解析几何

上册

緒　　言

'几何，是数学的一个重要分科，在数学的分科里，除了研究圖形性質的几何以外，还有研究数量关系的代数和分析兩个重要分科。

在几何学里，对於同一研究对象，研究方法可以是不同的，可以采用所謂綜合方法，也可以采用解析方法。綜合方法一般是就几何圖形直接來研究它的性質的一种方法；而解析方法則与綜合方法不同，它是通过所謂座标法間接來研究几何圖形性質的。座标法的基本观念，在於用数表示点，用变数表示动点，把几何圖形看作点的集合或軌跡。这样就有可能用函数或方程式來表示几何圖形，然后再从函数关系的几何意义推出关於圖形的几何結論。

綜合方法与解析方法都有它自己的特点。譬如，綜合方法可以就圖形的巧妙变化，非常直觀地，簡潔地推出几何結論，或者進一步發見其它新的几何性質。但是綜合方法只能局限於研究比較簡單的几何圖形，如直線、圓以及它們合成的圖形等。对於稍复雜的曲線，則力所不及，特别是在使用綜合方法解决問題时，很难發見問題的推理过程。解析方法与此相反，由於它可以藉助於代数或分析的运算威力从表示圖形的函数的函数关系推出几何概念，所以它可以解决关於复雜的曲線的問題，特别是便於研究关於多維空的几何概念，此外，用解析方法研究問題时，根据运算关系容易找到解决問題的推理步驟。但是，比較繁瑣的运算过程是解析方法的一个必然的难点。

如果根据研究方法的不同，來区分各种几何，那么，基於綜合方法的几何可以叫做綜合几何，基於解析方法的几何則可以叫做解析几何。

初等几何屬於前一种，將要学習的解析几何屬於后一种，因为它只应用到代数，所以是最簡單的，屬於后一种的还有应用分析的微分几何等等。

解析几何是与十七世紀法國偉大数学家、哲学家笛卡兒的名字分不开的。因为作为解析方法的基礎：座标法是笛卡兒首先發見的。从座标法發現以后，解析方法不但成为研究几何的有力工具，而且，打破了十七世紀以前形与数彼此孤立，發展迟緩的数学特点，使研究圖形性質的数学；几何与研究数量关系的数字；代数之間建立了密切的連系，特別是由於笛卡兒在数学里引進变量，因而促進了微積分的發現以至於整个数字的發展。造成近世数学几何、代数、分析密切关联相互为用的特点。

解析几何廣泛地应用於其它有关科学領域；例如，最近的解析几何一般是从物理概念与几何圖形的共同特点所抽象出來的向量概念作为工具，因此，它很便於应用在物理、理論力学，应用力学以及其它各种几何学的研究上。

在初等几何里，有些比較难解的問題，例如，軌跡問題、共点線与共線点問題、作圖問題以及关於作圖不能問題的理論等，采用解析几何的方法，都可以得到解决。这些問題隨着讀者对解析几何的学習与進一步的研究，是都会碰到的。因此，解析几何这一学科很有助於数学教师对初等几何問題从較高观点來理解与解决。因而对初等几何的教学將会起很大的輔助作用。

关於解析几何內容的編排順序和方法，可以有各种不同。但是我們主要依据部定教学大綱的要求，采用直角座标系，並且应用了簡單的向量概念。我想这样作，不但可以使解析几何易於理解，而且也可以使它便於应用到其它有关科学領域里。

解析几何目录

第一編　平面解析几何学 …………………………… 1

第一章　直線上与平面上点的座标 ……………………… 1

§1．有向綫段 …………………………………………… 1

§2．直綫上点的座标 …………………………………… 4

§3．平面上点的笛卡兒直角座标 ……………………… 6

§4．平面上点的極座标 ………………………………… 9

§5．直角座标与極座标的变換 ………………………… 11

第二章　向量的座标与基本問題 ………………………… 15

§6．向量 ………………………………………………… 15

§7．向量在軸上的射影 ………………………………… 16

§8．直綫上向量的座标 ………………………………… 18

§9．平面上向量的座标 ………………………………… 21

§10．向量的幅角 ………………………………………… 23

§11．兩点間的距离 ……………………………………… 25

§12．分綫段为已知比 …………………………………… 26

§13．兩个向量間的角 …………………………………… 31

§14．兩个向量共綫与垂直的条件 ……………………… 35

§15．三角形的面积 ……………………………………… 37

§ 16. 向量在軸上射影值的座标表示……………………………………39

第三章　曲綫方程式 ……………………………………………………43

§ 17. 方程式确定的曲綫……………………………………………………43

§ 18. 曲綫的方程式…………………………………………………………47

§ 19. 曲綫的極座标方程式………………………………………………50

§ 20. 曲綫的参数方程式

第四章　座标变换 ………………………………………………………57

§ 21. 軸的平移……………………………………………………………57

§ 22. 軸的旋轉……………………………………………………………59

§ 23. 直角座标的一般变换………………………………………………61

§ 24. 曲綫的分类…………………………………………………………64

§ 25. 兩个曲綫的交点……………………………………………………67

§ 26. 代数曲綫的次数的几何意义………………………………………69

第五章　一次曲綫 ………………………………………………………73

§ 27. 直綫的一般方程式…………………………………………………73

§ 28. 直綫的一般方程式的特殊情况……………………………………76

§ 29. 直綫的截距式方程式………………………………………………78

§ 30. 直綫的标准方程式…………………………………………………81

§ 31. 直綫的兩点式方程式与参数方程式………………………………83

§ 32. 直綫的斜率式方程式 …………………………………………………86

§33. 兩条直綫的夾角……………………………………89
§34. 兩条直綫的相互位置……………………………………94
§35. 直綫束的方程式……………………………………95
§36. 直綫的法綫式方程式…………………………………… 100
§37. 点与直綫間的距离…………………………………… 102
§38. 直綫的極座标方程式…………………………………… 106

第六章　二次曲綫 ……………………………………110

§39. 橢圓和它的标准方程式…………………………………… 110
§40. 橢圓的形狀…………………………………… 115
§41. 橢圓的焦点半徑、离心率和准綫…………………………………… 119
§42. 双曲綫和它的标准方程式…………………………………… 126
§43. 双曲綫的形狀…………………………………… 131
§44. 等边双曲綫关于漸近綫的方程式…………………………………… 138
§45. 双曲綫的焦点半徑离心率和准綫…………………………………… 140
§46. 抛物綫和它的标准方程式…………………………………… 147
§47. 抛物綫的形狀…………………………………… 150
§48. 二次三項式…………………………………… 154
§49. 橢圓、双曲綫和抛物綫的参数方程式…………………………………… 158
§50. 橢圓双曲綫和抛物綫的極座标方程式…………………………………… 162
§51. 橢圓、双曲綫和抛物綫的共同方程式…………………………………… 166
§52. 橢圓、双曲綫和抛物綫是圓錐截綫…………………………………… 169

第七章　圓錐截綫的直徑和切綫 ………………………… 175

§ 53. 橢圓和双曲綫的直徑………………………………… 175

§ 54. 橢圓和双曲綫的共軛直徑…………………………… 180

§ 55. 拋物綫的直徑………………………………………… 182

§ 56. 橢圓与双曲綫的切綫和法綫………………………… 185

§ 57. 拋物綫的切綫和法綫………………………………… 187

§ 58. 圓錐截綫的光学性質………………………………… 190

第八章　二次曲綫一般方程式的研究 …………………… 197

§ 59. 圓的一般方程式……………………………………… 197

§ 60. 二次曲綫的中心……………………………………… 199

§ 61. 有心二次曲綫方程式的最簡式……………………… 204

§ 62. 有心二次曲綫的标准方程式………………………… 208

§ 63. 無心二次曲綫方程式的最簡式……………………… 212

§ 64. 無心二次曲綫的标准方程式………………………… 215

§ 65. 二次曲綫方程式的基本不变量……………………… 223

§ 66. 二次曲綫最簡式利用不变量的确定法……………… 227

§ 67. 二次曲綫标准方程式利用不变量的确定法………… 230

第九章　移动与相似变換 ………………………………… 236

§ 68. 移动…………………………………………………… 236

§ 69. 移动的特殊情形……………………………………… 239

§ 70. 相似变换…………………………………………………… 241
§ 71. 相似变换的特殊情形……………………………………… 244
§ 72. 相似圓錐曲綫…………………………………………………… 246

解析幾何学

一九五六—五七学年第一学期

数学系一年用

孙禹元　編

第一編　平面解析几何学

第一章　直線上与平面上点的座标

§1. 有向線段

1. 在初等几何里，我們已經知道：任意一条直線上兩个点間的一部分，叫做以这兩个点为界的線段，这兩个点叫做線段的端点。

線段的長度，是几何学里重要概念之一。我們已知所謂線段的長度，是任意选取一个确定的線段作为測量長度的單位，用它來測量已知線段所得到的倍数。因此，線段的長度是一个正数，但它可能是整数或分数，也可能是無理数。

根据几何学里線段測量的理論，当选定一个測量長度的單位線段以后，这时直線上每个線段便对应一个确定的正数，也就是它的長度。反之，如果已知一个正数，則在直線上可以測得一个線段使它的長度等於已知的正数。

2. 但是在解析几何里，經常用到的不是普通的直線与普通的線段，而是所謂有向直線与有向線段。

任意一条直線，都可以看作它有兩个相反的方向，我們可以指定其中一个作为直線的正向（因而另一个就叫做它的負向），指定了正向的直線叫做有向直線，有向直線也叫做軸。在圖里，有向直線的正向用箭头表示，圖1里的直線u就是一条有向直線。

如果把軸上線段的一个端点看作是線段的始点，另一个端点看作是它的終点，那么这个線段就叫做有向線段。由始点到終点的方向，叫做有向線段的方向。顯然，軸上有向線段的方向，可能与軸的正向相同；也可能与軸的正向相反。

有向線段的端点，常用大楷拉丁字母例如A，B来表示。一个有向線段常用表示它端点的兩个字母並且上面画一横線来表示，这时表示始点的字母寫在前面，因此$\overline{AB}$表示以A为始点B为終点的有向線段，而$\overline{BA}$則表示以B为始点A为終点的有向線段。这兩个線段是不同的，因为它們的方向不同。

始点与終点重合的線段，叫做零線段。零線段的方向不定，但是为了普遍起見，我們可以約定把这样的線段也叫做有向線段。

圖 1

3．設$\overline{AB}$是軸u上的任意一个有向線段，以A，B为端点的普通線段的長度也叫作有向線段$\overline{AB}$的長度。因此有向線段的長度是一个正数。

对於軸u上的有向線段$\overline{AB}$，当$\overline{AB}$的方向与軸u的正向相同时，將它的長度附以《+》号；当$\overline{AB}$的方向与軸u的正向相反时，將它的

長度附以≪－≫号，这时所得到的数叫做有向線段$\overline{AB}$的代数值。我們規定有向線段的代数值用記号AB表示（不帶横線）。

有向線段的代数值和它的長度是有区别的，有向線段的代数值是有符号的数（是正数或負数，零線段的代数值等於零）。而它的長度顯然是代数值的絕对值（也叫做模）。因此类似代数学中表示絕对值的方法，我們用記号｜AB｜表示有向線段$\overline{AB}$的長度。很明顯，有向線段$\overline{AB}$的長度｜AB｜和有向線段$\overline{BA}$的長度｜BA｜是同一个数，但是它們的代数值AB和BA却是符号不同的数，由此得到下面的結論：

对於一个軸上的任意兩点A和B，有向線段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$的代数值之間有下列关系；

$$AB=-BA. \qquad (1)$$

例如圖1表示一个軸u和它上面的四个点A，B，C，綫段EF是測量長度的單位。設点A和B間的距离等於4，点B和C間的距离等於3。从A到B的方向与軸u的正向相同，从B到C的方向与軸M的正向相反，在这种情形下：

$$|AB|=4, \quad |BC|=3.$$

$$AB=4, \qquad BC=-3.$$

4．現在研究一个軸上的三个点。可从証明下面的事实。

定理1．对於一个軸上任意排列的三个点，在有向線段$\overline{AB}$ $\overline{BC}$和$\overline{AC}$的代数值間，有下列关系：

$$AC=AB+BC \qquad (2)$$

証明．对於軸上的三个点A，B，C，只有六种排列方法，其中有向線段$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的方向，不是相同，就是相反（圖1）。

在有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 方向相同的情形下，有向線段 $\overline{AC}$ 的長度等於 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的長度的和，並且方向也与它們相同，这时三个代数值AB，BC 与 AC 的符号相同，根据代数的加法法則，則代数值 AC 等於 AB 与 BC 的和。也就是等式 (2) 成立。

在有向線段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 方相相反的情形下，有向線段 $\overline{AC}$ 的長度等於 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的長度的差，並且方向与其中較大的一个相同，这时代数值 AB 与 BC 的符号相異，而代数值 AC 的絕对值等於 AB 的絕对值与 BC 的絕对值的差，並且符号与其中絕对值較大的一个相同。因此，正負数的加法法則，則代数值 AC 等於AB与BC的和，也就是等式 (2) 成立。因此，定理得到証明。

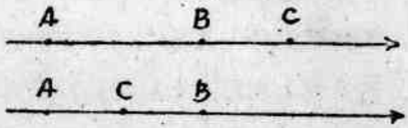

圖 2

如果將定理，应用到圖 1 里的具体情形，則:

$$AC=AB+BC=4+(-3)=1.$$

等式 (2) 叫做沙尔 (Nchasles) 公式①，它是解析几何的公式中最重要的一个。

§ 2. 直線上点的座标

5. 在解析几何里是用数决定点的位置，这一節我們研究一种比較簡單而且常用的，用数决定直線上点的位置的方法。

---

① 一般的沙尔公式: $A_1A_n=A_1A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n$ 用数学归納法可以証明。

設已知任意一条直線，用字母 u 表示它，並且指定直線 u 的正向，这时直線 u 就成为一个軸。然后在軸 u 上任意指定一个点，用字母O表示它。此外再选取一个線段作为測量長度的單位。

如果已知直線 u 上的一个点M，则有向線段$\overline{OM}$的代数值

$$x = OM$$

完全确定。因此，点M按公式（1）对应唯一实数 x 。数 x 的絕对值是有向線段$\overline{OM}$的長度，而符号由有向線段$\overline{OM}$的方向确定，如果有向線段$\overline{OM}$的方向与軸的正向相同，则是正的；如果有向線段$\overline{OM}$的方向与軸的正向相反，则是負的；如果点M与点O重合，則数 x 等於零。

反之，如果已知一个实数 x ，則按上面等式数 x 对应直線 u 上的唯一点M。有向線段$\overline{OM}$的長度等於数 x 的絕对値，它的方向由数 x 的符号确定。如果 x 是正数，則方向与軸 u 的正向相同；如果 x 是負数，則方向与軸 u 的正向相反；如果 x 等於零，則点M与点O重合。

因此，直線 u 上的所有点与实数全体間成一一对应。

作成点与数間的这种对应，叫做在直線上導入座标系。直線 u 上点M所对应的数 x ，叫做点M的座标。直線 u 叫做座标軸。点O叫做座标原点。这样，軸上的座标系就由座标原点与測度單位完全确定。

設直線 u 在水平位置，並且它的正向指向右方，这时在直線 u 上導入座标系，則它上面的点的位置与点的座标符号間的关系可以叙述如下：

座标是正数的点，在座标原点的右方；座标是負数的点，在座标原点的左方。

任意点M的座标，常用 x 表示，並且寫成这样：M（x）。

6．如果在軸上導入座标系，則这个軸上的每个点M，有一个完全确定的座标；反之，对於每个实数x，則在軸上可以求得一个确定的点M，它的座标是x。此时，軸上的几何概念就可以用算術关系式表示；反之，对算術关系式也可以給与某种几何意义，換句話說，也就是可以用几何術語表明。例如，軸上的点$M_1(x_1)$在$M_2(x_2)$的左方，这时就可以用算術关系式：$x_1<x_2$表示；反之，不等式：$1<x<4$的所有解，可以看作是軸上兩个点$N_1(1)$和$N_2(4)$之間的所有点，或者說，不等式$1<x<4$确定以点$N_1(1)$和$N_2(4)$为界的区間（圖3）。

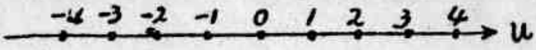

圖　3

类似以上所述，用算術关系式表示几何概念，就是解析几何的基本方法，並且在其他有关学科里也是要經常用到的。

§3．平面上点的笛卡兒直角座标

7．在前一節里，我們已經知道用数可以确定直線上点的位置。同样，用数也可以确定平面上点的位置。用数确定平面上的点的方法是很多的。在这一節里，我們首先研究比較簡單而且常用的一种方法，这就是所謂笛卡兒座标法。

首先在平面上取任意兩个互相垂直的軸，用字母O表示它們的交点，用Ox表示第一个軸，Oy，表示第二个軸。在圖里，將字母x，y寫在对应軸的近傍，並且在从点O起的正向上（圖4）。

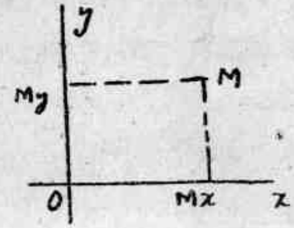

圖　4

其次取一个線段作为測量長度的單位，以O为共同座标原点，在軸Ox和軸Oy上導入座标系。

設M是平面上任意一点，过点M作直線Ox与Oy的平行線，用M_x和M_y分别表示点M在直線Ox和Oy上的平行射影，設x是点M_x在上述直線Ox上的座标系里的座标；y是点M_y在直線Oy上的座标系里的座标，根据直線上点的座标定义（§.2），則：

$$x = OM_x, \qquad y = OM_y \tag{1}$$

这里OM_x是直線OX上有向線段$\overline{OM_x}$的代数值；OM_y是直線Oy上有向線段$\overline{OM_y}$的代数值。由此可知，对於平面上一个确定点M，直線Ox上的点M_x与直線OY上的点M_y完全确定，因而数x和y也完全确定。

反之，如果已知一对实数x，y，則在直線Ox上以x为座标的点M_x与在直線Oy上以y为座标的点M_y完全确定，过点M_x引直線Oy的平行線，过点M_y引直線Ox的平行線，則这兩条直線相交确定唯一交点M。由此可知，一对实数x，y在平面上确定唯一点M。

由此，平面上的所有点与全体实数对間成一一对应。

作成点与数对間的这种对应，叫做在平面上導入座标系（笛卡兒直角座标系①）。平面上点M所对应的数对x，y，叫做点M的座标（笛卡兒直角座标）。数x叫做点M的横座标；数y叫做点M的縱座标。軸Ox与Oy叫做座标軸，軸Ox叫做横軸軸Oy；叫做縱軸。点O叫做座标原点。这样，平面上的笛卡兒直角座标系，就由有順序的兩个座标軸与一个測度單位完全确定。

---

① 如果所取的兩个軸，不互相垂直而是交成任意角，則叫做笛卡兒斜座标系。

任意点M的座标，常用x，y表示，並且寫成这样：M(x,y)。

8．兩个座标軸同时。將平面分为四部分，这四部分叫做四个象限。在軸 Ox 正向和軸 Oy 正向的一部分，叫做第一象限；在軸 Ox 負向和軸 Oy 正向的一部分，叫做第二象限；在軸 Ox 負向和軸 Oy 負向的一部分，叫做第三象限；在軸 Ox 正向和軸 Oy 負向的一部分，叫做第四象限（圖5）。

設点M在第一，四象限，这时，有向線段$\overline{OM_x}$的方向与軸 Ox 的正向相同，所以点M的横座标x是正数。如果点M在第二、三象限，則有向線段$\overline{OM_x}$的方向与軸 Ox 的正向相反，所以点M的横座标x是負数。当点M在軸 Oy 上时，点 M_x 与座标原点O重合，則点M的横座标x是零。

因此，在第一，四象限每个点的横座标都是正数，在第二、三象限每个点的横座标都是負数，軸 Oy 上每个点的横座标都是零。

同样，可以断定，在第一、二象限每个点的縱座标都是正数，在第三、四象限每个点的縱座标都是負数，軸 Ox 上每个点的縱座标都是零。

最后，因为座标原点是兩个座标軸的交点，所以它的兩个座标都是零。

根据以上所述，則点M所在的象限与它座标，x，y值的符号間有下列关系：

象限 / 座标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
横座标 x	+	−	−	+
縱座标 y	+	+	−	−

应該注意，我們常使用的座标系，是假定当横軸正半軸从較近的一

方与縱軸正半軸重合时，必須按反时針方向旋轉，这样的座标系叫做右旋座标系（圖5）；然而有的座标系，当横軸正半軸从較近的一方与縱軸正半軸重合时，是順时針旋轉的，这样的座标系叫做左旋座标系（圖6）。

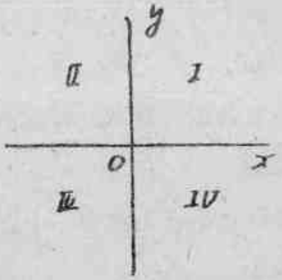

圖 5

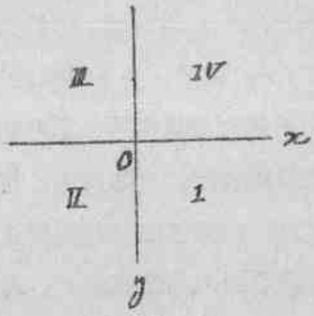

圖 6

在本書中，主要使用右旋座标系。

9．在平面上導入座标系以后，我們就可以用数来表示几何概念．例如，根据座标的定义，則容易断定下面的事实：如果点M（x，y）是平面上的某个点，則点N（x，－y）是点M关於軸 Ox 的对称点；点P（－x，y）是点M关於軸 Oy 的对称点；点Q（－x，－y）是点M关於座标原点的对称点。

§4．平面上点的極座标

10．除笛卡兒座标系以外，还有其他座标系。虽然，笛卡兒直角座标系是最常用的一种，但是，当研究某些特殊問題时，使用另一种座标系却更为方便。因此在这一節我們再介紹一种座标系。

在平面上取一条射線 OP，与一个測量長度的單位，此外我們規定