TIANJIAOZHILU

——天骄之路中学系列

2005高考命题趋向及解读

数学

主　编　陈俊鸣（特级教师）

审　定　全国高考命题研究组

机械工业出版社
China Machine Press

天骄之路中学系列

高考命题趋向及解读

数　　学

陈俊鸣(特级教师)　主编

全国高考命题研究组　审定

机械工业出版社

为正确引导广大师生进行2005年高考总复习，我们组织了全国知名特、高级教师和大学教授编写了本书，编者长期从事命题、阅卷工作，并多年工作在高考指导第一线，具有丰富的教学及应试经验，在高考引考信息上有敏锐的反应能力和独特的表述能力，其中不少是本省(市)学科带头人。本书严格按照国家教育部考试中心最新颁布的各科《考试大纲》编写，不脱离教材，又高于教材，并融合了2005年高考最新动态，内容丰富，覆盖面广，对学生备考有很大帮助。

图书在版编目(CIP)数据

高考命题趋向及解读．数学/陈俊鸣主编．—4版．—北京:机械工业出版社，2004.9
(天骄之路中学系列)
ISBN 7-111-09254-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第069079号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
责任编辑:王春雨　版式设计:沈玉莲
封面设计:李文广　责任印制:何全君
北京忠信诚胶印厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004年9月第4版·第1次印刷
880mm×1230mm 1/16·18印张·743千字
定价:19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话　(010)82608899、68326294
封面无防伪标均为盗版

编写说明

本书是2005届高考考生所用新教材、新考纲的配套复习用书。

长期以来，我们感到：在总复习阶段，考生迫切需要有一套既能夯实基础、以不变应万变，又能在基础上有所拔高、掌握解题技巧及提高应试能力，同时还能与高考新形势、新变化、新理论保持同步的参考书籍。为此，在教育部考试中心的具体指导下，我们组织全国知名重点中学的著名特级教师共同编写了本书。本书具有以下特点：

1. 本书立足于最新颁布使用的《考试大纲》的新精神，融合2005年高考命题的新特点，在总结和吸取众多高考复习指导书的成功经验基础上编写而成。

2. 本书紧紧抓住高考各科能力要点和知识点，做到突出重点、解决难点，帮助考生了解、掌握科学合理的知识网络，既便于贮存，又便于提取应用；同时还提出了科学、有效的目标复习建议，很具参考价值。

3. 本书在深入分析近年来（1997～2004）高考命题特征的基础上，总结出命题的趋势和规律，并能结合大量典型的、新颖的例析，拓宽解题思路，总结解题技巧和方法，使考生真正做到融会贯通、举一反三。

4. 本书针对考生在高考中经常出现的典型错误给予具体指导，帮助考生在查缺补漏的同时，巩固已有的知识，避免许多考生在总复习时走弯路和回头路。

5. 本书不搞"题海战术"，不以繁杂的习题充斥内容，而全部是编者群体智慧、心得体会的汇总，这些智慧来源有四：一是编者长期的教学实践；二是全国各大名报名刊的优秀作品；三是各地教学研讨会、经验交流会的一流成果；四是专家对高考命题不断深入研究的结晶。

本书博采众长，匠心独运，有的放矢，注重实效，数学科单元结构设计成以下几个板块：

〔命题趋向阐释〕 详析近年来（包括2004年）高考命题的热点，总结常考内容，搜索命题奥秘，探求命题规律，预测命题趋向。

〔目标复习建议〕 通过对命题趋向、考点精要、重点难点的探寻，为考生提供合理的复习备考方法，从而事半功倍，胸有成竹。

〔知识网络表解〕 对本单元应掌握的基础及重要知识点通过图表、网络的形式进行系统整理。

〔考点精要扫描〕 抓住历年来高考经常涉及的知识要点、重点、难点、考点，概括和阐述力求精练、解释清晰、视角广阔。

〔注意问题总结〕 对本单元的一些重要问题单列出来进行精辟讲解并给予解题提示，锻炼读者举一反三的能力。

〔规律方法指津〕 对本单元涉及的解题规律及方法加以阐释，有利于提高读者在应试过程中的应变能力。

〔典型例题分析〕 注重启发性和培养兴趣的原则，讲究"题眼"布局，有助于形成正确的解题思路，把握解题技巧。

〔误点名师批答〕 将本单元学习、应试中容易犯错的题型进行归纳、总结，由名师予以批注，使读者能融会贯通，错误不再重现。

〔联系实际引路〕 近年来，高考各科中的实际应用题不断增多，本栏目将理论贴近生活、应用生活，时代气息较浓。

〔高考名题选萃〕 将涉及本单元的近年的高考题进行总结、例析，使读者在总复习时便能掌握高考命题的方式、技巧及热点。

〔模拟考题集萃〕 将涉及本单元知识点的各地著名模拟试题进行总结，培养考生的高考意识和应试能力。

〔知能强化训练〕 精心设计题型，不搞题海战术，务求实效性、典型性和启发性，意在培养学生的学科思想与悟性。

〔创新思维应用〕 荟萃本单元新的解题思路、方法、新信息、新观念、新模型，着力培养学生在解题中的创新能力。

另外，对**〔模拟考题集萃〕**、**〔知能强化训练〕**、**〔创新思维应用〕**中难度较大、较为新颖的选择题、解答题，本书均给出了详尽答案，且都附有解题提示或分析，大大提高了资料的利用率及效果。

总之，本书既注重基础知识的强化、把关，又重视应试能力的培养、提高；既注意到知识的系统性、条理性，又有重点、难点的把握和突破；既有基本方法的总结、强化，又有综合解题技巧的训练、提高。因而它含金量高，考生在总复习时采用本书必定在有限时间内获得最佳的复习效果。

需要说明的是，为照顾广大考生的实际购买能力，使他们在相同价位、相同篇幅内能汲取到比其他书籍更多的营养，本书采用了小五号字和紧缩式排版，如有阅读上的不便，请谅解。

虽然我们在编写过程中，本着对考生认真负责的态度、章章推敲、节节细审、点点把关，力求能够帮助考生提高应试能力及解题技巧、方法，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，恳请广大读者和有关专家不吝指正。读者对本书如有意见、建议和要求，请来信寄至：

(100080)北京市海淀区苏州街18号长远天地大厦B座15层　天骄之路丛书编委会收，电话：(010)82608811，82608822，或点击"天骄网"(http://www.tjzl.com)，在留言板上留言，也可发电子邮件。相信您一定会得到满意的答复。

本书在编写过程中，得到了各参编学校及国家优秀出版社机械工业出版社有关领导的大力支持，丛书的统稿及审校工作得到了北京大学、清华大学有关专家教授的协助和热情支持，在此一并谨致谢忱。

编　者

2004年9月于北京大学燕园

目　录

第一部分

高考命题趋向及复习对策

命题趋向阐释

普通高等学校招生全国统一考试是由合格的高中毕业生参加的选拔性考试，数学科考试，要发挥数学作为基础学科的作用，既重视考查中学数学知识的掌握程度，又注重考查进入高校继续学习的潜能.

按照"考查基础知识的同时，注重考查能力"的原则，测试中学数学基础知识、基本技能、基本思想和方法，考查思维能力、运算能力、空间想象能力、解决实际问题的能力.

一、2004年高考透视

2004年高考的各套数学试卷，以它的知识性、灵活性和创新性，描绘出了一个五彩缤纷、绚丽多姿的数学世界，充分展示了数学的美感，试题以考查能力和素质为主，遵循大纲，又不拘泥于大纲，重点突出，锐意进取，平稳过渡，稳中创新，从数学知识、思想方法、学科能力出发，着重考查高中数学中最重要的函数、数列、不等式、解析几何中的直线与圆锥曲线的关系、立体几何中点、线、面的关系等，多层次、多角度、多视点地考查了学生的数学素养和学习潜能。

综观2004年高考的各套数学试卷，给人的第一印象是"平和"，许多试卷看上去似乎都很平稳，试题也没有出现明显的偏题、怪题，但实际上"平中见奇"，平和之中能看出命题者探求新意的苦心.

与2003年相比，试题的题量、题型结构、分值配置与去年一致，试卷难题的数量有一定程度的减少，试卷的难度明显降低，大多数考生感到容易入手，有利于减缓考试的心理压力，考出自己的真实水平.随着教育改革的不断深入，以及高校扩招的形势，降低高考试卷的难度是大势所趋，今年数学试卷的命题形式，是值得肯定的.

1. 新热点初步形成

向量、概率与统计、导数是新教材中的新增内容，它们体现了现代数学思想，是衔接初、高等数学的桥梁，2004年全国高考试卷(河北卷)在这方面有明显的倾向性，直接考查向量、概率、概率与统计、导数这几部分内容就占34分，再加上与圆锥曲线编织的向量综合题17分；浙江试卷在理科试卷中对新增内容共考查了43分，约占试卷分值的30%.这些新增内容已成为高中数学的重点内容与主干知识，也是今后高考考查的热点.

2. 函数、数列、直线与圆锥曲线的位置关系仍处于重中之重的地位

函数作为高中代数最基本、最重要的内容，2004年河北试卷第(2)、(4)、(9)、(17)、(19)题，从不同侧面进行了考查，卷面分数为39分，所占卷面总分的比值都较大幅度地超过教学大纲中规定的相应课时比值.

2004年理工类数列考题总体上还是递推数列问题，但与前些年一些递推数列 $a_{n+1}=ca_n+d$ 型的通项公式热点有所不同的是，河北卷第(15)题是 $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$ 型递推数列通项公式问题，压轴题则是 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型通项公式问题.

圆锥曲线是支撑数学知识体系的主要内容之一，在高考考查中保持着较高的比例、并达到必要的深度，使得它构成数学高考试题的主题，是多年来常考不衰的热点内容.2004年全国高考试题在这方面体现得更明显.如河北卷(7)、(8)、(21)三道考题从不同的角度考查椭圆、抛物线、双曲线与直线的各种位置关系.有关直线与圆锥曲线的位置关系问题，常涉及圆锥曲线的性质和直线的基本知识以及线段的中点、弦长等，解题时需要根据具体问题，灵活运用圆锥曲线与其他数学知识的联系.

这就告诉我们，对重点知识的考查，去年考过的内容今年再考仍很普遍，以前考过的知识重考也很正常，但考查的题型与方式不断更新.因此，对支撑数学科知识体系的主干知识的考查，始终占据题型多、题量大、分数重、久考不衰的突出位置.

(1)试题在稳定中创新

高考数学试题一直比较注重在稳定的同时不断进行创新，每年都会出现一批让人耳目一新的题目.今年的高考数学试卷继续保持2003年的命题风格，但在稳定中创新，出题思路灵活多变，匠心独运.

命题者利用考生熟悉的、常见的问题作背景，重新设计考查数学思想方法、数学思维品质的试题，跳出平时的模拟试卷或复习资料上的题目，给考生提供一个平等答题的机会.

【例1】 (2004·浙江)设坐标平面内有一个质点从原点出发，沿 x 轴跳动，每次向正方向或负方向跳1个单位，经过5次跳动质点落在点(3,0)(允许重复过此点)处，则质点不同的运动方法共有________种(用数字作答).

答案 5

说明 命题考把质点跳动问题巧妙地构成一个排列、组合试题，考生看到该题既感到熟悉，又感到新颖.从题目的内容看，考生几乎都不陌生，但在这样的情况下，运用所学数学知识来解决，考生又感到新颖别致.

【例2】 (2004·上海)若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a、b 的取值范围是______.

精析 由函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，故其一次项

系数 $a>0$,且保证 $|x-b|$ 在 $[0,+\infty)$ 上也为增函数,故 $b\leqslant x$,又 $x\geqslant 0$, $\therefore b\leqslant 0$

答案　$a>0$ 且 $b\leqslant 0$

说明　该题是一个一次函数的单调性判断问题,但命题者没有直接以一次函数的形式给出,而辅助以绝对值的形式重新设计试题,跳出平时模拟试卷或复习资料上的题目,给考生提供一个平等答题的机会.

【例3】　(2004·重庆)毛泽东在《送瘟神》中写到:"坐地日行八万里",又知地球的体积大约是火星的8倍,则火星的大圆周长约________万里.

精析　由地球的体积大约是火星的8倍,可知地球的半径约为火星的2倍,又由"坐地日行八万里",则火星的大圆周长约为4万里.

答案　4

说明　该题求球(火星)的大圆周长,但已知条件却是:"坐地日行八万里",即地球的大圆周长约是八万里.用伟人的诗句作已知条件,有新意!

(2)试题在平实中见奇

优秀的数学试题不仅具有良好的测试功能,而且其解法灵活多样、富有启发性.命题者不会仅仅满足于使用常规的途径解题,还会不断尝试新的途径.今年的高考数学看似平常,但平常中并不"平常",试题在平实中见奇.

【例4】　(2004·浙江)已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$,则不等式 $x+(x+2)\cdot f(x+2)\leqslant 5$ 的解集是________.

精析　分两种情况讨论

(1)当 $x\geqslant 0$ 时,不等式变形为

$x+(x+2)\times 1\leqslant 5$

解得 $x\leqslant \frac{3}{2}$

即 $0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}$

(2)当 $x<0$ 时,不等式变形为

$x+(x+2)\times(-1)\leqslant 5$

$-2\leqslant 5$

即不等式对 $x<0$ 时恒成立

综合(1)(2)可知原不等式解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

答案　$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$

说明　该题以分段函数为已知条件,求不等式的解,将不等式与分段函数联系在一起,解题时利用分段函数将不等式 $x+(x+2)\cdot f(x+2)\leqslant 5$ 等价转化为由两个不等式组成的不等式组.

【例5】　(2004·辽宁)设椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$,过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A、B,O 是坐标原点,点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,点 N 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.当 l 绕点 M 旋转时,求:

(1)动点 P 的轨迹方程;

(2)$|\overrightarrow{NP}|$ 的最小值与最大值.

精析与解答　本小题主要考查平面向量的概念、直线方程的求法、椭圆的方程和性质等基础知识,以及轨迹的求法与应用、曲线与方程的关系等解析几何的基本思想和综合解题能力.

(1)解法一:直线 l 过点 $M(0,1)$

设其斜率为 k,则 l 的方程为 $y=kx+1$

记 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

由题设可得点 A、B 的坐标 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 是方程组

$$\begin{cases}y=kx+1 & ①\\ x^2+\frac{y^2}{4}=1 & ②\end{cases}$$ 的解.

将①代入②并化简得

$(4+k^2)x^2+2kx-3=0$,所以

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2k}{4+k^2}\\ y_1+y_2=\frac{8}{4+k^2}\end{cases}$$

于是 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$=\left(\frac{-k}{4+k^2},\frac{4}{4+k^2}\right)$

设点 P 的坐标为 (x,y)

则 $\begin{cases}x=\frac{-k}{4+k^2}\\ y=\frac{4}{4+k^2}\end{cases}$

消去参数 k 得

$4x^2+y^2-y=0$　③

当 k 不存在时,A、B 中点为坐标原点(0,0),也满足方程③,所以点 P 的轨迹方程为

$4x^2+y^2-y=0$

解法二:设点 P 的坐标为 (x,y)

因 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 在椭圆上

所以 $x_1^2+\frac{y_1^2}{4}=1$　④

$x_2^2+\frac{y_2^2}{4}=1$　⑤

④-⑤得 $x_1^2-x_2^2+\frac{1}{4}(y_1^2-y_2^2)=0$

所以 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+\frac{1}{4}(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$

当 $x_1\neq x_2$ 时,有

$x_1+x_2+\frac{1}{4}(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$　⑥

并且 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\\ \frac{y-1}{x}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\end{cases}$　⑦

将⑦代入⑥并整理得

$4x^2+y^2-y=0$　⑧

当 $x_1=x_2$ 时,点 A、B 的坐标为 $(0,2)$、$(0,-2)$,这时点 P 的坐标为 $(0,0)$ 也满足⑧,所以点 P 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$$

(2)由点 P 的轨迹方程知 $x^2\leqslant\frac{1}{16}$

即 $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}$

所以

$$|\overrightarrow{NP}|^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-4x^2$$
$$=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{7}{12}$$

故当 $x=\frac{1}{4}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{1}{4}$

当 $x=-\frac{1}{6}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最大值，最大值为 $\frac{\sqrt{21}}{6}$.

【例 6】 (2004·天津)已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 在 $x=\pm1$ 处取得极值．

(1)讨论 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值；

(2)过点 $A(0,16)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求此切线方程．

精析与解答 本小题考查函数和函数极值的概念，考查运用导数研究函数性质和求曲线切线的方法，以及分析和解决问题的能力．

(1)$f'(x)=3ax^2+2bx-3$

依题意，$f'(1)=f'(-1)=0$，即

$$\begin{cases}3a+2b-3=0\\3a-2b-3=0\end{cases}$$

解得 $a=1,b=0$

$\therefore f(x)=x^3-3x,f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1,x_2=1$

若 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，则 $f'(x)>0$，故

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是增函数

$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数

若 $x\in(-1,1)$，则 $f'(x)<0$，故

$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数

所以，$f(-1)=2$ 是极大值；$f(1)=-2$ 是极小值

(2)曲线方程为 $y=x^3-3x$，点 $A(0,16)$ 不在曲线上

设切点为 $M(x_0,y_0)$，则点 M 的坐标满足

$y_0=x_0^3-3x_0$

因 $f'(x_0)=3(x_0^2-1)$，故切线的方程为

$y-y_0=3(x_0^2-1)(x-x_0)$

注意到点 $A(0,16)$ 在切线上，有

$16-(x_0^3-3x_0)=3(x_0^2-1)(0-x_0)$

化简得 $x_0^3=-8$，解得 $x_0=-2$

所以，切点为 $M(-2,-2)$，切线方程为

$9x-y+16=0$

说明 高考数学试题对新教材新增加的向量、线性规划、概率统计、导数等内容都作了考查，而且难度适中，有利于促进高中数学课程改革的实施．

3. 突出数学思想方法的考查

数学思想和数学基本方法蕴含了数学基础知识，表现为数学观念，它们与数学知识的形成同步发展，同时又贯穿于数学知识的学习、理解和应用过程．因此，数学解题的过程，是个体的思维能力作用于数学活动的心理过程，考生解题的切入点不同，运用的思想方法不同，就体现出不同的思维水平．2004 年高考试题，注意研究题目信息的配置，考虑从不同角度运用不同的思想方法，创设多条解题路径，使不同思维层次的考生都有得以表现的机会，从而有效地区分出考生不同的数学能力．整套试卷从不同侧面加大了分类讨论思想的考查，河北卷理工类第(11)题、(19)题、(22)题，北京卷第(19)题，浙江卷第(13)题等等，都需要分几种情况讨论．考生只要抓住问题的规律，选用有效的解题方法，就能把问题合理、全面地解决．数学思想和数学方法的合理选择表现考生的思维敏捷性，把多样的数学思想方法，置于"平凡"的数学问题之中，可以瞬间抓住问题本质，简便、快捷地把问题转化，减少错漏且赢得后续的解题时间，展现其较高的数学素养．

看似平常的考题设计，不仅能够考查学生数学知识的积累是否达到进入高校学习的基础水平，而且能够以数学最基本问题为载体，测量出考生将知识迁移到不同情景的能力，从而检测考生潜在的学习能力．

总之，2004 年的高考数学试卷，充分注意到试题的多样性，在选择题、填空题、解答题中设计了许多考查数学主体内容，体现数学素质的题目．稳中创新、平中见奇，思路宽广，灵活多样，让考生自主探究，发挥其主观能动性，研究问题的本质，寻找合适的解题方法，梳理解题程序，为考生展示其创新意识、发挥创造能力创设了广阔的空间．

2004 年的高考数学试卷，再次向中学教育界传递了以下信息：减少重复训练，跳出题海教学，理解数学本质，培养学习兴趣，提高基本能力与素养．

二、2005 年命题趋向

1. 高考数学将着重考查理科生的抽象思维能力，考查文科生的逻辑思维能力和形象思维. 2005 年，文科数学试卷仍将比 2004 年略容易，而理科数学试卷的难度还适当增大，文理科数学试卷的难度差距进一步拉大.

2. 高考试卷中一部分题目是对课本上的题进行了扩展和变形，所以每个学生都应该对课本上的题烂熟于心.

3. 最后的六至七个大题将以三角和复数，解析几何与函数导数向量等知识综合出现. 近年来，解析几何题一般不再作为压轴题出现，而最后一道难度最大的压轴题可能是数列和不等式或者数列、函数和不等式综合考查的题目. 导数与向量部分已成为出题重点，新情境与以往的应用题相结合作为一道大题出现，而探索性问题也将融入大题中.

4. 纯记忆性和知识考查减少，更注重思维能力的考查. 此外，应用题将注重考查考生解决问题的能力. 因此考生应适当关注当前的国家大事，经济发展状况及一些新技术，应用题的题目可能以这些内容为背景.

5. 以知识网络的交汇点设计的高考解答题，运用知识之间的交叉、渗透和组合，是基础性与综合性的最佳表现形式．所以，复习时应注意知识的综合运用．

【例 7】 (2004·福建)已知 $f(x)=4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3(x\in\mathbf{R}^*)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数．

(1)求实数 a 的值组成的集合 A；

(2)设关于 x 的方程 $f(x)=2x+\frac{1}{3}x^3$ 的两个非零实根为 x_1、x_2. 试问：是否存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant$

$|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由．

精析与解答　$f'(x)=4+2ax-2x^2$

$\because f(x)$在$[-1,1]$上是增函数

$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$恒成立

即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$恒成立　①

设 $\varphi(x)=x^2-ax-2$

解法一：①$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$

$\because$ 对 $x\in[-1,1]$，只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$

$\therefore A=\{a|-1\leqslant a\leqslant 1\}$

解法二：①$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{2}\geqslant 0\\ \varphi(-1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}$

或$\begin{cases}\dfrac{a}{2}\leqslant 0\\ \varphi(1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a\leqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$

$\because$ 对 $x\in[-1,1]$，只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$

$\therefore A=\{a|-1\leqslant a\leqslant 1\}$

(2)由 $4x+ax^2-\dfrac{2}{3}x^3=2x+\dfrac{1}{3}x^3$

得 $x=0$ 或 $x^2-ax-2=0$，$\because\Delta=a^2+8>0$

$\therefore x_1$、x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两非零实根

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=a\\ x_1x_2=-2\end{cases}$

从而$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$

$\because -1\leqslant a\leqslant 1$

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$，要使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立，当且仅当 $m^2+tm+1\geqslant 3$，对任意 $t\in[-1,1]$恒成立，即 $m^2+tm-2\geqslant 0$ 对任意 $t\in[-1,1]$恒成立　②

设 $g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$

解法一：②$\Leftrightarrow\begin{cases}g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$

所以，存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立，其取值范围是$\{m|m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2\}$

解法二：当 $m=0$ 时，②显然不成立

当 $m\neq 0$ 时，②$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\end{cases}$或

$\begin{cases}m<0\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$

所以，存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立，其取值范围是$\{m|m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2\}$．

说明　本题以函数为背景，在方程与不等式的交汇处设计恒成立问题，整个解题过程需要处理好求导与函数的单调性、函数的连续性、函数的端点值以及函数与方程的关系等问题，还要解决好分类讨论思想与探索开放性结论等数学思想方法等问题．这是典型的立意新、情景新、角度新、形式新的网络综合题，它以函数知识为依托，不等式和恒成立知识为方法，解的集合为目标，在集合、函数、方程、不等式知识交汇点上设计的试题，题型设计新颖，别具一格，知识浑然一体，反映了知识间的内在联系，较好地体现了知识的整体性和综合性，突出对问题的方法及解决问题的能力的考查，体现了新课程、新教材的要求，新内容与传统内容的联系，打破了学生的思维定势，是一个典型的交汇热点试题．

目标复习建议

同学们在老师的指导下，学习 2004 年《考试大纲》和近几年的高考试题，以明晰高考数学的命题趋向（编者已分析），然后进行复习，做到有“的”放矢，究竟该如何复习呢？下面谈几点，供同学们参考．

一、高考数学复习注重基础以退为进

1.数学复习的基本要求

数学复习的内容可分为基础知识和基础解题技能两部分．在复习中，要注意基本概念、基本公式、基本定律和法则的辨析比较及灵活运用，做到理解、综合与创新．

所谓“理解”，就是力求对中学所学的数学基础知识和基本概念从局部到整体，从微观到宏观，从具体到抽象等多角度、多层次、全方位地融会贯通，有意识地培养自己的分析理解能力、综合概括能力和抽象思维能力．对于定义、定理、公式的复习，应做到：弄清来龙去脉，沟通相互关系，掌握推证过程，注意表达形式，归纳记忆方法，明确主要用途．

所谓“综合”，是指将不同单元、不同学科、不同年级所学的数学知识进行去伪存真、去粗取精、由表及里、由浅入深地提炼加工，建立知识之间的纵横联系，使知识系统化、条理化、网络化，便于记忆、储存、提取和应用，例如，复习角的概念，可进行如下归纳：

(1)由共面直线所成的角→异面直线所成的角→直线和平面所成的角→平面与平面所成的角，从而弄清这一要领的形成和发展．

(2)对倾斜角、辐角和极角这些易混淆概念类比区别，从而使角的概念更加清晰和准确．

(3)掌握三角中终边相同的角、水平角、垂直角、象限角、区间角、方位角等的表达形式和特性以及应用规律和方法．

所谓“创新”，是指融会贯通基础知识后，在解题过程中所表现出来的灵活性、独创性、简捷性、批判性和深刻性．创新能力不仅表现在综合运用所学知识去分析问题、解决问题，更重要的是发现新问题，拓宽和深化所学的知识，不断提高自身的应变能力．

2.注重基础知识，以不变应万变

在剩下的时间里，学生要狠抓基础知识的复习，对课本上的例题、习题吃透，以不变应万变，直到高考前一天，虽然高考数学试题不可能考查单纯背诵、记忆的内容，也不会考查课本上的原题，但每回对试卷分析时不难发现，许多题目都能在课本上找到“根源”，不少高考题就是对课本原题的变型、改造及综合．高考是针对大众的考试，绝不会有大量偏、怪题，对课本上的题目熟悉了，对高考题就会有似曾相识的感觉，至少不会惧怕．

在回归课本复习时，考生要对着课本目录回忆和梳理知识，对基本方法和技巧还不能回忆的，要及时补上．不要强记题型、死背结论，应将重点放在掌握例题涵盖的知识及解题方法上．

还有一点值得考生借鉴，就是在复习时应学会以退为进的策略，在实践中，总有不少考生到了最后冲刺期，将基础内容抛在一边，专攻难度大的题，结果是自信心受挫，高考时原本该得的基础分也失掉了，所以建议考生在复习时以退为进，不指望将所有的题攻下，将时间用在巩固基础、对付“跳一跳便可够得到”的题上，这样复习，高考时很有可能超水平发挥．

3．摒弃题海战，针对性做题

就目前而言，大部分学生有点焦躁，而高考数学复习最忌怕、厌，这相当程度上是由于题海战造成的“硬伤”，在以往的教学中，有不少学生认为复习数学就是不断地做题，从而陷入题海战，做多了、麻木了，就伤了学习积极性和热情，高考时原有的水平不可能发挥．因此题海战应摒弃．建议学生在做题时首先应精选题目，注重题目的典型性和针对性，提倡删除繁题、难题、偏题和陈题，倡导精选创新题、应用题、探究题和情景题，突出问题的训练价值，以期提高复习课的效率，收到事半功倍的效果．如2003年考题第一考察的就是学生的阅读能力，2003年的高考试题不但在难度上加大改革，而且注重创新性和实际运用(文科试题尤其明显)．

再则，学生在做题复习时，要明确不是为做题而做题，而是要从题目中抓住解题方法，由一个题带动多道题，如做综合题和基础题，建议考生在复习时，可同多个同学交流意见，这样可取得“$1+1>2$”的效果，开拓解题思路．

4．复习莫脱离课本、老师

在高考的最后冲刺阶段，相当一部分学生会抛开课本，脱离老师复习．如上课时不听老师讲题，而是自己在下面做其他题目，进行“自主复习”，对大部分学生而言，这样将得不偿失．复习不能抛开课本，主要是高考出题还会以课本为参照．

不能脱离老师主要是因为老师有着多年的教学经验，他们抓纲悟本，所选择的题目多是针对性极强的题目，在这样的情况下考生跟着复习，可少走弯路，绝对是有效果的，而盲目地“自主”复习，由于缺乏系统、缺少针对性，很可能忙了一场，还是徒劳．

二、高考数学复习的重点与热点

数学知识点很多，题型千变万化，如何在有限的时间内突出重点，抓住热点，提高综合运用知识的能力，是每一个考生都非常关心的问题．这里就个人体会提出若干意见．

1．疏通考点要重点回顾四个方面

在数学复习中，要合理安排本学科所需要的内容．既不能一味地做难题，又不能只背一些公式、掌握一些技巧．在后段复习中要特别注意做好知识点的疏通与清理．

(1)清理考点．对《考试大纲》提出的数学概念、公式和方法等考点要逐一疏通，特别是自己平时掌握有一些困难的，要有计划地查漏补缺，形成合理的知识结构．回顾的重点要放在其发生的过程上，如无穷递减等比数列各项和的公式，就为一般数学的无穷的问题提供了可借鉴的思维模式，应对其过程进行回顾和反思．

(2)清理“错题”．考前要有计划地推敲“错题集”，即整理近期自己做错的题目，看看现在再做时能否顺利解决，纠正错误，尤其是分清错误类型(如知识缺陷型、解题策略型、不良习惯、心理型等)，增强防范意识．

(3)清理题型．考前一段时间要对各种基本题型进行归纳回顾，领悟其基本思路．可以按高考前四个大题的题型和难度为基准，在立体几何、数列、三角函数与不等式、复数及二次曲线等知识块及其联系上做文章，有针对性地分类突破．如立体几何问题“作垂线”往往是关键；数列解题中的“基本量法”及通项与和式的关系是解题的线索；三角题主要考查基础知识的运用，重点是考查变换的思想；复数问题要注意“虚实互化”和“数形结合”思想的运用等．

(4)清理方法．首先要通过各类题型熟练掌握具体的数学方法，如配方法、换元法、待定系数法、比较法、归纳法、分离参数法及分析法、综合法、反证法；其次要花大力气领悟几种重要的数学思想，如数形结合、分类讨论、化归与转化、函数与方程等，因为高考已由知识测量型转化为能力检测型，并把重点放在数学思想方法的应用上，如分类讨论用于协调、缓和“矛盾”，达到运用知识合理解题的思想，要回顾和领悟的有：为什么要讨论？何时讨论？如何讨论？常见的讨论类型有哪些？通过典型试题的整理和反思，相信会有所收获．

2．提高攻坚能力要突破四个热点问题

重点的重点是热点，高考主要通过热点问题的考查来拉开距离，选择人才．因此，考生对以下热点问题要有一个清晰的认识，力争有所突破．(本书在最后设有此专栏)

(1)探索性问题．常见的探索性问题有两种类型，一是判断型，另一类是猜测型．所谓判断型，是指题目没有给出明确的结论，但是给出了结论的可能性范围，这往往就是解题的突破口，如“判断直线 a 和 b 的位置关系，并给出证明”，这实质上是告诉我们在“相交”、“平行”、“异面”中去选择．猜测性问题，常常以“存在”、“不存在”、“是否存在”等等形式出现，“存在”就是适合某种条件或性质的对象，对这类题不管用什么方法，只要能找出一个，就说明存在，问题也就解决了；“不存在”问题一般用反证法；“是否存在”则有两种可能即存在与不存在，若存在，则需要找出来，若不存在，则应说明理由．理解了基本含义后再结合少数典型例子进行强化训练，可收到明显效果．

(2)阅读分析能力训练．不少应用题叙述冗长，一些学生难以理清头绪，抓不住关键，从而束手无策，原因是阅读分析能力差．因此要多让考生自己读题、审题、作图、识图、启发学生审题时将那些与数学无关的内容抛开，用数学的眼光去捕捉有关信息，构建数学模型．另外，有意识地多选择一些与生产生活密切相关的阅读材料让学生来分析也是必要的．

(3)函数与不等式的综合问题．这类问题往往以函数思想为主线，用含参数的不等式(或方程)作载体来考查考生的综合分析能力，难度大，但有明显的“台阶”，入手并不难，少数成绩好的学生可争取掌握，其他学生则应“拾级而上”，量力而行，适当得分．

(4)领悟解题策略．在后期阶段的复习中，应突出对学生进行这方面的训练，使考生掌握基本的认知策略，积累解题经验，提升思维品质．比如，面对一个陌生的综合题，如何在头脑中制定一个解题方案就显得很重要，聪明的考生一般是先粗线条地理清其框架，再分清层次，各个击破．理清框架就

是审题，掌握解题方向；分清层次旨在分散难点；各个击破是为了处理好细节.学生经过一段时间的训练后就有可能学会科学制定解题策略，合理解题，这样在面对综合性较强的难题时就能做到有条不紊.

应试能力培养

高考是以学生解题能力的高低为标准的一次性选拔，如何在考试时充分发挥自己的水平，对每个学生来说是很重要的一件事，它对数学成绩的影响也许是几分，十几分，甚至更多.因此，研究和总结临场解题策略，进行应试训练和心理辅导，已成为高考辅导的重要内容之一，正确运用数学高考临场解题策略，不仅可以预防各种心理障碍造成的不合理丢分和计算失误及笔误，而且还能运用科学的检索方法，建立神经联系，挖掘思维和知识的潜能，考出最佳成绩.

一、调理大脑思绪，提前进入数学情境

考前要摒弃杂念，排除干扰思绪，使大脑处于“空白”状态，创设数学情境，进而酝酿数学思维，提前进入“角色”，通过清点用具、暗示重要知识和方法、提醒常见解题误区和自己易出现的错误等，进行针对性的自我安慰，从而减轻压力、轻装上阵、稳定情绪、增强信心，使思维单一化、数学化，以平稳自信、积极主动的心态准备应考.

二、“内紧外松”，集中注意，消除怯场

集中注意力是考试成功的保证，一定的神经亢奋和紧张，能加速神经联系，有益于积极思维，要使注意力高度集中，思维异常积极，这叫内紧；但紧张程度过重，则会走向反面，形成怯场，产生焦虑，抑制思维，所以又要清醒愉快，放得开，这叫外松.

三、沉着应战，确保旗开得胜，以利振奋精神

良好的开端是成功的一半，从考试的心理角度来说，这确实是很有道理的.拿到试题后，不要急于求成，立即下手解题，而应通览一遍整套试题，摸透题情，然后稳操一两个易题熟题，让自己产生“旗开得胜”的快意，从而有一个良好的开端，以振奋精神，鼓舞信心，很快进入最佳思维状态，即发挥心理学中所谓的“门坎效应”.之后做一题得一题，不断产生正激励，稳拿中低，见机攀高.

四、“六先六后”，因人因卷制宜

在通览全卷，将简单题顺手完成的情况下，情绪趋于稳定，情境趋于单一，大脑趋于亢奋，思维趋于积极，之后便是发挥临场解题能力的黄金时期了.这时，考生可依自己的解题习惯和基本功，结合整套试题的结构，选择执行“六先六后”的战术原则.

1.先易后难.就是先做简单题，后做综合题.根据自己的实际，果断跳过啃不动的题目，从易到难解题，但要注意认真对待每一道题，力求有效，不能走马观花，有难就退.

2.先熟后生.通览全卷，可以得到许多有利的积极因素，也会看到一些不利之处.对后者，不要惊慌失措，应想到试题偏难对所有考生都难.通过这种暗示，确保情绪稳定.对全卷整体把握之后，就可实施先熟后生的策略，即先做那些内容掌握比较到家、题型结构比较熟悉、解题思路比较清晰的题目.这样，在拿下熟题的同时，可以使思维流畅、超常发挥，达到拿下中高档题目的目的.

3.先同后异.就是说，先做同科同类型的题目，思维比较集中，知识和方法的沟通比较容易，有利于提高单位时间的效益.高考题一般要求较快地进行“兴奋灶”的转移，而“先同后异”，可以避免“兴奋灶”过急、过频的跳跃，从而减轻大脑负担，保持有效精力.

4.先小后大.小题一般信息量少、运算量小，易于把握，不要轻易放过，应争取在做大题之前尽快解决，从而为解决大题赢得时间，创造一个宽松的心理基础.

5.先点后面.近年的高考数学解答题呈现为多问渐难式的“梯度题”，解答时不必一气审到底，应走一步解决一步，而前面问题的解决又为后面问题准备了思维基础和解题条件，所以要步步为营，由点到面.

6.先高后低.即在考试的后半段时间，要注重时间效益，如估计两题都会做，则先做高分题；估计两题都不容易，则先就高分题实施“分段得分”，以增加在时间不足前提下的得分.

五、“慢”—“快”，相得益彰

审题要慢，解答要快.有些考生只想在考场上一味地求快，结果题意未清，条件未全，便急于解答，岂不知欲速则不达，结果思维受阻或进入死胡同，导致失败.审题是整个解题过程的“基础工程”，题目本身是“怎样解题”的信息源，必须充分弄清题意，综合所有条件，提炼全部线索，形成整体认识，为形成解题思路提供全面可靠的依据，而思路一旦形成，则可快速完成.

六、确保运算准确，立足一次成功

数学高考题的容量为在120分钟内完成大小共22道题，时间很紧张，不允许做大量细致的解后检验，所以要尽量准确运算(关键步骤力求准确，宁慢勿快)，立足一次成功.解题速度是建立在解题准确度的基础上的，更何况数学题的中间数据常常不但从“数量”上，而且从“性质”上影响着后续各步的解答.所以，在以快为上的前提下，要稳扎稳打，层层有据，步步准确，不能为追求速度而丢掉准确度，甚至丢掉重要的得分步骤.假如速度与准确度不可兼得的话，就只好舍快求准了，因为解答不对，再快也无意义.

七、讲求规范书写，力争既对又全

考试的又一个特点是以卷面为惟一依据.这就要求不但要会而且要对、对且全、全而规范.会而不对，令人惋惜；对而不全，得分不高；表述不规范、字迹不工整又是造成高考数学试卷非智力因素失分的一大因素.因为字迹潦草，会使阅卷老师的第一印象不良，进而使阅卷老师认为考生学习不认真、基本功不过硬，“感情分”也就相应低了，此所谓心理学上的“光环效应”，“书写要工整，卷面能得分”讲的也正是这个道理.

八、面对难题，讲究策略，争取得分

会做的题目当然要力求做对、做全、拿满分，而更多的问题是对不能全面完成的题目如何分段得分.下面有两种常用方法.

1.缺步解答.对一个疑难问题，确实啃不动时，一个明智的解题策略是，将它划分为一个子问题或一系列的步骤，先解决问题的一部分，即能解决到什么程度就解决到什么程度，能演算几步就写几步，每进行一步就可得到这一步的分数.如从最初的把文字语言译成符号语言，把条件和目标译成数学表达式，设应用题的未知数，设轨迹的动点坐标，依题意正确画出图形等，都能得分.此外完成数学归纳的第一步，

完成分类讨论、反证法的简单情形等，都能得分，而且可望在上述处理中，从感性到理性，从特殊到一般，从局部到整体，产生顿悟，形成思路，获得解题成功.

2. 跳步解答. 解题过程卡在一中间环节上时，可以承认中间结论，往下推，看能否得到正确结论，如得不出，说明此途径不对，立即改变方向，寻找它途；如能得到预期结论，就再回头集中力量攻克这一过渡环节. 若因时间限制，中间结论来不及得到证实，就只好跳过这一步，写出后继各步，一直做到底；另外，若题目有两问，第一问做不上，可以第一问为“已知”，完成第二问，这叫跳步解答. 也许后来由于解题的正迁移对中间步骤想起来了，或在时间允许的情况下，经努力而攻下了中间难点，可在相应题尾补上.

九、以退求进，立足特殊，发散一般

对于一个比较一般的问题，若一时不能取得一般思路，可以采取化一般为特殊（如用特殊法解选择题），化抽象为具体，化整体为局部，化参量为常量，化较弱条件为较强条件等等. 总之，退到一个你能够解决的程度上，通过对“特殊”的思考与解决，启发思维，达到对“一般”的解决.

十、执果索因，逆因思考，正难则反

对一个问题正面思考发生思维受阻时，用逆向思维的方法去探求新的解题途径，往往能得到突破性的进展. 顺向推有困难就逆推，直接证有困难就反证. 如用分析法，从肯定结论或中间步骤入手，找充分条件；用反证法，从否定结论入手，找必要条件.

十一、回避结论的肯定与否定，解决探索性问题

对探索性问题，不必追求结论的“是”与“否”，“有”与“无”，可以一开始，就综合所有条件，进行严格的推理与讨论，则步骤所至，结论自明.

十二、应用性问题思路，面——点——线

解决应用性问题，首先要全面审查题意，迅速接受概念，此为“面”；透过冗长叙述，抓住重点词句，提出重点数据，此为“点”；综合联系，提炼关系，依靠数学方法，建立数学模型，此为“线”. 如此就可将应用性问题转化为纯数学问题. 当然，求解过程和结果不能离开实际背景.

当你做成功一件事，千万不要等待着享受荣誉，应该再做那些需要做的事.

第二部分

集合与简易逻辑

命题趋向阐释

集合是高考每年必考的知识点之一，主要考查集合的概念，交、并、补运算及有关术语、符号，数轴与文氏图.

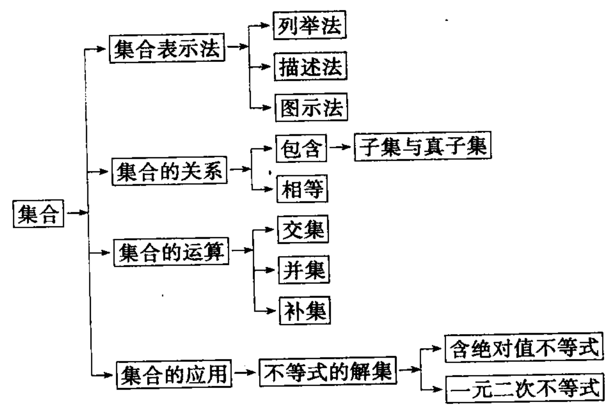
由于充要条件是一个非常重要的数学概念，因为它是研究命题逻辑关系的，其特点是涉及知识面广、综合性强，能与高中数学任何知识结合，因此历年高考试题无不涉及充要条件 知识，试题主要有两种类型：一是显性题，二是隐性题.

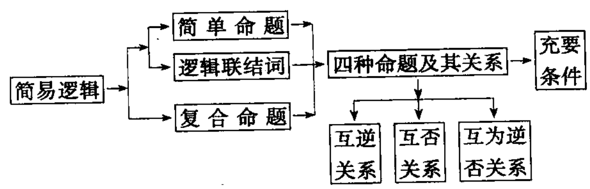
不等式也一直是高考的热点，试题大致有三类，一是考查不等式性质，常与第二章要学到的指数函数、对数函数结合起来考查，有时与充要条件知识结合考查，多数采用选择题形式；二是解不等式，有采用选择或填空形式的基本题，也有解答题，在解答题中，含有字母参数的不等式为多，也较难，需要对字母参数进行分类讨论；三是与应用题结合考查，应用题是近几年高考的热点，而应用题多与不等式有关.

目标复习建议

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.
2. 了解空集和全集的意义.
3. 了解属于、包含、相等关系的意义.
4. 掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.
5. 掌握简单的绝对值不等式和一元二次不等式的解法.
6. 理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.
7. 了解命题的概念和命题的构成.
8. 理解四种命题及其相互关系.
9. 理解充要条件的意义. 理解充分条件、必要条件、充要条件、充分不必要条件、必要不充分条件、既不充分又不必要条件.

知识网络表解





考点精要扫描

一、集合

集合的初步知识包括集合的有关概念、简单集合的表示及集合同集合之间的关系.

1. 集合的基本概念

(1)集合的元素

某些指定的对象集在一起就成为一个集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$.

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

(2)集合可分为有限集与无限集.

(3)集合的表示法：列举法、描述法以及图示法.

(4)常见数集：**N**(自然数集)、**Z**(整数集)、**Q**(有理数集)、**R**(实数集).

2. 集合与集合的关系

(1)对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，就说集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$，这时也说集合 A 是集合 B 的子集.

对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,那么 $A=B$.

(2)补集:如果 $A\subseteq S$,那么 A 在 S 中的补集

$C_SA=\{x\mid x\in S,且\ x\notin A\}$.

全集:如果一个集合含有要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,全集通常用 U 表示.

交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$

并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A\ \boxed{或}\ x\in B\}$

3.不等式解法

(1)含绝对值的不等式

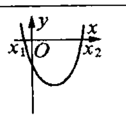
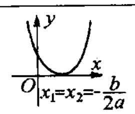
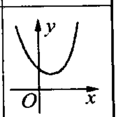
$|x|<a(a>0)$的解集是

$$\{x\mid -a<x<a\};$$

$|x|>a(a>0)$的解集是

$$\{x\mid x<-a,或\ x>a\}.$$

(2)一元二次不等式

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $ax^2+bx+c=0$	有两不等实根 x_1,x_2	有两相等实根 $x_1=x_2$	无实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			
不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1,或\ x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

二、简易逻辑

简易逻辑主要介绍逻辑联结词“或”、“且”、“非”,四种命题及充要条件.

1.逻辑联结词:“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

简单命题:不含逻辑联结词的命题.

复合命题:由简单命题与逻辑联结词构成的命题.

2.原命题与它的逆否命题是等价的.

3.如果已知 $p\Rightarrow q$,那么我们说,p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

如果已知 $p\Leftrightarrow q$,那么我们说,p 是 q 的充要条件.

注意问题总结

集合是中学数学中最基本概念,其重要性不言而喻.然而由于集合知识概念新,符号多,初学者往往顾此失彼,因此,下面介绍集合概念中的六项注意,以期帮助同学们加深对集合有关概念的理解,少走弯路,提高学习效率.

一、注意集合的三性

1.确定性

任何一个对象都能确定它是不是某一集合的元素,这是集合的最基本特征.没有确定性就不能成为集合,例如“很小的数”、“个子较高的同学”都不能构成集合.

2.互异性

集合中的任何两个元素都是不同的对象,即在同一集合里不能重复出现相同元素,如$(x-1)^2(x-2)=0$的解集不能写成$\{1,1,2\}$,应写成$\{1,2\}$.

3.无序性

在同一集合里,通常不考虑元素之间的顺序.如集合$\{a,b,c\}$与集合$\{b,c,a\}$是相同集合.

二、注意数 0,$\{0\}$,$\varnothing$,$\{\varnothing\}$的关系

数 0 不是集合,$\{0\}$是含一个元素 0 的集合,而$\varnothing$是不含任何元素的集合,$\{\varnothing\}$是指以$\varnothing$为元素的集合.

【例 1】 下列关系错误的是(　　)

A.$\varnothing\subsetneqq\{0\}$　　B.$0\in\{0\}$

C.$0\in\varnothing$　　D.$0\notin\varnothing$

精析 其中 A、B、D 都正确,而$\varnothing$是不含任何元素的集合,故 C 错误,选 C.

答案 C

三、注意空集的特殊性

空集是一个特殊且重要的集合,它不含任何元素,在解题的过程中极易被忽视,特别是在题设中隐含有空集参与的集合问题时,忽视空集的特殊性质往往导致错解.

【例 2】 已知集合 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$,$B=\{x\mid mx+1=0\}$,求 m,使 $B\subsetneqq A$.

精析与解答 由 $x^2+x-6=0$ 得　$A=\{-3,2\}$.

$\because B\subsetneqq A$,$\therefore B=\{-3\}$或$\{2\}$或$\varnothing$.

当 $B=\{-3\}$时,由$(-3)\cdot m+1=0$得 $m=\frac{1}{3}$;

当 $B=\{2\}$时,由 $2m+1=0$ 得 $m=-\frac{1}{2}$;

当 $B=\varnothing$时,由 $mx+1=0$ 无解,得 $m=0$

$\therefore$　$m=\frac{1}{3}$或 $m=-\frac{1}{2}$或 $m=0$.

四、注意符号“$\in$”与“$\subseteq$”(或“$\subsetneqq$”)的区别

符号“$\in$”表示元素与集合之间的从属关系,“$\subseteq$”(或“$\subsetneqq$”)表示集合与集合间的包含(或真包含)关系.

【例 3】 在下列各式中,正确的是(　　)

A.$2\sqrt{3}\subseteq\{x\mid x\leqslant 4\}$

B.$2\sqrt{3}\in\{x\mid x\leqslant 4\}$

C.$\{2\sqrt{3}\}\subsetneqq\{x\mid x\leqslant 3\}$

D.$\{2\sqrt{3}\}\in\{x\mid x\leqslant 4\}$

精析 由符号“$\in$”“$\subseteq$”分别表示元素与集合,集合与集合之间的关系排除 A、D.又 $2\sqrt{3}>3$ 排除 C,选 B

答案 B

五、注意数集与点集的区别

以数或点为元素的集合分别叫做数集或点集.要防止出现偏差:(1)书写上的错误,误把点集$\{(2,3)\}$写成$\{2,3\}$或$\{x=2,y=3\}$;(2)理解上的错误,误认为$\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$等价于$\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$或$\{x\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$.

【例 4】 已知 $x,y\in\mathbf{R}$,$P=\{x\mid y^2=-x+\sqrt{2}\}$,$Q=\{y\mid y=x^2-1\}$,求 $P\cap Q$.

精析与解答　此题的错误率较高，不少同学误认为都是点集，把求 $P\cap Q$ 理解为解方程组 $\begin{cases} y^2=-x+\sqrt{2} \\ y=x^2-1 \end{cases}$ 而得到错误结果；有些同学虽得出它们是数集，即 $P=\{x\mid x\leqslant\sqrt{2}\}$，$Q=\{y\mid y\geqslant -1\}$，但误认为它们代表元素形式不同，不能进行交集运算，而得出错误结果为 $\varnothing$．其实不然，由 $y^2=-x+\sqrt{2}$，得 $x\leqslant\sqrt{2}$，所以 $P=\{x\mid x\leqslant\sqrt{2}\}$，又知 $Q=\{y\mid y\geqslant -1\}$，所以 $P\cap Q=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$．

六、注意求补集的前提

在求补集时，随时不要忘了全集，因为同一集合在不同的全集中的补集是不同的．

【例 5】　全集 U 是函数 $y=\sqrt{x-7}$ 的定义域，$A=\{x\mid x\geqslant 10\}$，求 C_UA．

精析与解答　此题易忽视全集 U，或将全集默认为全体实数集 $\mathbf{R}$，从而解得 $C_UA=\{x\mid x<10\}$．

$\because$　$U=\{x\mid x\geqslant 7\}$，

$\therefore$　$C_UA=\{x\mid 7\leqslant x<10\}$．

规律方法指津

一、集合语言的转化

将集合语言转化为我们已经熟知的语言，应十分注意求解的完备性和纯粹性（既不缩小范围也不扩大范围）．

【例 1】　已知集合 $A=\{x\mid x^2+x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围．

精析与解答　$A=\{x\mid x<-2$ 或 $x>1\}$，$B=\{x\mid (x-1)(x-a)<0\}$，由 $A\cap B=B$ 知 $B\subseteq A$．

若 $B=\varnothing$，显然有 $B\subseteq A$，此时 $a=1$；

若 $B\neq\varnothing$，欲使 $B\subseteq A$，应有 $a>1$．

$\therefore a$ 的取值范围为 $[1,+\infty)$．

二、不等式的几种常见解法

1. 换元法

在不等式中，把一些结构相同的含有未知数的式子用新的未知数替换，以简化原不等式，便于求解．

7 【例 2】　解不等式 $x^2-|x|-6<0$．

精析与解答　$\because x^2=|x|^2$，　$\therefore |x|^2-|x|-6<0$．

$\therefore (|x|+2)(|x|-3)<0$，$\therefore -2<|x|<3$，

$\because |x|\geqslant 0$，

$\therefore |x|<3$，$\therefore$ 不等式的解为 $-3<x<3$．

2. 观察法

解一个不等式，首先应从全局上分析不等式及解的大致情况，再选择用何种方法求解，否则容易步入迷途．

【例 3】　解不等式 $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$．

精析与解答　令 $t=\dfrac{x}{1+x}$，则 $|t|>t$．

$\because |t|=\begin{cases} t(t\geqslant 0), \\ -t(t<0), \end{cases}$

$\therefore$ 由 $|t|>t$ 得 $t<0$．

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<0$，$\therefore -1<x<0$．

说明　学会观察，注意观察是很重要的．有些不等式表面复杂，但若从式子的结构上进行观察分析，则不难将其转化求解．再如：解不等式 $\sqrt{3-x}\geqslant\sqrt{x-3}-\sqrt{x-1}$，因为 $3-x\geqslant 0$，$x-3\geqslant 0$，$x-1\geqslant 0$，可得 $x=3$，经检验，原不等式的解为 $x=3$．解不等式的方法灵活多样，以后还会接触到更多的常用方法，要注意总结和把握．

三、判断充要条件的几种方法

1. 定义法

(1)若 $A\Rightarrow B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；

(2)若 $A\Rightarrow B$，且 $B\not\Rightarrow A$，则 A 是 B 的充分非必要条件，B 是 A 的必要非充分条件；

(3)若 $A\Leftrightarrow B$，则 A 与 B 互为充要条件．

(4)若 $A\not\Rightarrow B$，且 $B\not\Rightarrow A$，则 A 与 B 互为既不充分也不必要条件．

2. 逆否法

(1)若 $\neg A\Rightarrow\neg B$，则 A 是 B 的必要条件，B 是 A 的充分条件；

(2)若 $\neg A\Rightarrow\neg B$ 且 $\neg B\not\Rightarrow\neg A$，则 A 是 B 的必要非充分条件，B 是 A 的充分非必要条件；

(3)若 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，则 A 与 B 互为充要条件；

(4)若 $\neg A\not\Rightarrow\neg B$ 且 $\neg B\not\Rightarrow\neg A$，则 A 与 B 互为既不充分也不必要条件．

【例 4】　已知条件 $p:x+y\neq -2$，条件 $q:x,y$ 不都为 -1，则 p 是 q 的（　　）条件．

A. 充分非必要　　B. 必要非充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

精析　$\because$ 直接判断"$p\Rightarrow q$"即"若 $x+y\neq -2$，则 x,y 不都为 -1"的真假比较困难 $\therefore$ 采用"逆否法"转化为判断与它等价的逆否命题"$\neg q\Rightarrow\neg p$"的真假，即判断"若 x,y 都为 -1，则 $x+y=-2$"的真假．显然此例"$\neg q\Rightarrow\neg p$ 且 $\neg p\not\Rightarrow\neg q$"成立，$\therefore p$ 是 q 的充分非必要条件，选 A．

答案　A

3. 集合法

p q

记条件 p、q 对应的集合分别为 A、B，则

(1)若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

(2)若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分非必要条件，q 是 p 的必要非充分条件；

(3)若 $A=B$，则 p 与 q 互为充要条件；

(4)若 $A\not\subseteq B$，且 $B\not\subseteq A$，则 p 与 q 互为既不充分也不必要条件．

【例 5】　"$x>5$"的一个必要非充分条件是（　　）

A. $x>6$　　B. $x>3$

C. $x<6$　　D. $x>100$

精析　$\because$ 某选项是"$x>5$"的必要非充分条件，$\therefore$"$x>5$"对应的集合 $(5,+\infty)$，必须是该选项对应的集合的真子集，只有 B"$x>3$"对应的集合 $(3,+\infty)$ 适合，选 B．

答案　B

典型例题分析

【例 1】　设 S、T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于（　　）

A. X　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. S

精析　考查集合与集合之间的运算关系．对于没有给出