

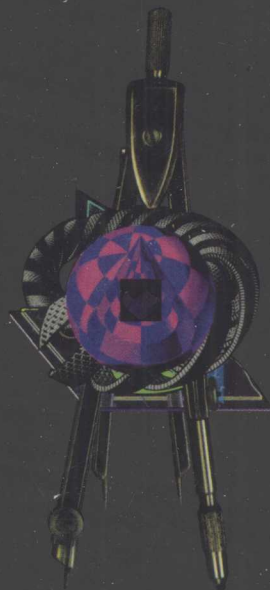
SHIJIE ZHUMING SANJIAOXUE
JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名三角学 经典著作钩沉

平面三角卷

(I)

《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHIJIE ZHUMING SANJIAOXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN



69 $\sum_{i=0}$ 刘培杰
数学工作室

图自来源《华师书城》

名家手笔 大师真传
重温经典 价值永恒

策划编辑 刘培杰
张永芹
责任编辑 唐蕾
封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮 编：150006
联系电话：0451-86281378 13904613167
E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-3008-2



9 787560 330082 >

上架建议：初等数学/科普/数学史

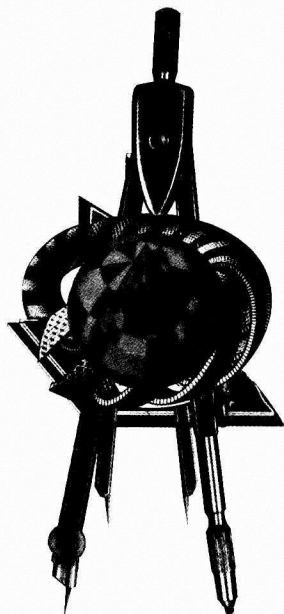
定价28.00元

SHIJI ZHUMING SANJIAOXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名三角学经典著作钩沉

(平面三角卷 I)

《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组 编



哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书共分四章,分别为第一章引论,第二章三角函数的几何理论,第三章加法定理及其推论,第四章反三角函数。

本书适合大、中学师生及三角学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

世界著名三角学经典著作钩沉.平面三角卷.1/
《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组编.一哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2010.6

ISBN 978-7-5603-3008-2

I.①世… II.①世… III.①平面三角 IV.①O124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 073087 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 14.25 字数 24.8 千字

版 次 2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3008-2

印 数 1~3 000 册

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前言

“开卷有益”已是现代人的共识，但开哪些卷才更有益却是一个问题。

在汪丁丁教授写的《经济思想史》一书的序言中提出了一个所谓“知识的合法性问题”，即读者可能会发出疑问：在我以有限生命追逐无限知识的过程中，我凭什么相信我所追逐的那一极细小的知识片断不是虚幻的？如果很不幸地，我毕生阅读的核心部分事后表明是虚幻的，我的生命意义是否消失？

其实这一问题早在柏拉图时代即被提及。柏拉图曾问：什么是“知识”？西方学者提供了三种解答：其一称为“符合论”，即知识是主观观念与客观事实的符合；其二称为“融洽论”，即知识是逻辑自洽的观念体系；第三种包容了前两种，称为“符合-融洽论”，即知识是有根据的确信。

中国人用自己的行动对此问题也有三种解答。其一曰“时髦论”，即凡时髦的知识就值得学习和信赖，因为时髦的知识或许在最近的将来也是可以带来可观收益的知识；其二曰“权威论”，即凡经权威认可的就值得学习和信赖；其三曰“探究论”，即没有什么知识是长期可信赖的。学习知识的目的仅仅在于全面地开发心智，让心智在一切方向上充分涌流。

据汪丁丁教授介绍，他向学生们所推荐的通常是第二种，因为它比较稳妥，不似第一种那样浮躁，也不似第三种那样令人无所适从。换句话说，他们应遵循每一学科的知识共同体长期认可的那些权威认可的标准，凡符合这些标准的知识片断，就具有可以信赖的知识合法性。

说白了就是权威们写的或认可的经时间检验的经典,就是可靠的知识,学习它们风险较小,所以出书与读书首选经典,香港凤凰卫视评论员梁文道先生说:我们常把经典和畅销书对立起来,觉得后者虽能红极一时,终究是过眼云烟;而前者面世初时光华内敛,却能长明不熄,写书出书,当以铸经典为职志。

本系列丛书搜集的是世界各国各历史时期的初等数学经典.大多兼有数学教育史史料研究及弥补当前初等数学教材不系统、缺深度、少背景介绍等缺陷之功能.目前图书市场充斥着大量的复习资料及由习题堆砌而成的练习册,学过数学的人都知道,习题与教本之间是毛与皮的关系.皮之不存,毛将焉附,皮质不好毛也不会光亮浓密.所以应多从皮上入手,对优秀读本我们要不遗余力的挖掘、整理、订校、刊行.

第二个问题是老卷新开,即现在谁还看这些“过时的东西”。

梁文道在凤凰卫视的读书节目《开卷八分钟》中曾说:“世界有多复杂,书就有多复杂,人有多少种,书就有多少种。”

我们以往做书的经验告诉我们,千万不要轻视读者,以为自己可以充当读者的导师.其实读者并不都是靠看畅销书排行榜而买书的浅薄之徒,他们有自己的趣味,也有自己的判断.其实编者亦然,在一篇写近代藏书家傅增湘的文章中曾用了这样的描述令笔者深有同感:“独于古籍之缘,校讎之业,深嗜笃好,似挟有生以俱来,如寒之索衣,饥之思食,如无一日之可离。”首先编者必须是对书有强烈热爱之人,他才能以爱书人之心度喜读书人之腹,把自己心目中有价值的书奉献给读者.这是从编者角度来说,从读者角度来看更应如此。

荣获2010年沃尔夫奖的哈佛大学 William Casper Graustein 讲座教授丘成桐先生在接受《科学时报》访问时,寄语中国年轻人说:要多看一些书,多跟老师探讨书本上的问题,中国学生因为功课繁忙不大看课外书.其实好的学生要多看课外书,多跟老师交流.(科学时报,2010-02-9008(A3))

其实一个人在青少年时期所读的书会对他一生都产生影响,而这些书大多并不是老师布置的.曾用初等方法证明了素数定理的挪威数学家塞尔伯格曾在他的本笔记《Ramanujan 百年的反思》(《塞尔伯格全集》第一卷)中描述了他早年的生活.他似乎主要是在图书馆进行阅读的,而始于读他父亲的那些书,所以他很了解斯堪的那维亚数学家的著作,并极力赞扬阿贝尔(Abel),他也很了解弗雷德霍姆(Ivar Fredholm)的工作,这时的经典阅读对其日后成名至关重要.所以古罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典.蒙师傅们的任务不是兜售自己的知识,而是忠实地教会孩子们读通经典。

在目前中国有一个现象,当有人看到某些人的藏书时,都会问一句:“这么

多书,你都读过吗?”面对这个询问,一般有三种回答:第一种是我读过的比这还多;第二种是一部分读过,大多数没读过;第三种是这些都是我未读过的,不然为什么留着它呢?但有这样一种难以解释的现象,那些没读过的书总有那么一天,当我们拿起这些书时,发现自己已了解了其中的内容.为什么呢?这是因为我们读了一堆授引这部著作的书,这使得我们最终也熟悉了著作本身.

第三个问题是卷中何物,即所读之书内容如何?三角学是一门历史悠久,源远流长的厚重之学.数学是数学家的创造,所以了解数学家非常重要.为此学科成长而作出过重要贡献的大家群星璀璨,容一一列举.

古埃及数学家托勒密(Ptolemy Claudius, 约 90—168),因其父母都是古希腊人,所以人们更愿意约定其为古希腊数学家,从公元 127 年托勒密就被送到亚历山大里亚求学.此后,他长期居住在亚历山大里亚.他以“地心说”体系的创始人而著称于世,托勒密是三角学的创始人之一.他是为了研究天文学问题而创立三角术的,因此他主要研究的是球面三角,实际上也奠定了平面三角的理论基础.

托勒密对三角学的研究,是从计算圆弧所对的一些弦长开始的,他将圆周分为 360 份,直径则被分为 120 份.若给定某弧为 360 份中的若干份,则相应弦长用直径所含 120 份中的份数来表示.他把 0° 到 180° 之间所有相差 $(\frac{1}{2})^\circ$ 的弧所对应的弦长都算出来,并列成表,这是世界上的第一个三角函数表.

在托勒密计算圆弧对应的弦长时,得到了一些有用的三角函数之间的关系,相当于现代所用公式: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 由 $\sin A, \sin B$ 的已知的值计算 $\sin(A - B)$ 和 $\sin(A + B)$ 的公式,由 $\sin A$ 求 $\sin \frac{A}{2}$ 和 $\sin 2A$ 的公式.

对三角学贡献较大的早期学者首推阿拉伯数学家.就像物理学、心理学、医学都是从哲学中分离出来的一样,三角学是从天文学中分离出来的,早期是天文学的一部分,所以就不难理解为什么球面三角学先出现而平面三角学后出现这一反常现象(本书后半部分为“球面三角学”,我们将稍后出版),一般来说科学的发展应该是从简单到复杂才对,但三角学的发展却恰恰是反的.有七位阿拉伯数学家对三角学发展有重大贡献.

阿尔·巴塔尼(al Battani, 858—929),出生于叙利亚,在欧洲一般称他阿里巴捷格尼,他曾运用正弦、正切、余切等得出了许多关系式.

阿布·韦法(Abul Wefa, 940—998),出生于伊朗霍拉桑省,以三角学和应用天文学的著作而闻名,他编有每 $10'$ 精确到 $\frac{1}{64^4}$ 的正弦表和正切表,并导出了与

公式 $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ 及 $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ 对应的定理.

阿尔·哈巴什 (al Habash, 764—847), 生于梅尔夫城. 他最早引入作为直角三角形的比的正切和余切的概念, 并编制了正弦、正切及余切表.

伊本·尤诺斯 (Ibn Junos, 950—1009), 是阿布·韦法的学生, 他算出了 1° 的正弦, 并改进了托勒密的方法, 编制了间距为 $1'$ 的正弦表. 他编制的间距为 $1'$ 的正切表至今尚无人研究过. 他还写了许多平面三角和球面三角方面的文章.

伊本·伊拉 (Ibn Irak, 10—11 世纪), 是阿尔·比鲁尼的老师, 并且是梅涅劳斯所著《球面学》阿拉伯文译本的译者之一. 他对三角学的贡献是他证明了平面三角形的正弦定理.

纳西尔-艾德丁 (Nasir-Eddin, 1201—1274), 1201 年 2 月 18 日生于伊朗的图西, 他曾就学于当时著名学者伊本-尤尼斯.

纳西尔-艾德丁是阿拉伯的一位百科全书式的学者, 著有天文、三角、几何等多方面的著作. 他著的《论四边形》一书在三角学发展史上有特殊重要的地位, 书中含有解球面直角三角形的 6 个基本公式, 并指出用现今所谓的极三角形来解更一般的三角形的方法. 他的工作使平面三角和球面三角系统化, 并独立于天文学.

卡齐-扎德 (Kazi-Zade, Sudah ad-din Musai bn Muhammed ar-Rumi, 1360—1437), 出生于土耳其的布尔什. 曾在撒马尔汗天文台工作, 是著名天文学家乌鲁伯格的助手之一. 他在数学方面的研究接近阿尔-卡西, 在三角学方面有所贡献, 著有《关于一个角的正弦的定义》等.

印度、古希腊和中国作为世界文明古国, 对三角学发展也有很大贡献.

印度数学家阿利阿伯哈塔 (Aryabatta, 476—550), 他非常注意三角学的研究, 但不使用古希腊人的“弦”而是把全弦的一半与全弦所对弧的一半相对应, 从而引入了角的正弦, 这在当时是一项重大的改革, 也是一个显著的进步, 给三角学的研究奠定了基础.

古希腊数学家希帕恰斯 (Hipparchus, 约前 190—约前 125), 出生于毕迪尼亚. 是古希腊著名学者, 西方古代天文学的创始人. 他在数学方面开创了三角学的研究. 在球面三角学、平面三角学以及三角形解法等方面都有所贡献. 他给出了从 0° 到 180° 之间各角度的正弦表, 为三角学奠定了初步基础. 以经纬度来确定地球上一点的位置也起源于他的构思, 他著有许多三角学与天文学著作, 这些著作继承了古希腊前人的成就, 又比前人论述得更为精密, 可惜的是他的著作都已失传, 古希腊学者托勒密对他的评价很高.

近代数学没有在中国产生,所以大多数中国数学家是从清代才开始从西方数学中了解到这一学科并积极引介到中国.其中杰出的有以下六位.

谢洪赉(1873—1916),中国清代山阴人,曾与潘慎文(A. P. Parker)合作翻译了美国罗密士著的《八线备旨》4卷(有1894年美华书馆铅印本).

熊其光(1817—1855),字韬之,中国清代青浦人,著有《弧三角算草》1卷.

薛光绮,字仲华,中国清代无锡人,著有《新三角问题正解》11编,有1903年刊本.

严立峰,中国清代浙江归安人.李善兰的《则古昔斋算学》中,载有他提出的求弧三角面积的算法:将圆球平分为两半球,从各顶点用球大圆等分球面为360大份,每大份又等分为60中份,每中份再等分为60小份;若有弧三角求其面积,则以三角的度数相并,减去 180° ,余几度几分几秒,即知其面积为几大份几中份几小份.李善兰多次考查的结果都能相符,得知严立峰的方法可信.

杨作枚,字学山,中国清代江苏无锡人.他是梅文鼎学术上的挚友,梅文鼎对其评价是“独以颖妙心思,探无穷底蕴”,“皆有精思奥理,自成一家”.他为梅文鼎的《弧三角举要》增补了《解割圆之根》,其中论述了一些其他的三角问题.

周藩,中国清代数学家,编译过日本奥平氏原著的《平面三角法讲义》,现存有上海科学编译局的石印本,他还重译了克伊其氏原著的《初等平面三角法详草》,现存有1907年文明书局石印本.

18世纪末到19世纪初随着俄罗斯民族的崛起,大批优秀的数学家随之产生.在三角学的体系建立和普及推广过程中,俄罗斯数学家做得很好,这些为日后俄罗斯成为数学大国奠定了基础.我国从20世纪50年代起开始大规模全面学习苏联科学技术.翻译了大量的数学教程,本书最初就是在那一批引入的,经过多年之后,价值依旧,所以我们要进行钩沉.

除本书作者之外,俄罗斯早期在三角学教程编写过程贡献较大的有如下四位.

格拉泽纳普(Glazenap Sergei Pavlovič, 1848—1937),1848年9月25日生于特维尔省巴甫洛夫镇.1870年毕业于彼得堡大学.并留校任教.1927年成为苏联科学院通讯院士,1929年为名誉院士,他编写了平面三角和球面三角的教材.

俄罗斯的三角学教科书编写有悠久的历史.早期的戈洛文(Golovin Mihail Evseevič, 1756—1790)编写的《平面和球面三角的代数证明》(1789年)一书达到了当时较高的科学水平,戈洛文1756年出生于阿尔汉格尔斯克省马季戈尔镇,经叔父罗蒙诺索夫推荐,1765年春考入中学.后来进大学深造,在欧拉指导下学习数学.毕业后成为彼得堡科学院研究生,1786年成为该科学院名誉院士.

他积极编写教材是因为晚年在彼得堡中心民众学校校委会和教师进修班工作。

俄罗斯数学家雷勃金(Rybkin Nikolai Alexandrovič, 1861—1919),生于原弗拉基米尔地区.中学毕业时获金质奖章,曾就读于莫斯科大学数学物理系,1883年开始从事教育工作.雷勃金是数学教育家,他编写了大量的教科书和习题集,如1895年编写的《三角学习题集》.

苏联数学家列普耶夫(Rep'ev Viktor Vasil'evič),1893年2月7日生于克尼雅金尼诺,1914年毕业于乌菲姆斯基土地测量学校,后来于1924年又毕业于高尔基城的师范学院数学物理系,1964年起领导高尔基师范学院数学教学法教研室的工作,1966年成为教授,1938年列普耶夫发表了《三角教学法》.

在数学史著作中,一般提到三角学的历史都首推德国,德国数学家的工作最后导致三角学脱离天文学成为一门独立的学科,德国早期对三角学贡献较大的数学家有以下七位.

德国数学家谬勒(Müller, Johannes, 1436—1476),1436年6月16日生于哥尼斯堡(前苏联的加里宁格勒)附近的安费德,曾在莱比锡、维也纳跟随波伊尔巴赫学习天文学和三角学.

谬勒对三角学贡献很大,大约在1461年至1464年间,他写成了《论三角》一书,但这本书直到1533年才正式出版.书中把平面三角、球面几何、球面三角等知识放在了一起,给出了有关球面三角学的正弦定理、余弦定理,计算了三角函数表,而且相当精确.1464年至1467年间他还给出了五位正切表.他的这些工作也促使三角学脱离天文学而成为一门独立的学科.

德国数学家沃纳(Werner, Johann, 1468—1528),1468年2月14日生于纽伦堡,他是欧洲最先使用以余弦之差表示正弦的积的公式的人.他的手稿《论大圆弧构成的三角形》(1514)对三角学的发展有重要意义,但已失传.他的三角学著作在某种程度上接近杜勒的著作.

德国天文学家和数学家雷因戈尔德(Reingold, Erazm, 1511—1553),他生于扎勒菲尔德,与哥白尼很要好,但迫于反科学势力的压力,却按照托勒密的“地心说”来讲授天文学.在数学方面,他改善了谬勒的三角函数表,使其正切值与余切值更精确.他计算的三角函数表成为哥白尼的名著《论天体运行》的重要依据.然而,雷因戈尔德的贡献没有引起人们足够的注意,这一点至今还不清楚是什么原因.

德国数学家莱伊提库斯(Rhaeticus, Georg Joachiml, 1514—1576),1514年2月15日生于费勒德基尔赫,他是哥白尼的学生和好友,1537至1542年间在维滕贝格大学任教授.

莱伊提库斯对三角学作出了很大贡献.在他之前,正弦函数都是用圆的弧与弦来讨论的,从他开始则使用直角三角形斜边与对边的比来定义,而且他定义了6种三角函数,他与他的学生以坚韧不拔的毅力进行了12年之久的勤奋工作,编制成每隔 $10''$ 的三角函数表,可惜未能在他生前全部完成.

德国数学家皮提斯科斯(Pitiscus, Bartholomäus, 1561—1613),1561年8月24日生于海得堡,他于1595年首次提出“三角学”一词,并参加制订三角函数表的工作.在1613年出版的《数学宝库》一书中发表了经他修订的莱伊提库斯的三角函数表,这是一件非常辛苦的工作.

德国数学家迈尔(Mayer, Frederic-Christian, 1697—1729),1697年10月10日生于维尤尔腾堡.1726年到彼得堡,成为彼得堡科学院第一批院士之一,并任数学教授.

迈尔于1726年至1729年间,发表了不少关于几何学、数论、三角学和天文学的著作.在1729年出版的《三角学》中,他首次使用了新的符号体系,并对所使用的符号逐个给出了分析说明;他还在和差公式的基础上推导了三角学的许多恒等式.

德国数学家特拉列斯(Tralles, Johann Georg, 1763—1822),1763年10月15日生于汉堡,曾担任柏林大学教授、柏林科学院院士.他曾导出近似公式 $\sin x \approx x(\cos^{\frac{1}{3}} x)$ 和 $\tan x \approx \frac{x}{\cos^{\frac{2}{3}} x}$.

在欧洲除德国外,法国、英国、丹麦、捷克斯洛伐克、瑞士、南斯拉夫、罗马尼亚等国都有数学家对三角学作出较大贡献,如:

法国数学家韦达(Vieta, Francis, 1540—1603)生于普瓦图的丰特奈-勒孔特,在1591年著成而于1615年才出版的《论方程的整理与修正》中,韦达获得了一项有名的成果,他借助三角恒等式 $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$,解出了不可约三次方程,从而避免了使用卡尔丹的公式,这个方法现在仍在使用.

1595年,韦达在《回答》一书中解决了比利时数学家罗曼纽斯提出的一个45次代数方程,其方法是把它化为由 $\sin \alpha$ 求 $\sin \frac{\alpha}{45}$ 的问题.

在三角学方面,韦达将平面三角学和球面三角学进一步系统化,并稍有发展.1579年,他发表了自己的第一本三角学著作《标准数学》,其中整理了直角和斜三角形的公式,并给出了正切定理

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

这是他自己的发现.对于球面直角三角形,他给出了一套完全的公式及记住这套公式的法则,不过这个法则现在被称为纳皮符法则.对于球面钝角三角形,他提出了余弦定理

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha$$

另外,他还补充了很多三角恒等式.在《斜截面》(1615)这本书中,韦达又把这些三角恒等式表示成代数形式,但符号不是现代的.

法国数学家杰帕赛尤克斯(Depercieux, Antuan, 1703—1768),1703年10月28日出生,曾在里昂的叶祖特学校学习,是彼得堡科学院通讯院士,杰帕赛尤克斯于1741年在巴黎发表了《新编三角学教程》一书,附有7位的正弦、正切、正割表和8位的正弦对数和正切对数表.

英国数学家格利布朗德(Gellibrand, Heinrich, 1597—1637),1597年11月17日生于伦敦,曾任葛莱兴大学天文学教授,格利布朗德于1633年发表了他与布里格斯合著的《不列颠三角学》一书,这部著作的第二部分,在解平面三角和球面三角问题时,第一次利用对数性质进行数值计算;同时,与纳皮尔类似,他们还运用了平面三角形和球面三角形的半角公式.

著名的丹麦天文学家布拉赫(Brahe, Tycho, 1546—1601)对三角学也有重要贡献,1896年,后人出版了他的三角方面的文稿,其中包括运用极三角形符号,平面三角和球面三角的定理以及大数乘除的简略算法,书中有如下公式(用现代数学符号表示)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

克列扎(Kressa, Jakub, 1648—1715),捷克斯洛伐克人,1648年7月19日出生,是捷克的数学博士、哲学博士和神学博士.1720年在其逝世后5年出版了他的遗作《三角学的分类分析》.这部著作显著的特点是每个步骤都采用了代数方法,实际上他在当时就奠定了现代三角学的理论基础.

瑞士数学家赫尔曼(Hermann, Jacob, 1678—1733),也编写过三角学教科书,1678年7月16日生于巴塞尔,他是伯努利 的学生,曾到帕多瓦大学、法兰克福大学讲学.1725年应俄国彼得一世之请,到俄罗斯新成立的科学院工作.

南斯拉夫数学家博什科维奇(Boskovic R J, 1711—1787), 求学于罗马, 曾任意大利几所大学的教授, 他简化了 6 个球面三角基本问题的解法, 并成功地从众多的球面三角公式中分离出 4 个基本等式。

拉扎尔(Lazar Geory, 1779—1823), 罗马尼亚数学家。他是罗马尼亚教育启蒙家、工程师, 又是 1821 年农民暴动的参加者。在 1818 年曾写过一本三角学的教程, 是一本中级水平的指导书, 简明易懂。

曾深刻影响中国的美国哲学家杜威曾说:“只有当人们有机会有效地分享文明的一切文化资源时, 人们才能获得人类精神和个性的充分自由。”

如果将数学视为一座摩天大厦的话, 那么初等数学只能是其中的一层地下室。而平面三角又充其量能算做是地下室的一个小房间, 但就是这么样的一个小房间也是全世界如此多的数学家集体智慧的结晶。所以, 我们应以景仰之心去读, 而且它比现代的大多数教程都优秀。1967 年, 美国历史学家杰克·赫克斯特对 20 年来美国的历史著作进行的综述时所指出的: 过去的历史著作从不像今天那么荒唐, 产生出了那么多令人窒息又毫无创意的繁琐东西, 思想平庸的人以拙劣的方式写出了一些没有意义的作品, 却很少进行思考, 甚至根本不加思考, 而且对此不十分在意(《那高尚的梦想》, 彼得·诺维克著, 杨豫译, 三联书店, 2010, 第 518 页)。作为读者和编辑, 我们对今天的数学课本也有类似的想法。

有智者说: 经济决定今天, 政治决定明天, 教育决定未来。此言极是, 因此, 最令人担忧的是今天教育的久远后果, 一代代新人经由应试教育走上了社会, 他们的精神素质将决定未来中国数十年乃至上百年的精神水准和社会面貌。有张力才会产生均衡, 要想有张力就必须有相反的力量, 某种意义上说我们出版这些貌似老旧的经典, 其实是对“伪创新”的反动, 希望对遏制现在过于实用化、功利化的中学数学教育有所帮助。

刘培杰

2010 年 4 月 15 日

◎
目
录

第一章 引 论 // 1

- § 1 论三角学教程的内容 // 1
- § 2 射影理论的基本概念 // 2
- § 3 角及其量度 // 6
- § 4 坐标平面 // 11
- § 5 论单调函数 // 14
- § 6 周期函数 // 16

第二章 三角函数的几何理论 // 19

- § 7 角的三角函数 // 19
- § 8 三角函数的各种解释 // 23
- § 9 三角函数的自变量 // 28
- § 10 三角函数的定义域 // 30
- § 11 自变量的某些特别值的三角函数 // 31
- § 12 三角函数的周期性 // 34
- § 13 三角函数正负号的开区间 // 35
- § 14 三角函数的偶性和奇性 // 38
- § 15 三角函数值的集合 // 39
- § 16 按三角函数的给定值求所有弧的集合的方法 // 44

- § 17 三角函数间的关系,三角恒等式 // 46
- § 18 三角函数的单调区间 // 58
- § 19 三角函数的连续性 // 66
- § 20 连续延拓原理·自变量的奇值 // 68
- § 21 三角函数的图象 // 71

第三章 加法定理及其推论 // 79

- § 22 加法定理 // 79
- § 23 简化公式 // 88
- § 24 倍弧的三角函数 // 96
- § 25 分自变量的公式 // 97
- § 26 三角函数的积化为和的公式 // 104
- § 27 三角函数的和化为积的公式 // 108
- § 28 各种三角变换的例题 // 112
- § 29 一些三角函数的和与积的计算 // 122
- § 30 辅助角的引入与三角代换式 // 142
- § 31 有理化代换 // 150
- § 32 研究函数的例题 // 155

第四章 反三角函数 // 163

- § 33 反三角函数 // 163
- § 34 施于反三角函数的三角运算 // 174
- § 35 反三角函数间的关系 // 179
- § 36 对于三角函数施行反三角运算 // 185
- § 37 加法公式 // 190
- § 38 反三角函数和的变换的例题 // 199
- § 39 切比雪夫多项式 // 207

第一章 引 论

§ 1 论三角学教程的内容

三角是由于计算实践的需要而产生的,也就是由于创造一种工具,以便按照各种几何图形的足够个已知元素而计算其他元素的这种需要而产生的.早在古代希腊,由于解一系列天文学的计算问题,三角就得到了相当大的发展.9~13世纪,中亚细亚——塔什克、乌兹别克、阿捷尔拜疆——的科学家的著作,在作为独立科学的三角学的建成这一方面有着奠基的意义.虽然三角学得到了作为具有专门研究法的科学科目的独立性,但毕竟它的最终目的还在于制订最简单的几何图形(平面三角形和球面三角形)的元素的计算方法.三角函数的学说一直是以几何作图为基础的;用几何方法所建立的三角函数间的代数关系,使我们能够用代数方法研究三角函数、施行变换、建立几何图形元素间的各种关系.这样一来,便形成了以几何为基础,同时又广泛应用代数方法的三角学所特有的性质.

科学的进一步的发展证明,三角函数的价值不仅在于制订解决几何计算问题时所必要的工具;在研究周期过程时这些函数在力学和物理上也获得了重要的意义.这样,三角函数的理论有了独立的意义,并且引起了这个理论的不依赖于几何的解析结构的需要.

三角函数的解析理论奠基于伟大的学者、彼得堡科学院院士欧拉的著作.伟大的俄罗斯数学家罗巴切夫斯基提出不依赖欧氏几何系统以定义三角函数的问题后,创立了三角函数的解析理论,幂级数的工具是这理论的基础.

现代,三角学作为独立的科学已不存在:关于几何图形的元素的计算问题自然属于几何,这儿三角只起着“辅助的”作用;另一方面,三角函数的解析理论自然归并到分析中讲述初等函数的一般理论那一章里.虽然现在三角学不再作为独立的科学而存在,但是它仍旧是很重要的独立的教学课目.在中学的数学教程中三角学确实占有相当大的比重.

因为建立三角函数解析理论所必需的十分发达的解析工具远超出大纲的

范围,所以中学的三角学教程势必要以几何为基础.此外,三角函数的几何理论在很大的程度上适应着三角学的实际应用.

在现代中学三角学教程里反映出两种路线,即函数路线和计算路线.第一种表现在三角函数作为数字自变量的函数的研究上,由于三角函数在现代数学解析、物理、力学、工程中起着巨大的作用,而有重要的原则性的价值.第二种表现在几何图形的元素的计算方面,因为给出几何、物理、工程、天文、测量等所必需的计算方法,而有重要的实用价值.^①

按照师范学院初等数学专门教程的总任务,三角学专门教程的目的在于加深、发展三角学教程,并打下它的科学基础以及通晓三角的实际应用.三角学专门教程包含中学数学教程中所有问题的广泛叙述,因此与初等数学专门教程的其他章节同样,从中学教师业务修养的观点来看,它有很重要的价值.师范学院的教学计划包含着数学解析与函数论的详细的教程.因此专门教程中包括三角函数的解析理论及和它有关的初等复变函数的学说的基础,这可使未来的教师领会到中学教程中数学科目的科学内容.

在引论这一章中,概述一下在师范学院所研究的其他课目中已知的知识和作为三角学教程以后各章叙述的基础的知识.

§ 2 射影理论的基本概念

为了写出由点 A 和 B 所界的线段的确定方向,按一定次序给出点 A 和 B ; 第一个点(写在第一个位置上的)叫做线段的始点,第二个点(写在第二个位置上的)叫做线段的终点(图 1.1).有向线段叫做向量.

设 \overrightarrow{AB} 是已知向量,经过点 A 和 B 的直线 l 含有线段 AB 的一切点;向量 \overrightarrow{AB} 的始点 A 将直线 l 分成两条射线,其中一条包含向量的端点 B ,我们说:这条射线和向量 \overrightarrow{AB} 的方向相同;另一条不包含点 B ,我们说:这第二条射线和向量的方向相反(图 1.2).

^① 中学教程中,上述两种路线的适当适合是数学教学法的任务.我们只提出,下面两种极端的观点是同样错误的.

第一种极端表现在忽视函数路线而认为三角学只是“三角形的解法”.这种在许多旧教科书中占统治地位的观点现在已变成史话了.

另一种极端表现在忽视计算的路线.依照国外“改良主义运动”的函数滥用,“三角形解法”被认为是某种“无思想性”与“低级的”东西.这种观点之不能为苏维埃教学法所接受,正认为三角学好像只是数学分析的一章,因而“取消”三角学作为一个独立的教学课目的那种不切实际的想法一样.国外的这种歪曲以及与其类似愚笨的主张,比方说将内容贫乏的微积分“概要”放到中学教程中,在现在先进的教学法中是不受欢迎的.