新世纪

本书编写组 编

上海名校 名师为你家教

高中毕业班

数学

15.00

中国出版集团
东方出版中心

P

新世纪上海名校名师
为你家教

·高中毕业班数学·

本书编写组 编

东方出版中心

图书在版编目（CIP）数据

新世纪上海名校名师为你家教.高中毕业班数学/《新世纪上海名校名师为你家教.高中毕业班数学》编写组编.—上海：东方出版中心，2003.3

ISBN 7-80186-034-9

Ⅰ.新… Ⅱ.新… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第001607号

新世纪上海名校名师为你家教——高中毕业班数学

出版发行：东方出版中心
地　　址：上海市仙霞路335号
电　　话：62417400
邮政编码：200336
经　　销：新华书店上海发行所
印　　刷：昆山市亭林印刷有限责任公司
开　　本：787×1092毫米 1/16
字　　数：328千
印　　张：14
版　　次：2003年3月第1版第1次印刷
ISBN 7-80186-034-9
全套定价：45.00元（共3册）

目　　录

第一阶段　集合与函数

第1讲　集　　合

［学习要点］

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义.

2. 掌握有关的术语和符号，能正确表示一些较简单的集合.

［典型例题］

例1　已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 A、B 均为三元素集合，若 $A=B$，求实数 x、y 的值.

解　要使 $\lg(xy)$ 有意义，必须 $xy>0$，$\therefore x\neq0,y\neq0$，即 A 中的元素 x、xy 都不可能与 B 中的元素 0 对应，于是只能是 $\lg(xy)=0$，即 $xy=1$ $*$，$\therefore A=\{x,1,0\}$. 再考虑 A 中的元素 1，B 中与 1 对应的只能是 $|x|$ 或 y，即 $|x|=1$ 或 $y=1$. 若 $y=1$，则由 $*$ 得 $x=1$，这时 A 中有两个元素为 1，与集合中元素的互异性矛盾，$\therefore y\neq1$，同理 $x\neq1$. 又 $\because |x|=1$，$\therefore x=-1$，由 $*$ 得 $y=-1$，这时 $A=B=\{-1,1,0\}$.

例2　已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x|x^2-bx+2=0\}$，若 $B\subset A$，$C\subseteq A$，求实数 a、b 的值.

解　$A=\{1,2\}$，由 $B\subset A$ 知 B 的可能性有三种：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$. $\because$ 方程 $x^2-ax+a-1=0$ 的根为 1 和 $a-1$，$\therefore B$ 只有一种可能 $a-1=1$，即 $a=2$.

由 $C\subseteq A$，显然 $b=3$ 时，$A=C$. 另一种情况是 $C=\varnothing$，即 $b^2-8<0$，解得 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

$\therefore -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$ 或 $b=3$.

例3　已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，集合 $B=\left\{y|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant3\right\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解　$\because a^2+1>a$，$\therefore A=\{y|y<a$ 或 $y>a^2+1\}$.

由 $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 知 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，$y_{\min}=f(1)=2$，$y_{\max}=f(3)=4$，$\therefore B=\{y|2\leqslant y\leqslant4\}$.

$\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore \begin{cases}a\leqslant2,\\a^2+1\geqslant4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\leqslant2,\\a\leqslant-\sqrt{3}\text{或}a\geqslant\sqrt{3},\end{cases}$

$\therefore a\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant2$.

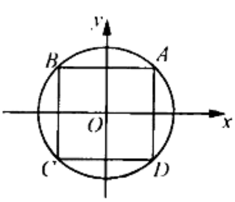

图 1－1

例4　设集合 $P=\{(x,y)\mid |x|\leqslant1,|y|\leqslant1\}$，$Q=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a,a>0\}$，要使 $P\cap Q=P$，求实数 a 的取值范围.

解　如图 1－1，集合 P 为正方形 $ABCD$ 的内部（包括周界）；集

合 Q 为以原点 O 为圆心、$\sqrt{a}$为半径的圆的内部(包括圆周). 要使 $P\cap Q=P$,则正方形在圆内或正方形内接于圆,即$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{2}$,$\therefore a\geqslant 2$.

[家教点窍]

1. 要明确集合中元素的确定性、互异性和无序性,并注意此性质在解题中的应用. 对两集合之间的关系的判断,只能从集合中的元素入手.

2. 为表示出集合中所含元素及元素数目,表示集合之间的关系,用图解法(数轴、文氏图等)是直观有效的方法.

3. 要准确地使用集合的文字语言、符号语言、图形语言及其相互转化.

4. 集合问题多与函数、方程、不等式有关,要注意各类知识的融会贯通.

[强化训练]

1. 满足$\{1,2\}\subset A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合 A 的个数是__________

2. 数集$\{2a,a^2-a\}$中实数 a 的取值范围是__________

3. 集合$\{(x,y)|y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$用列举法可表示为__________

4. 把图 1-2 中阴影部分用 A、B、C 表示出来是__________

5. 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|\log_3(x^2+x-3)=1\}$,$C=\left\{x\,\middle|\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7x+10}=1\right\}$,且 $A\cap B\supset\varnothing$,$A\cap C=\varnothing$,求实数 a 的值.

6. 已知集合 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

7. 已知集合 $A=\{(x,y)|y=\sqrt{a-x^2}\}$,$B=\{(x,y)|y=x+b\}$,且 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 b 的取值范围.

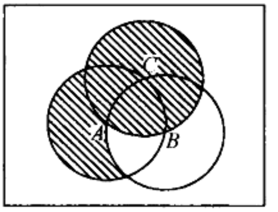

图 1-2

8. 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$,$N=\{a,aq,aq^2\}$,其中 a 为已知常量,且 $a\neq 0$,若 $M=N$,求实数 d、q 的值.

9. 设 A 是数集,且满足条件:若 $a\in\mathbf{A}$,$a\neq 1$,则$\frac{1}{1-a}\in\mathbf{A}$. 如果 $2\in\mathbf{A}$,求集合 A.

10. 已知集合 $M=\{x||x+1|\leqslant 1\}$,集合 $N=\{y|y=4^x-a\cdot 2^{x+1}+1,x\in\mathbf{M}\}$,其中$\frac{3}{4}<a\leqslant 1$,设全集 $I=R$,求$\overline{M\cup N}$.

第 2 讲　命题的四种形式及充要条件

[学习要点]

1. 掌握命题的四种形式及它们之间的等价关系.

2. 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义,能够判断给定的两个命题的充要关系.

[典型例题]

例 1 写出命题"设 a、$b\in \mathbf{R}$,若 $a+b>0$ 且 $ab>0$,则 $a>0$ 且 $b>0$"的一个等价命题.

解 ∵ 原命题与其逆否命题是等价的,∴ 只需写出逆否命题. 即设 a、$b\in \mathbf{R}$,若 a、b 中至少有一个不大于 0,则 $a+b\leqslant 0$ 或 $ab\leqslant 0$.

例 2 已知一个命题的否命题是"设 a、b 是整数,如果 a、b 都是偶数,那么 $a+b$ 是偶数",写出原命题、逆命题、逆否命题,并判断真假.

解 原命题:设 a、b 是整数,如果 a、b 不都是偶数,那么 $a+b$ 不是偶数. 此命题为假命题.

逆命题:设 a、b 是整数,如果 $a+b$ 不是偶数,那么 a、b 不都是偶数. 此命题为真命题.

逆否命题:设 a、b 是整数,如果 $a+b$ 是偶数,那么 a、b 都是偶数. 此命题为假命题.

例 3 "$\alpha\neq\beta$"是"$\sin\alpha\neq\sin\beta$"的__________条件(填充分非必要、必要非充分、充要、非充分非必要).

分析 直接寻找不等关系之间的联系较为困难,可利用命题的等价性改求其逆否命题"$\sin\alpha=\sin\beta$"是"$\alpha=\beta$"的__________条件.

解 ∵ "$\sin\alpha=\sin\beta$"是"$\alpha=\beta$"的必要不充分条件,∴ "$\alpha\neq\beta$"是"$\sin\alpha\neq\sin\beta$"的必要不充分条件.

例 4 "$\begin{cases}a>3\\b>3\end{cases}$"是"$\begin{cases}a+b>6\\ab>9\end{cases}$"的__________条件(填充分非必要、必要非充分、充要、非充分非必要).

解 由不等式的性质可知,当 $a>3$ 且 $b>3$ 时,必有 $a+b>6$ 且 $ab>9$,即 $\begin{cases}a>3\\b>3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b>6\\ab>9\end{cases}$ 成立;若 $\begin{cases}a+b>6\\ab>9\end{cases}$ 成立,不妨设 $a=2,b=5$,显然不满足 $\begin{cases}a>3,\\b>3,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a+b>6\\ab>9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>3\\b>3\end{cases}$ 不成立.

故 $\begin{cases}a>3\\b>3\end{cases}$ 是 $\begin{cases}a+b>6\\ab>9\end{cases}$ 的充分非必要条件.

[家教点窍]

1. 命题的四种形式中,原命题与逆否命题、逆命题与否命题互为等价命题,应注意等价性在解题中的应用.

2. 否定一件事时,要注意其全面性. 如两个实数全大于 0 的否定是不全大于 0,而不是全不大于 0.

3. 充分条件与必要条件是相对的,判别依据是推出关系,若"$A\Rightarrow B$",则 A 是 B 的充分条件,或 B 是 A 的必要条件.

4. 证明一个命题正确,可以直接证明,即从已知条件出发,逐步推理得出结论;也可以间接证明,常用的是反证法. 而要确定一个命题是假命题,只需举出一个反例即可. 举反例是一个重要的数学思想.

[强化训练]

1. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，写出命题"若 $a>1$，则 $y=\log_a x$ 是增函数"的逆命题、否命题、逆否命题.

2. 命题"设 a、b、$c\in\mathbf{R}$，若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$"是______命题（填"真"、"假"）；它的逆命题是______，这是______命题.

3. 设甲是乙的充分非必要条件，乙是丙的充要条件，丙是丁的必要非充分条件，那么丁是甲的______条件.

4. 如果 x、$y\in\mathbf{R}$，那么"$xy>0$"是"$|x+y|=|x|+|y|$"的______条件.

5. "$ab<0$"是"方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线"的______条件.

6. 设 a、b 是平面 α 外的任意两条线段，则"a、b 的长相等"是"a、b 在平面内的射影长相等"的______条件.

7. 已知 m、k 为常数，命题甲：a、b、c 成等差数列. 命题乙：$ma+k$、$mb+k$、$mc+k$ 成等差数列. 则甲是乙的______条件.

8. A、B 是三角形的内角，"$A>B$"是"$\sin A>\sin B$"的______条件.

9. 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 互相垂直的充要条件是______.

10. 设 x、$y\in\mathbf{R}$，"$x^2+y^2\neq 0$"是"x、y 不全为零"的______条件.

11. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两正根的充要条件是______；有一正一负根的充要条件是______.

第3讲　函数的概念

[学习要点]

1. 理解函数及其有关的概念，会求函数的定义域和简单函数的值域.

2. 理解函数的概念及对应法则的含义，能根据函数所具有的某些性质或它所满足的一些关系，求出其解析式，并掌握解析式的一些形式的变换.

3. 理解反函数的意义，会求一些函数的反函数，掌握互为反函数的函数图象间的关系.

[典型例题]

例1　求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{\sqrt{3x-x^2}}{|x-1|-1}$；　（2）$y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

解　（1）由 $\begin{cases}3x-x^2\geqslant 0,\\ |x-1|-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3,\\ x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 2,\end{cases}$ $\therefore$ 定义域为 $(0,2)\cup(2,3]$.

（2）由 $\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$ 如图 3－1，

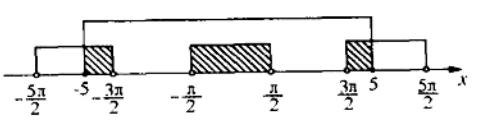

图 3－1

可知所求函数的定义域为$\left[-5,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},5\right]$.

例 2 已知函数$f(x)$的定义域是$[-1,2]$，分别求函数$f\left(\frac{1}{x}\right)$和$f[\log_{\frac{1}{2}}(3-x)]$的定义域.

解 由$-1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant2$，得$x\leqslant-1$或$x\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域为$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

由$-1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqslant2$，得$\frac{1}{4}\leqslant3-x\leqslant2$，即$1\leqslant x\leqslant\frac{11}{4}$，$\therefore f[\log_{\frac{1}{2}}(3-x)]$的定义域为$\left[1,\frac{11}{4}\right]$.

例 3 已知函数$y=\lg(mx^2-4mx+m+3)$的定义域是$\mathbf{R}$，求实数m的取值范围.

解 (1) 显然$m=0$时，函数的定义域为$\mathbf{R}$；

(2) $m\neq0$时，$mx^2-4mx+m+3>0$对一切实数均成立的充要条件是$\begin{cases}m>0,\\\Delta=16m^2-4m(m+3)<0,\end{cases}$解得$0<m<1$.

综合(1)、(2)可知所求实数m的取值范围是$[0,1)$.

例 4 求下列函数的值域：

(1) $y=2-\sqrt{x^2+x+1}$；　(2) $y=\frac{2x}{5x+1}$；　(3) $y=\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$；

(4) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$；　(5) $y=x-\sqrt{1-2x}$.

解 (1)（配方法）$\because x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，$\therefore\sqrt{x^2+x+1}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，$2-\sqrt{x^2+x+1}\leqslant2-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故所求函数的值域是$\left(-\infty,2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

(2) 解法一：分离常数法. $\because y=\frac{2x}{5x+1}=\frac{2}{5}+\frac{-\frac{2}{5}}{5x+1}$，又$\frac{-\frac{2}{5}}{5x+1}$能取得除零以外的一切实数值，$\therefore y\neq\frac{2}{5}$，即所求函数的值域为$\left(-\infty,\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$.

解法二：求反函数法. 由$y=\frac{2x}{5x+1}$可知$x=\frac{y}{2-5y}$，$\therefore$函数$y=\frac{2x}{5x+1}$的反函数是$f^{-1}(x)=\frac{x}{2-5x}$，$\because f^{-1}(x)$的定义域是$x\in\mathbf{R}$且$x\neq\frac{2}{5}$，$\therefore$所求函数的值域为$\left\{y\mid y\in\mathbf{R}\text{ 且 }y\neq\frac{2}{5}\right\}$.

(3) 解法一：利用有界性. 由$y=\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$得$\sin x=\frac{2-2y}{y+1}$，$\because|\sin x|\leqslant1$，$\therefore\left|\frac{2-2y}{y+1}\right|\leqslant1$，解此不等式得$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant3$，故所求函数的值域为$\left[\frac{1}{3},3\right]$.

解法二：数形结合. 如图 3－2 所示，$\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$可看作是定点$(2,2)$与动点$Q(-\sin x,\sin x)$

两点连线的斜率，$\because |\sin x| \leqslant 1$，$\therefore K_{PA}=\frac{1}{3}, K_{PB}=3$，又 $K_{PA} \leqslant K_{PQ} \leqslant K_{PB}$，$\therefore \frac{1}{3} \leqslant K_{PQ} \leqslant 3$，即所求函数的值域为$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

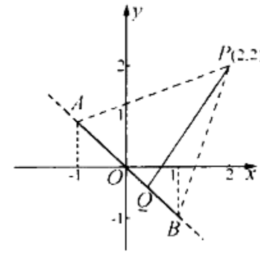

图 3－2

(4) 解法一：不等式法. $y=\frac{1-x+x^{2}}{1+x+x^{2}}=1+\frac{-2x}{x^{2}+x+1}$，

(ⅰ) 当 $x=0$ 时，$y=1$；

(ⅱ) 当 $x \neq 0$ 时，$y=1+\frac{-2}{x+\frac{1}{x}+1}$. $\because x+\frac{1}{x} \in(-\infty,-2] \cup[2,+\infty)$，$\therefore \frac{-2}{x+\frac{1}{x}+1} \in\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup(0,2]$，$\therefore y \in\left[\frac{1}{3}, 1\right) \cup(1,3]$.

综合(ⅰ)、(ⅱ)可知所求值域为$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

解法二：判别式法. 由 $y=\frac{1-x+x^{2}}{1+x+x^{2}}$，得$(y-1)x^{2}+(y+1)x+(y-1)=0$①.

(ⅰ) 当 $y=1$ 时，$x=0$，满足定义域；

(ⅱ) 当 $y \neq 1$ 时，$\because x, y \in \mathbf{R}$，$\therefore$ ①式必有解，即 $\Delta=(y+1)^{2}-4(y-1)^{2} \geqslant 0$，解得$\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3(y \neq 1)$.

综合(ⅰ)、(ⅱ)可知所求函数的值域为$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

(5) 解法一：利用单调性. 易求得 $y=x-\sqrt{1-2x}$的定义域为$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$，$\because y_{1}=x, y_{2}=-\sqrt{1-2x}$在区间$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$上均为单调递增函数，$\therefore y=x-\sqrt{1-2x}$在区间$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$上单调递增，$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 有最大值，且 $y_{\max}=\frac{1}{2}-\sqrt{1-2 \times \frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，故所求函数的值域为$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

解法二：换元法. 令$\sqrt{1-2x}=t$，则 $t \geqslant 0$ 且 $x=\frac{1-t^{2}}{2}$，于是 $y=-\frac{1}{2}(t+1)^{2}+1$，$\because t \geqslant 0$，$\therefore y \leqslant \frac{1}{2}$，故所求函数的值域为$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

例 5 设周长为 $a(a>0)$的等腰三角形，其腰长为 x，底边长为 y，试将 y 表示为 x 的函数，并求这个函数的定义域和值域.

解 $y=a-2x$，由 $y>0$ 得 $x<\frac{a}{2}$，又 $2x>y$，$\therefore 4x>2x+y=a$，解得，$x>\frac{a}{4}$. 故所求定义域为$\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$，值域为$\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

例 6 已知$f(2x-1)=x^{2}$，求$f(x)$、$f[f(x)]$.

解法一 配凑法. $\because f(2x-1)=\frac{1}{4}(2x-1)^2+\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{4}$, $\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ $=\frac{1}{4}(x+1)^2$, $f[f(x)]=\frac{1}{4}[f(x)+1]^2=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(x+1)^2+1\right]^2=\frac{1}{64}(x^2+2x+5)^2$.

解法二 换元法. 令 $2x-1=t$, 则 $x=\frac{t+1}{2}$, 于是 $f(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(t+1)^2$, $\therefore f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$. (下略)

解法三 待定系数法. 由 $f(2x-1)=x^2$ 可知 $f(x)$ 是二次式, $\therefore$ 可设 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, 则 $f(2x-1)=a(2x-1)^2+b(2x-1)+c$, 又 $f(2x-1)=x^2$, 比较系数得 $4a=1$, $2b-4a=0$, $a-b+c=0$, 解得 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$, $\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x+1)^2$. (下略)

例 7 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}^+$, 且满足条件 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \lg x+1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 $\because f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\lg x+1$, $\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\cdot \lg\frac{1}{x}+1=-f(x)\cdot \lg x+1$, 于是 $f(x)=[-f(x)\cdot \lg x+1]\cdot \lg x+1=-f(x)\cdot \lg^2 x+\lg x+1$, 解得 $f(x)=\frac{\lg x+1}{\lg^2 x+1}$.

例 8 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+1\,(x\geqslant 0)$, 求 $f^{-1}(x)$ 的定义域、值域及 $f^{-1}(2)$.

解法一 由 $y=\sqrt{x}+1\,(x\geqslant 0)$ 解得 $x=(y-1)^2\,(y\geqslant 1)$, $\therefore f^{-1}(x)=(x-1)^2\,(x\geqslant 1)$. 故 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[1,+\infty)$, 值域是 $[0,+\infty)$, 且 $f^{-1}(2)=(2-1)^2=1$.

解法二 $\because f(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$, 值域是 $[1,+\infty)$, $\therefore f^{-1}(x)$ 的定义域是 $[1,+\infty)$, 值域是 $[0,+\infty)$.

又由反函数的概念知: 若 $f^{-1}(a)=b$, 则 $f(b)=a$, 反之亦然, 故令 $\sqrt{x}+1=2$, 得 $x=1$, 于是有 $f^{-1}(2)=1$.

例 9 已知函数 $y=ax+3$ 的图象与 $y=2x+b$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 求实数 a、b 的值.

解法一 设 (m,n) 是函数 $y=ax+3$ 图象上的任意一点, $\because$ 点 (n,m) 与点 (m,n) 关于直线 $y=x$ 对称, $\therefore$ 点 (n,m) 在函数 $y=2x+b$ 的图象上, 于是有 $\begin{cases}am+3=n,\\2n+b=m,\end{cases}$ 消去 n 得 $(2a-1)m=-(b+6)$①. 由①式对于任意的 $m\in\mathbf{R}$ 均成立可知 $2a-1=0$ 且 $b+6=0$, 解得 $a=\frac{1}{2}$, $b=-6$.

解法二 显然 $a\neq 0$, $\therefore y=ax+3$ 存在反函数. 当且仅当 $y=ax+3$ 与 $y=2x+b$ 互为反函数时, 它们的图象关于直线 $y=x$ 对称.

由 $y=2x+b$ 的反函数是 $y=\frac{1}{2}x-\frac{b}{2}$ 与 $y=ax+3$ 表示同一函数, 比较系数得 $a=\frac{1}{2}$, $b=-6$.

[家教点窍]

1. 求函数定义域的方法:

（1）给出函数的解析式求定义域时，其定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合.应根据各类函数对定义域的规定，通过解不等式(组)的方法求出其定义域.

（2）对于实际应用问题，还应根据自变量的实际意义确定函数的定义域.

（3）对于复合函数 $y=f[g(x)]$，应先由 $y=f(u)$ 成立的条件确定 u 的取值范围，再由 u 的范围来确定 $u=g(x)$ 中 x 的范围，即为 $y=f[g(x)]$ 的定义域.

（4）对于含有字母参数的函数求定义域，或已知其定义域求字母参数的取值范围时，应注意分类讨论.

2. 函数的值域受其定义域和对应法则的制约. 求函数的值域没有通用方法和固定模式，应随函数式而异，常用的方法有：配方法、反函数法、判别式法、不等式法、换元法、利用函数的有界性、单调性和数形结合等等.

3. 函数的解析式只表示一种对应关系，与所取的字母无关，如 $f(t)=t^2$ 与 $f(x)=x^2$ 是同一个函数. 求函数的解析式的主要方法有：配凑法、换元法和待定系数法. 当已知函数解析式较为简单时，可直接用配凑法；若已知函数的构造时，可用待定系数法；而已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式求 $f(x)$ 时，则多用换元法.

4. 原函数与反函数关系的实质是 x、y 互换的思想. 求 $y=f(x)$ 的反函数的一般步骤是：①由 $y=f(x)$ 的解析式求出 $x=f^{-1}(y)$；②改写，即将 x、y 互换；③注明反函数的定义域（它就是原函数的值域）.

[强化训练]

1. 若函数 $f(x)=a^x+k$ 的图象经过(1,7)点，又其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象经过点(4,0)，则函数 $f(x)$ 的表达式为 4^x+3

2. 求下列函数的反函数：

（1）$y=\sqrt{x^2+x}\ (x\leqslant -1)$；　　（2）$y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ -\sqrt{x} & (0<x\leqslant 1).\end{cases}$

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{\log_{\cos\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{x+3}}$；　　（2）$y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$；

（3）$y=\log_x(2x-1)+(x-3)^0$.

4. 求下列函数的值域：

（1）$y=\log_2(-x^2+4x)$；　　（2）$y=\sin^2x+4\cos x+1$；　　（3）$y=x+\sqrt{1-x^2}$.

5. 函数 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{ax^2+4ax+3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

6. 若函数 $y=x^2-3x-4$ 的定义域是 $[0,m]$，值域为 $\left[-\dfrac{25}{2},-4\right]$，求实数 m 的取值范围.

7. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求函数 $f(x)$ 的解析式.

8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，且 $f(0)\neq 0$，若 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，求 $f(\pi)$ 及 $f(2\pi)$ 的值.

9. 已知函数$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}\left(a\neq\dfrac{1}{2}\right)$,(1) 求其反函数;

(2) 若这个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称,求实数 a 的值.

10. 求函数$f(x)=\lg[ax^2+(a+1)x+1]$(a 为实常数)的定义域.

$a=0$
$a=1$
$a>1$
$0<a<1$
$a<1$

第4讲 函数的性质

[学习要点]

1. 理解奇、偶函数的定义,掌握奇、偶函数图象的对称性,能判断一些简单函数的奇偶性.

2. 理解函数单调性的概念及图象特征,能判断一些简单函数的单调性.

3. 会画各种简单函数的图象,能从数与形的结合上理解并掌握函数的性质,掌握描点法、平移法、对称法等作图的技巧和方法.

4. 掌握数形结合的思想方法,能运用函数的性质解决相关问题.

[典型例题]

例1 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\cos x+\sin x}$;　　(2) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$;

(3) $f(x)=\dfrac{x}{a^x-1}+\dfrac{x}{2}$($a>0$ 且 $a\neq1$);　　(4) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3 & (x<0),\\ -x^2+2x-3 & (x>0).\end{cases}$

解 (1) 由 $1+\cos x+\sin x\neq0$ 知 x 可取$\dfrac{\pi}{2}$,但 $x\neq-\dfrac{\pi}{2}$,因而函数$f(x)$的定义区间关于原点不对称,故函数$f(x)$无奇偶性,即函数$f(x)$是非奇非偶函数.

(2) $\because f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln[(\sqrt{1+x^2})^2-x^2]=\ln1=0$,$\therefore f(x)=-f(-x)$,又 $x\in\mathbf{R}$,故函数$f(x)$是奇函数.

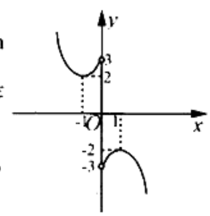

图4-1

(3) 先求定义域,由 $a^x-1\neq0$ 得 $x\neq0$,可知定义区间关于原点对称,又$f(x)-f(-x)=\left(\dfrac{x}{a^x-1}+\dfrac{x}{2}\right)-\left(\dfrac{-x}{a^{-x}-1}+\dfrac{-x}{2}\right)=\dfrac{x}{a^x-1}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x\cdot a^x}{a^x-1}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x(1-a^x)}{a^x-1}+x=0$,故$f(x)$为偶函数.

(4) 作出$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3=(x+1)^2+2(x<0)\\ -x^2+2x-3=-(x-1)^2-2(x>0)\end{cases}$的图象,如图4-1所示.

由图可知函数$f(x)$的图象关于原点对称,故函数$f(x)$是奇函数.

例2 已知$f(x)=(m^2-1)x^2+(m-1)x+n+2$,当实数 m、n 为何值时,$f(x)$是奇函数?

解 由$f(x)=(m^2-1)x^2+(m-1)x+n+2$ 得$f(-x)=(m^2-1)x^2-(m-1)x+n+2$,若$f(x)$为奇函数,则$f(x)+f(-x)=0$,即$2(m^2-1)x^2+2(n+2)=0$ 对任意实数 x 都成立,故有$\begin{cases}m^2-1=0,\\ n+2=0,\end{cases}$解得 $m=\pm1$,且 $n=-2$.

当 $m=-1$ 且 $n=-2$ 时,$f(x)=-2x$ 是奇函数;
当 $m=1$ 且 $n=-2$ 时,$f(x)=0$,它既是奇函数又是偶函数.

例3 判断函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}(a\neq0)$ 在区间 $(-1,1)$ 上的单调性.

解 设 $-1<x_1<x_2<1$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{ax_1}{x_1^2-1}-\dfrac{ax_2}{x_2^2-1}=\dfrac{a(x_1x_2+1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$,由 $-1<x_1<x_2<1$ 可知 $\dfrac{(x_1x_2+1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}>0$,$\therefore a>0$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上递减;$a<0$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上递增.

同理可得 $(1,+\infty)$ 是单调递增区间.

例4 求函数 $f(x)=(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 的单调区间.

解 第一步:求复合函数的定义域.$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

第二步:分解复合过程.$f(x)$ 由 $y=u^2+u+1$ 及 $u=\log_{\frac{1}{2}}x$ 复合而成.

第三步:判断内外层函数的单调性.$u=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数;$y=u^2+u+1$ 在 $u\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ 上递减,在 $u\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上递增.

第四步:将中间变量 u 的变化范围转化成自变量 x 的变化范围.$u\leqslant-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\geqslant\sqrt{2}$;$u\geqslant-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow0<x\leqslant\sqrt{2}$.

第五步:判断复合函数的单调性,列表如下:

函数	单调性	
	$(0,\sqrt{2}]$	$[\sqrt{2},+\infty)$
$u=\log_{\frac{1}{2}}x$	↘	↘
$y=u^2+u+1$	↗	↘
$f(x)$	↘	↗

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2}]$ 上是减函数,在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上是增函数.故单调增区间为 $[\sqrt{2},+\infty)$,单调减区间为 $(0,\sqrt{2}]$.

例5 设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+4^x\cdot a}{3}$,其中 $a\in\mathbf{R}$,如果当 $x\in(-\infty,1]$ 时,$f(x)$ 有意义,求实数 a 的取值范围.

解 由题意知 $1+2^x+4^x\cdot a>0$,$x\in(-\infty,1]$,即 $a>-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$,$x\in(-\infty,1]$ ①.$\because -\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ 与 $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty,1]$ 上都是增函数,$\therefore -\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty,1]$ 上也是增函数,且在 $x=1$ 时有最大值 $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{4}$.因此由①式可知 $a>-\dfrac{3}{4}$.故所求实数 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

例 6 已知函数$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的奇函数,它在区间$[0,1)$上单调递减,且$f(1-a)+f(1-a^2)<0$,求实数a的取值范围.

解 $\because f(x)$的定义域是$(-1,1)$,$\therefore \begin{cases}-1<1-a<1,\\ -1<1-a^2<1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}0<a<2,\\ -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}\text{且 }a\neq 0,\end{cases}$ $\therefore a$的取值范围是$(0,\sqrt{2})$①. 又$\because f(x)$是奇函数,且$f(1-a)+f(1-a^2)<0$,$\therefore f(1-a)<-f(1-a^2)=f(a^2-1)$②.

由奇函数$f(x)$在$[0,1)$上单调递减,可知$f(x)$在$(-1,0]$上也单调递减,即$f(x)$在定义域$(-1,1)$上单调递减. 由②式可得$1-a>a^2-1$,即$a^2+a-2<0$,解得$-2<a<1$,与①式取交集得$0<a<1$,故所求实数a的取值范围是$(0,1)$.

例 7 如果关于x的方程$\sqrt{1-x^2}=a+x$有两个相异实根,求实数a的取值范围.

分析 若两边平方将原方程化为$2x^2+2ax+a^2-1=0$,用代数方法来讨论方程的实数解的情况,较为麻烦,不如利用函数图象来讨论交点的个数.

解 此命题等价于:当曲线$C:y=\sqrt{1-x^2}$与直线$l:y=x+a$有两个交点时,求实数a的取值范围.

曲线C是半圆$x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$,直线l是斜率为1的直线系,如图4-2所示.

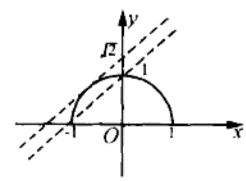

图4-2

由图可知:当$a=\sqrt{2}$时,l与C相切;当$a=1$时,l与C相交于$(-1,0)$和$(0,1)$两点;当且仅当$1\leqslant a<\sqrt{2}$时,l与C相交于两点,从而方程$\sqrt{1-x^2}=x+a$有两个相异实根.

故所求实数a的取值范围是$[1,\sqrt{2})$.

[家教点窍]

1. 判断函数的奇偶性,必须先考虑定义域是否关于原点对称. 若函数的定义区间关于原点不对称,则函数在该区间无奇偶性可言.

2. 奇、偶函数的定义是判断奇偶性的依据,也可保持定义域不变将函数式化简、变形后再判断,常用的等价形式有:$f(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1\,(f(x)\neq 0)$;$f(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f(-x)}{f(x)}=1\,(f(x)\neq 0)$. 有时也可直接利用图象判断函数的奇偶性:奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于y轴对称,反之亦真.

3. 讨论函数的单调性必须在定义域内进行,即函数的单调区间是其定义域的子集,因此讨论函数的单调性,必须先确定函数的定义域.

4. 根据定义证明或判断函数单调性的一般步骤是:①设x_1、x_2是给定区间内任意的两个值,且$x_1<x_2$;②作差$f(x_1)-f(x_2)$,并将差式变形;③判断$f(x_1)-f(x_2)$的正负,用定义确定其单调性.

5. 判断复合函数$y=f[g(x)]$的单调性的法则是:用换元思想将$g(x)$看作函数u,即$u=g(x)$. 若$u=g(x)$在区间**M**上单调,且当$x\in \mathbf{M}$时,$u\in \mathbf{N}$,那么当$y=f(u)$在**N**上与$u=$