与 $\vec{\alpha}_1=\vec{\beta}_1$ 不共线，要找与 $\vec{\beta}_1$ 正交的向量 $\vec{\beta}_2$，又要满足 $\vec{\alpha}_2$ 可由 $\vec{\beta}_1$ 与 $\vec{\beta}_2$ 线性表出的条件，根据向量相加法则

$$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-k\vec{\beta}_1$$

由于 $\vec{\beta}_1\perp\vec{\beta}_2$，故 $\vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_2=0$，得

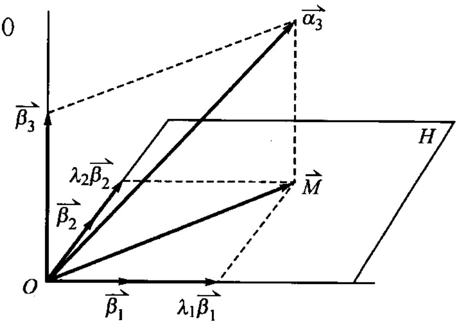
$$(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\beta}_1)-k(\vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_1)=0$$

从而得

$$k=\frac{(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\beta}_1)}{\|\vec{\beta}_1\|}$$

故

$$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-\frac{\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\beta}_1}{\|\vec{\beta}_1\|}\vec{\beta}_1$$



第三步：找 $\vec{\beta}_3$，要求

$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$ 不共面，找到 $\vec{\beta}_3$ 必须与 $\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$ 都正交，因此要在 H 平面垂直的方向上找 $\vec{\beta}_3$，由向量加法可知

$$\vec{\alpha}_3=\overrightarrow{OM}+\vec{\beta}_3=\lambda_1\vec{\beta}_1+\lambda_2\vec{\beta}_2+\vec{\beta}_3 \qquad (\lambda_1,\lambda_2\text{ 待定常数})$$

利用正交条件 $\vec{\beta}_3\cdot\vec{\beta}_1=0$

得

$$(\vec{\alpha}_3\cdot\vec{\beta}_1)-\lambda_1(\vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_1)=0$$

于是有

$$\lambda_1=\frac{(\vec{\alpha}_3\cdot\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_1)}$$

同理，由 $(\vec{\beta}_3\cdot\vec{\beta}_2)=0$ 可得 $\lambda_2=\dfrac{(\vec{\alpha}_3\cdot\vec{\beta}_2)}{\vec{\beta}_2\cdot\vec{\beta}_2}$