张景中 / 主编

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

直来直去的微积分

拉格朗日试图不用极限或无穷小等概念
来建立微积分学而未能成功.
其名著《解析函数论》的副标题“不用无穷小,
或正在消失的量或极限与流数等概念,
而归结为有限的代数分析的艺术”描绘出他的梦.
本书中拉格朗日之梦终于成为现实,
但思路之平凡简单可能出乎其预料.

张景中 / 著

科学出版社
www.sciencep.com

“十一五”国家重点图书出版规划项目

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

直来直去的微积分

张景中 / 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从常识性的平凡道理出发，不用极限概念也不用无穷小概念，直截了当地定义了函数的导数，证明了导数的常用性质；定义了定积分，推出了微积分基本定理. 严谨而不失直观的推理，颠覆了微积分必须以极限概念为基础的传统观点. 全书共18章，前10章用作者发现的新方法构建了一元微积分的逻辑框架；后8章阐述新方法与传统体系的关系和接轨的方案，以及一些重要的微积分知识. 本书化解了传统微积分教学的若干最大难点，为建立高中和大学的微积分新体系描绘了蓝图.

本书可供中学和大学的数学教师、需要学习高等数学的大学生、数学爱好者、数学研究者，以及数学教育的研究者参考.

图书在版编目(CIP)数据

直来直去的微积分/张景中著. —北京：科学出版社，2010
(走进教育数学/张景中主编)
ISBN 978-7-03-027363-5

Ⅰ.①直… Ⅱ.①张… Ⅲ.①微积分－普及读物 Ⅳ.①O172-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第076135号

丛书策划：李 敏
责任编辑：李 敏／责任校对：李奕萱
责任印制：钱玉芬／整体设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年5月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2010年5月第一次印刷 印张：17 1/2 插页：2
印数：1—6 000 字数：330 000

定价：38.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《走进教育数学》丛书编委会

总 序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学？”

“教育数学和数学教育有何不同？”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务.

把学数学比作吃核桃. 核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它. 有些核桃，外壳与核仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到. 数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃. 教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味，更营养，更容易砸开吃净.

“教育数学”的提法，最早出现在笔者1989年所写的《从数学教育到教育数学》中. 其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》、柯西写《分析教程》，都是教育数学的经典之作.

数学教育有很多世界公认的难点，如初等数学里的几何和三角，高等数学里面的微积分，都比较难学. 为了对付这些难点，

很多数学老师、数学教育专家前赴后继，做了大量的研究，写了很多的著作，进行了广泛的教学实践．多年实践，几番改革，还是觉得太难，不得不“忍痛割爱”，少学或者不学．教育数学则从另一个角度看问题：这些难点的产生，是不是因为前人留下来的知识组织得不够好，不适于数学的教与学？能不能优化数学，改良数学，让数学知识变得更容易学习呢？

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系．英语中 12 个月的名字：January，February，…….背单词要花点工夫吧！如果改良一下：一月就叫 Monthone，二月就叫 Monthtwo，等等，马上就能理解，就能记住，学起来就容易多了．生活的语言如此，科学的语言——数学——何尝不是这样呢？

很多人认为，现在小学、中学到大学里所学的数学，从算术、几何、代数、三角到微积分，都是几百年前甚至几千年前创造出来的．这些数学的最基本的部分，普遍认为是经过千锤百炼，相当成熟了．对于这样的数学内容，除了选择取舍，除了教学法的加工之外，还有优化改革的余地吗？

但事情还可以换个角度看．这些进入了课堂的数学，是在不同的年代，不同的地方，由不同的人，为不同的目的而创造出来的，而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的．难道它们会自然而然地配合默契，适宜于教学和学习吗？

看来，这主要不是一个理论问题，而是一个实践问题．

走进教育数学，看看教育数学在做什么，有助于回答这类问题．

随便翻翻这几本书，就能了解教育数学领域里近 20 年来做了哪些工作．从已有的结果看到，教育数学有事可做，而且能做更多的事情．

比如微积分教学的改革，这是在世界范围内被广为关注的事．丛书中有两本专讲微积分，主要还不是讲教学方法，而是讲改革微积分本身．

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分，是第一代的微积分．这是

说不清楚的微积分．创建者说不清楚，使用微积分解决问题的数学家也说不清楚．原理虽然说不清楚，应用仍然在蓬勃发展．微积分在说不清楚的情形下发展了130多年．

柯西和魏尔斯特拉斯等建立了严谨的极限理论，巩固了微积分的基础，形成了第二代的微积分．数学家把微积分说清楚了．但是由于概念和推理烦琐迂回，对于绝大多数学习高等数学的人来说，是听不明白的微积分．微积分在多数学习者听不明白的情形下，又发展了170多年，直到今天．

第三代的微积分，是正在创建发展的新一代的微积分．人们希望微积分不但严谨，而且直观易懂，简易明快．让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理，不但知其然而且知其所以然．不但数学家说得清楚，而且非数学专业的多数学子也能听得明白．

第一代微积分和第二代微积分，在具体计算方法上基本相同；不同的是对原理的说明，前者说不清楚，后者说清楚了．

第三代微积分和前两代微积分，在具体计算方法上也没有不同；不同的仍是对原理的说明．

几十年来，国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践．这方面的努力，已经有了显著的成效．在我国，林群院士近10年来在此方向做了大量的工作．本丛书中的《微积分快餐》，就是他在此领域的代表作．

古今中外，通俗地介绍微积分的读物极多，但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有．《微积分快餐》做到了．一张图，一个不等式，几行文字，浓缩了微积分的精华．作者将微积分讲得轻松活泼、简单明了，而且严谨自封，让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂．

丛书中还有一本《直来直去的微积分》，是笔者学习微积分的心得．书中从“瞬时速度有时比平均速度大，有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发，不用极限概念和实数理论，“微分不微，积分不积”，直截了当地建立了微积分基础理论．书中概念

与《微积分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩.

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功. 我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的.

前辈泰斗是我们的先驱. 教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望.

两本关于微积分的书，都专注于基本思想和基本概念的变革. 基本思想、基本概念，以及在此基础上建立的基本定理和公式，是这门数学的筋骨. 数学不能只有筋骨，还要有血有肉. 中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》，是有血有肉、丰满生动的教育数学. 书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事，而作者却能推陈出新，用新的视角和方法处理老问题，找出事物之间的联系，发现不同中的相同，揭示隐藏的规律. 幽默的场景，诙谐的语言，使人在轻松阅读中领略神韵，识破玄机. 看看这些标题，“简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”，可见作者的功力非同一般！特别值得一提的是，书中对微积分的精辟见解，如用代数观点演绎无穷小等，适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习，望读者留意体味.

练武功的上乘境界是“无招胜有招”，但武功仍要从一招一式入门. 解数学题也是如此. 著名数学家和数学教育家项武义先生说，教数学要教给学生“大巧”，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”. 我想所谓“无招胜有招”的境界，就是“大巧”吧！但是，小巧固不足取，大巧也确实太难. 对于大多数学子，还要重视有章可循的招式，由小到大，以小御大，小题做大，小中见

大．朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》，踏踏实实地从一招一式一题一法着手，探秘发微，系统地阐述数学解题法门，是引领读者登堂入室之作．作者是数学奥林匹克领域的专家．数学奥林匹克讲究题目出新，不落老套．我看了这本书里的不少例题，看不出有哪些似曾相识，真不知道他是从哪里搜罗来的！

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》．竞赛数学当然就是奥林匹克数学．华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分．这个看法是言之成理的．数学要解题，要发现问题、创造方法．年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态．早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题．竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑．

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话．有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒．我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧．再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训．就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动．这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五．从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可．对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流．发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训

活动过热的问题自然就化解或缓解了.

回到前面的话题. 上面说到"大巧"和"小巧", 自然想到还有"中巧". 大巧法无定法, 小巧一题一法. 中巧呢, 则希望用一个方法解出一类题目. 也就是说, 把数学问题分门别类, 一类一类地寻求可以机械执行的方法, 即算法. 中国古代的《九章算术》, 就贯穿了分类解题寻求算法的思想. 中小学里学习四则算术、代数方程, 大学里学习求导数, 学的多是机械的算法. 但是, 自古以来几何命题的证明却千变万化, 法无定法. 为了找寻几何证题的一般规律, 从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特, 前赴后继, 孜孜以求. 我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出, 希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人. 在《几何基础》这部名著中, 希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题, 给出了机械化的判定算法. 由于受时代的局限性, 希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知. 直到 1977 年, 吴文俊先生提出了一个新的方法, 可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假. 这一成果在国际上被称为"吴方法", 它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮, 使这个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分.

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法, 都不能给出人们易于检验和理解的证明, 即所谓可读证明. 国内外的专家一度认为, 机器证明的本质在于"用量的复杂克服质的困难", 所以不可能机械地产生可读证明.

笔者基于 1974 年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得, 总结出用面积关系解题的规律. 在这些规律的基础上, 1992 年提出消点算法, 和周咸青、高小山两位教授合作, 创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法, 并在计算机上实现. 最近在网上看到, 面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了. 本丛书中的《几何新方法和新体系》, 包括了面积消点法的通俗阐述, 以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统, 由冷拓同志协助笔者整理而成. 教育数学研究的副产

品解决了机器证明领域中的难题，对笔者而言实属侥幸.

基于对数学教育的兴趣，笔者从 1974 年以来，在 30 多年间持续地探讨面积解题的规律，想把几何变容易一些. 后来发现，国内外的中学数学教材里，已经把几何证明删得差不多了. 于是"迷途知返"，把三角作为研究的重点. 数学教材无论如何改革，三角总是删不掉的吧. 本丛书中的《一线串通的初等数学》，讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角，从三角的发展引出代数工具并探索几何，把三者串在一起的思路.

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量. 其实，向量早已下放到中学，与传统的初等数学为伍了. 在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量. 讲了向量，自然想试试用向量解决几何问题，看看向量解题有没有优越性. 可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中，方法略嫌烦琐，反而不如传统的几何方法简捷优美. 如何用向量法解几何题？能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性？这自然是教育数学应当关心的一个问题. 为此，本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》. 书中用大量实例说明，如果掌握了向量解题的要领，在许多情形下，向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮. 这要领，除了向量的基本性质，关键就是"回路法". 绕来绕去，就是回路之意. 回路法是笔者的经验谈，没有考证前人是否已有过，更没有上升为算法. 书稿主要由彭翕成同志执笔，绝大多数例子，也是他采集加工的.

谈起中国的数学科普，谈祥柏的名字几乎无人不知. 老先生年近八旬，从事数学科普创作超过半个世纪，出书 50 多种，文章逾千篇. 对于数学的执著和一生的爱，洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间. 哪怕仅仅信手翻上几页，哪怕是对数学知之不多的中小学生，也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引. 书中涉及的数学知识似乎不多不深，所蕴含的哲理却足以使读者掩卷遐想. 例如，书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐，展现了古老学科的青春；书中提到海峡两

岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的“自然数高次方的不变特性”，这些生动活泼的素材，兼有冰冷的思考与火热的激情，无论读者偏文偏理，均会有所收益.

沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究和教育数学的研究. 他的《走进教育数学》和本丛书同名，是一本从学术理论角度探索教育数学的著作. 在书中他试图诠释“教育数学”的概念，探究“教育数学”的思想源头与内涵；提出“整合创新优化”、“返璞归真优化”等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例. 笔者原来杜撰出“教育数学”的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统. 经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了. 这确是意外的收获.

浏览着这风格不同并且内容迥异的10本书，教育数学领域的现状历历在目. 这是一个开放求新的园地，一个蓬勃发展的领域. 在这里耕耘劳作的人们，想的是教育，做的是数学，为教育而研究数学，通过丰富发展数学而推进教育. 在这里大家都做自己想做的事，提出新定义新概念，建立新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味，凡此种种，无不是为教育而做数学.

为教育而做数学，做出了些结果，出了这套书，这仅仅是开始. 真正重要的是进入教材，进入课堂，产生实效，让千千万万学子受益，进而推动社会发展，造福人类. 这才是作者们和出版者的大期望. 切望海内外同道者和不同道者指正批评，相与切磋，共求真知，为数学教育的进步贡献力量.

张景中

2009年7月

代序　努力掌握微积分思想的精髓

近年来，张景中和林群两位院士，以全新的方式处理微积分，被称为第三代的微积分，值得我们关注．

所谓第一代微积分，是17、18世纪牛顿和莱布尼茨等先驱表述的微积分，逻辑上不严密．例如无穷小“既是0又不是0”，为人诟病．于是在19世纪末有第二代微积分产生，用 $\varepsilon-\delta$ 语言陈述，非常严谨．然而由于其难懂被称为“大头微积分”，无法普及．现在的大学工科高等数学，也还基本上是第一代的微积分，难以适应 $\varepsilon-\delta$ 语言．至于现在《高中数学课程标准(实验稿)》采用的叙述办法，则是最不严密的那种第一代微积分，主要凭直觉进行运算．这种“难得糊涂”的办法，可以说是不得已而为之．

现在张景中先生提出的初等数学里的微积分，严格却不用 $\varepsilon-\delta$ 语言，而且用初等数学的语言可以说清楚．大家看到，张景中先生的短短几页的文章，将微积分基本定理(牛顿－莱布尼茨公式)严谨地推导出来．这就为我们开辟了第三条道路．

为什么张景中先生的方法能够如此有效？我的理解是他巧妙

地运用不等式化解了“微分中值定理”的功能，最终将微积分初等化了．

大家知道，微分中值定理是传统微积分学的核心命题．它依靠实数理论、函数极限和连续概念，经过闭区间上连续函数性质的研究，通过导数概念和求导运算，借助罗尔定理，兜了很大的圈子，终于得到差商的一个估计：

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi).$$

有了这个估计，函数的有界性、单调性判定，易如反掌；由此导出牛顿－莱布尼茨公式，水到渠成．微积分全盘皆活．

但是，中值定理成立的条件是函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ “连续”、(a, b) “可导”．这涉及极限过程．于是，按照张景中先生的想法，绕过导函数的要求，直接把微分中值定理的功能，分解为“差商可控”和“差商有界”两项只用不等式表达的概念．先看乙函数的定义，

定义 1（甲函数和乙函数） 设函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在区间 I 上有定义，若对 I 的任意子区间 $[u, v]$，总有 $[u, v]$ 上的 p 和 q，使得不等式

$$f(p)\leqslant\frac{F(u)-F(v)}{u-v}\leqslant f(q)$$

成立，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的甲函数，$f(x)$ 是 $F(x)$ 在区间 I 上的乙函数．

这就是说，乙函数无非是把中值定理中用导函数表达的等式，放宽成“差商可以控制的不等式”．事实上，如果存在 p 和 q，使得

$$f'(p)\leqslant f'(\xi)\leqslant f'(q),$$

则导函数 $f'(x)$ 可以看做是乙函数了．因此，所谓乙函数可以认为是导函数的替代物．可是，甲函数的乙函数并不惟一（导函数是惟一的），所以要用乙函数完全取代导函数，还得加上“差商有界”的条件．把这两者合在一起，就意味着这样的乙函数既是

连续的也是可导的，即强可导的．因而，对差商有界的乙函数来说，乙函数就是导函数，微分中值定理实际上也是成立的．可贵的是，我们这里没有绕大圈子，而是直接用不等式定义了两个概念，却具有与微分中值定理同样的功能．

那么，对第三代的微积分，对我们的中学微积分教学有什么帮助呢？

首先，第三代微积分限制在初等数学范围内，避免了说不清道不明的“极限过程”，便于我们把握和理解．

其次，函数的差商可控和差商有界概念的提出，指明了一元微积分学思想体系的精髓所在，把微分中值定理的思想和价值梳理得更加清楚了．

最后，我们不妨试验一下，在中学里索性只讲初等数学范围内的微积分，干脆不讲极限、无穷小量之类的内容，把它们归到大学去学习．这样可以避免中学微积分和大学微积分之间的重复，避免烧成夹生饭．

俗话说：“给学生一杯水，教师得有一桶水．”多角度地考察、多元化地思考微积分，应该成为新时代教师的数学修养．

张奠宙

2010 年 3 月

前言　微积分发展过程回顾与展望

微积分学的重要，众所周知，世界上每年都有数千万人学习微积分．我国高中数学新课程中，也增加了微积分初步的一些内容．

微积分的基本原理很难说得清楚．牛顿(图 0-1)和莱布尼茨(图 0-2)是微积分的主要创建人，他们对自己创建的微积分就说不清楚，当时和后来的许多杰出数学家也说不清楚．数学家使用原理说不清楚的方法来解决问题，引来了怀疑和批评(李心灿，2007)，甚至一些数学家也反对新生的微积分．例如，罗尔曾拒绝使用微积分方法，说“微积分是巧妙谬论的汇集”(李心灿，2007)．

微积分能做什么？为何说不清楚？看一个例子．

如何作曲线上的切线，是促使微积分诞生的问题之一．

如果把抛物线的切线，看成是和抛物线只有一个公共点的直线，只要学过二次方程，又懂得一些解析几何，不难做出来．

最简单的情形，抛物线的方程是 $y=x^2$．在抛物线上取一个点 $P(u,\ u^2)$，过点 P 作抛物线的切线．如果切线的斜率为 k，切

图 0-1　牛顿(1643～1727)

图 0-2　莱布尼茨(1646～1716)

线方程就是

$$y-u^2=k(x-u).$$

把这个带有未知斜率 k 的方程和抛物线的方程 $y=x^2$ 联立，可以得到 x 的方程

$$k(x-u)+u^2=x^2;$$

化简后为

$$x^2-kx+(ku-u^2)=0.$$

解这个二次方程，可得抛物线和切线的公共点的 x 坐标．但是因为公共点只有一个，所以这个方程有重根，判别式应当为0，也就是 $k^2-4ku+4u^2=0$，解得 $k=2u$. 取 u 的一些具体数值，例如 $u=1$，画出来看看(图 0-3)，可以验证所得结果是对的．

但是，过点 P 而平行于 y 轴的直线(图 0-3 中的虚线)，它和抛物线也只有一个公共点．直观上，很难承认这条平行于 y 轴的直线是抛物线的切线．这就发现，把抛物线的切线看作和抛物线只有一个公共点的直线未必妥当．

如何定义曲线的切线？是研究切线作图时面临的基本难题．

想想圆的切线，它除了和圆只有一个公共点之外，还有什么