计算几何
——曲面表示论及应用

罗钟铉　孟兆良　刘成明　编

科学出版社
www.sciencep.com

计 算 几 何

——曲面表示论及应用

罗钟铉　孟兆良　刘成明　编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要研究几何目标在计算机环境内的数学表示、编辑、计算和传输等方面的理论与方法及相关的应用，其中包含连续性方法和离散性方法.书中内容包括计算几何相关的基础理论、多元样条函数的研究方法、局部多项式插值及超值插值、分片有理函数插值、多项式样条空间结构与代数曲线、NURBS曲线与曲面、曲线/曲面细分方法及曲线与曲面参数化等.本书面向具有本科数学分析和线性代数知识的读者，力求容易入门、由浅入深、讲透原理、联系应用.

本书可作为普通高等学校信息与计算科学专业本科生教材，也可作为计算数学专业硕士生、博士生相关课程的教材或参考书，还可供从事计算机辅助几何设计、计算机图形图像处理等相关领域的科学技术工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

计算几何：曲面表示论及应用/罗钟铉，孟兆良，刘成明编.—北京：科学出版社，2010

ISBN 978-7-03-028164-7

Ⅰ.①计… Ⅱ.①罗… ②孟… ③刘… Ⅲ.①计算几何 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第123002号

责任编辑：刘俊来 姚莉丽 房 阳／责任校对：朱光光
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年7月第一次印刷 印张：15
印数：1—3 000 字数：300 000

定价：32.00元

前 言

从全球的媒体发展来看，印刷媒体的黄金时代已经结束，以互联网、户外新媒体和数字电视等为代表的新媒体将迎来发展的最佳机遇.

——《世界经济网》

几何问题涉及自然界的各个领域. 伴随信息科学的快速发展, 计算几何这门新兴的交叉学科已悄然兴起. 特别是近年来 (随着) 计算机和网络技术的飞速发展, 信息资源急剧增长, 数字媒体产业正在蓬勃发展. 可以预见, 继声音、图像和视频之后, 下一波数字媒体浪潮将是 3D 几何数据, 这使计算几何的发展成为急迫需求.

"计算几何" 这一术语最初是作为模式识别的替代语由 M. Minsky 和 S. Papert 于 1969 年提出的, 20 世纪 70 年代初由 A. R. Forrest 给出了更为准确的定义, 即 "对几何信息的计算机表示、分析和综合". 也就是说, 计算几何是在计算机的环境内来研究自然界涉及几何目标的一系列问题, 其中包括几何形体的运动、几何计算、几何实体的快速表示、显示、修改和传输等. 该领域作为研究学科之所以能够获得成功, 一方面是由于它在众多的其他理论研究和应用领域 (如基础数学、计算机图形学、图形/图像匹配与识别、地理信息系统以及机器人学等) 中均发挥了重要的作用; 另一方面是由于其涉及的问题及其解答本身所具有的美感 (这不仅仅是数学上的). 计算几何是一门涉及函数 (数值) 逼近论、微分几何、代数几何、计算数学、数控 (numerical control, NC), 特别是计算机图形/视觉等学科的新兴交叉学科, 其研究内容与所谓的计算机辅助几何设计 (computer aided geometric design) 虽有着密切关系, 但它更偏重于计算机环境下相关问题实现的几何基础与计算等数学方面. 例如, 曲线乃至曲面表示与设计中最为经典的基本方法 ——Bézier 方法, 它是由函数逼近论中的 Bernstein 多项式的研究演化而来；再则, 研究多元样条 (复杂曲面表示的基本工具) 空间的最为基本的方法 —— 光滑余因子方法, 正是利用代数几何中 Bézout 定理将多元分片多项式的问题转换为与之等价的代数问题的研究所提出的. 另外, 正如大家所认为, 基础数学 (如代数几何、微分几何等) 是计算数学的基础, 并且推动着计算数学中各类计算方法的发展. 反过来, 计算数学中的一些研究方法和结果同样能够获得基础数学中有价值的发现. 读者可从第 5 章的内

容中了解到这样的典型范例, 即在一类特殊剖分上的二元样条空间奇异性问题的方法和结果并利用射影几何中的对偶原理的基础上, 可以发现代数曲线的一个新的整体几何不变量 —— 特征数. 进一步, 可利用特征数来研究代数曲线的一些内蕴性质. 事实上, 样条方法也能为人们理解和研究代数曲线提供新的方法和途径.

计算几何随着近几十年来的一些新的理论和技术的发展, 虽然仍有许多问题尚待解决和发展, 但其内容已相当丰富. 从研究对象和方法而言, 目前计算几何大体可分为两类: 一是把几何物体作为运动单元, 研究它的轨迹、碰撞、最短路径等方面的理论与方法; 另一种是研究在计算机环境内几何目标形状的数学表示、编辑、计算和传输等方面的理论与方法. 本书的内容则倾向于后者, 其中包含连续性方法和离散性方法.

为了便于读者掌握本书的内容, 我们把必要的关于射影几何、代数曲线、曲线曲面、三角剖分、一元逼近理论等方面的基础知识作为预备知识在第 1 章中给出简介. 第 2 章介绍研究多元分片多项式 —— 多元样条函数的基本理论与方法. 第 3 章给出实际应用中常用的局部多项式插值及超限插值方法. 第 4 章着重介绍任意多边形单元上的多元有理插值样条方法和曲边元上的有理插值样条方法. 第 5 章侧重多元样条空间结构的研究与代数曲线研究之间的等价性, 并由此首次给出了代数曲线的新的整体几何不变量 —— 特征数及其应用, 同时也介绍了任意三角剖分上低次样条空间的一些新近研究结果. 第 6 章介绍 NURBS 曲线/曲面的基本方法和理论. 第 7、8 章分别较为详细地给出目前广受人们关注的曲线/曲面细分和参数化方法的基本知识和理论.

作者真诚希望本书能够成为计算数学或信息学科的高年级本科生以及相关研究生选修课程有益的教材并得到大家的认可, 同时能够成为有意向从事这一领域研究的学生及科研工作者的必要读物.

本书的撰写与出版, 得到了诸多方面的帮助与支持. 书中成果的研究过程中得到了国家自然科学基金 (No. 10471018, No. 10771028, No. 60533060) 和国家杰出青年基金 (No.60825203) 的支持, 在此向国家自然科学基金委员会表示衷心的感谢. 感谢大连理工大学王仁宏教授多年的培养以及对本书整体思路上的指导和有益的讨论, 并感谢在本书撰写和校阅过程中付出劳动的同事及学生们, 特别感谢科学出版社柳建尧先生在本书出版过程中给予的大力支持及编辑的辛勤劳动.

限于作者的水平, 书中疏漏与不足之处在所难免, 所涉内容也有待进一步改进和提高, 恳请读者和同行们批评指正, 作者不胜感激.

作 者

2009 年 6 月于大连

目 录

第1章

预备知识

1.1 射影几何初步

相信本书的读者已经学习过不同范围和程度的几何, 特别是欧几里得 (Euclidean) 几何学 (简称欧氏几何). 欧氏几何是研究图形在正交变换 (平移、旋转及轴反射等) 下的不变性 (如距离、角度、面积及体积等) 的几何. 仿射几何是研究图形在仿射变换 (有限次透视仿射变换) 下不变性的几何. 这些几何对于许多应用都是不可或缺的工具, 但在一些应用领域中仍然显得在处理上不能够“得心应手”. 例如, 在现实生活中从一个视点观察如笔直铁轨的平行直线, 都感觉是在很远很远的地方相交; 在建筑师的三维效果图和计算机图形学中的“真实感”图形中, 实物中所有的平行线都表现为“相交”的线段. 事实上这些现象在几何中都属于中心射影. 而射影几何是研究图形在射影变换 (有限次透视变换 —— 中心射影) 下不变性的几何学. 宏观地讲, 仿射几何涵盖欧氏几何, 而射影几何则涵盖仿射几何. 由于射影几何研究方法的有效性以及成果的丰富性, 从 19 世纪中叶开始它成为数学的一个新的分支. 甚至 19 世纪曾有句名言称“一切几何学都是射影几何学”(Felix Klein 纲领), 尽管现代许多几何学并不能包罗在射影几何范畴内. 在此我们不拟详尽介绍射影几何的内容, 仅介绍与本书的内容相关的基本概念和基础知识, 更详细的内容请读者参阅其他相关的书籍.

1.1.1 射影平面

这里拟采取最典型的方式给出射影平面的定义. 首先约定点与直线为无定义的基本元素, 在点的集合与直线的集合之间设定一个相互关系称为关联关系 —— 点 p 在直线 L 上 (直线 L 通过点 p). 以二维为例, 对于平面中的点 p, 引入一组有序三数组 (x_1, x_2, x_3) 与之对应, 并引入一个等价关系: 若存在非零常数 ρ 使得 $(x_1, x_2, x_3) = \rho(y_1, y_2, y_3)$, 则 (x_1, x_2, x_3) 与 (y_1, y_2, y_3) 对应于同一点, 称 (x_1, x_2, x_3) 为点 p 的齐次点坐标. 当 $x_3 \neq 0$ 时, 可定义 p 的笛卡儿坐标为 $(x_1/x_3, x_2/x_3)$ (仿射坐标), 反之给定点的笛卡儿坐标也可给出相应的齐次点坐标. 类似地, 对于直线 L, 同样引入有序三数组 $[u_1, u_2, u_3]$ 与之对应, 并约定 $\rho[u_1, u_2, u_3](\rho \neq 0)$ 仍表示

直线 L, 称 $[u_1, u_2, u_3]$ 为直线 L 的齐次线坐标. 显然, 无穷远直线的齐次线坐标为 $[0, 0, 1]$. 点 $p:(x_1, x_2, x_3)$ 与直线 $L:[u_1, u_2, u_3]$ 的关联关系按如下方式决定:

$$p \text{ 在直线 } L \text{ 上(或直线 } L \text{ 经过点 } p) \Leftrightarrow u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

称具有如上关联关系的两个不相交的点集和直线集的并集为实射影平面或二维实射影空间.

根据以上公理化方法的定义, 可以有许多射影平面的模型. 例如, 欧氏直线和欧氏平面上分别添加无穷远点和无穷远直线后所得的拓广直线和拓广平面, 分别成为实射影直线 (一维射影空间) 和实射影平面 (二维实射影空间) 的模型.

从点与直线的关联关系的定义不难看出, 在齐次点坐标和齐次线坐标下, 直线和点的方程均形式地表示为

$$\sum_{i=1}^{3} u_i x_i = 0.$$

事实上, 它隐含着射影平面中的点与直线的对偶关系. 以下采用记号 $(a) = (a_1, a_2, a_3)$, $[u] = [u_1, u_2, u_3]$ 分别表示射影平面中的点与直线. 下面列出一些关于点线齐次坐标的基本结论.

定理 1.1 相异两点 (a) 和 (b) 连线 (或两直线 $[a]$ 和 $[b]$ 交点) 的方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

其相应齐次坐标为

$$\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right]$$

或

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

定理 1.2 相异三点 $(a), (b), (c)$ 共线 (或相异三直线 $[a], [b], [c]$ 共点) 的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

将 $c = la + mb$ 称为点列的以相异两点 a, b 为基点的齐次参数表示. 若记 $\lambda = \dfrac{m}{l}$, 则可得到非齐次参数表示 $c = a + \lambda b$. 而此时必须约定: 当 $l = 0$ 时, $\lambda = \infty$, 而且规定运算 $\dfrac{x}{0} = \infty (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$, $\dfrac{x}{\infty} = 0 (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty} = 1$. 如此, 由

$c = a + \lambda b$ 得到点列中的点的集合到 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的一个双射. 在这个双射下, $\lambda = 0$ 时, $c = a$; $\lambda = 1$ 时, $c = a + b$; $\lambda = \infty$ 时, $c = b$ 等. 从而可将点列的非齐次参数表示作为点列中点的一种非齐次坐标.

交比是射影几何中的基本的射影不变量, 其他所有的射影不变量都与交比有关, 甚至射影几何的所有内容几乎都与交比有着密切的联系.

定义 1.1 设 P_1, P_2, P_3, P_4 为共线的四点, 且 $P_1 \neq P_2$, 它们的齐次坐标分别为 $a, b, a + \lambda_1 b, a + \lambda_2 b$. 定义如下的比值:

$$(P_1P_2, P_3P_4) := \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

为由此四点构成的一个交比, P_1, P_2 为基点对, P_3, P_4 为分点对.

下面给出交比的一些简单性质, 关于它在几何中的应用可参阅相关专业参考书 (如文献 [1]).

定理 1.3 设 $(P_1P_2, P_3P_4) = r$, 则若改变交比记号中的点的次序, 相应的交比值的变化规律如下:

(1) 交换基点对与分点对的位置或同时对换基点对与分点对中的两点, 不改变相应的交比值;

(2) 仅对换基点对或分点对中的两点, 相应的交比值由 r 变为 $1/r$; 仅对换交比记号中的中间或首尾两点, 相应的交比值由 r 变为 $1 - r$.

定义 1.2 称 P_1, P_2, P_3, P_4 依次序构成调和点组, 如果 $(P_1P_2, P_3P_4) = -1$, 并称此交比为调和比.

推论 1.1 若 $(P_1P_2, P_3P_4) = -1$, 则 P_1, P_2, P_3, P_4 四点互异.

推论 1.2 相异四点组 P_1, P_2, P_3, P_4 可以按某次序构成调和点组 $\Leftrightarrow$ 这四点所构成的 6 个交比值变成 3 组, 每组两个相等, 这三个交比值分别为: $-1, \frac{1}{2}, 2$.

调和比是最重要的一种交比. 今后将要学习的许多射影性质, 都将与调和比有关.

推论 1.3 设 P_1, P_2, P 为共线的通常点, P_∞ 为此直线上的无穷远点, 则 P 为线段 P_1P_2 的中点 $\Leftrightarrow (P_1P_2, PP_\infty) = -1$.

命题 1.1 一直线顺次交三点型 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 于 Q_1, Q_2, Q_3. 在此三边上再顺次取点 Q_1', Q_2', Q_3', 使

$$(P_2P_3, Q_1'Q_1) = k_1, (P_3P_1, Q_2'Q_2) = k_2, (P_1P_2, Q_3'Q_3) = k_3,$$

则

(1) Q_1', Q_2', Q_3' 共线 $\Leftrightarrow k_1k_2k_3 = 1$;

(2)$P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3'$ 共点 $\Leftrightarrow k_1k_2k_3 = -1$.

在命题 1.1 的结论 (1) 中，若 Q_1,Q_2,Q_3 所在直线为无穷远直线, 即 Q_1,Q_2,Q_3 为无穷远点, 则此时有

$$k_1=\frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'},\quad k_2=\frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'},\quad k_3=\frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'}.$$

此时结论 (1) 成为初等几何中的一个重要定理.

定理 1.4(Menelaus 定理) *在三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_2P_3,P_3P_1,P_1P_2 上依次取三点 Q_1',Q_2',Q_3', 则 Q_1',Q_2',Q_3' 共线 $\Leftrightarrow$*

$$\frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'}\cdot\frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'}\cdot\frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'}=1.$$

同理，在结论 (2) 中, Q_1,Q_2,Q_3 所在直线为无穷远直线, 又得到初等几何中另一个重要定理.

定理 1.5(Ceva 定理) *在三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_2P_3,P_3P_1,P_1P_2 上依次取三点 Q_1',Q_2',Q_3', 则 P_1Q_1',P_2Q_2',P_3Q_3' 共点 $\Leftrightarrow$*

$$\frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'}\cdot\frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'}\cdot\frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'}=-1.$$

1.1.2 平面对偶原理

对偶原理是贯穿射影几何的一个最为重要的基本原理. 它使得射影几何具有独特的魅力, 而且使得射影几何比欧氏几何更为对称. 这一对偶原理在本书的讨论中有极为重要的应用.

从射影平面的定义中点与线的关联关系可知, 点与线是具有完全相同地位的两要素, 事实上也就蕴涵着点与线的对偶关系. 这同样可以从上面齐次坐标的基本知识中可以看出. 对于射影平面中的一点 $(x)=(x_1,x_2,x_3)$, 它可唯一对应于 (或视为) 射影平面中的直线 $[x]=[x_1,x_2,x_3]$; 反之, 射影平面中的直线 $[x]$ 亦可唯一对应于 (或视为) 该射影平面中的一点 (x). 从而, 有如下的基本概念:

(1) 在射影平面上, 称 "点" 与 "直线" 为一对**对偶元素**;

(2) 称 "过一点作一直线" 与 "在直线上取一点" 为一对**对偶运算**;

(3) 将对换对偶元素的地位和作对偶运算统称为**对偶变换**.

在这个对偶原理下, 容易理解下面的对偶图形的概念.

定义 1.3(对偶图形) *在射影平面上, 给定由点、直线及其关系构成的图形 Σ. 对图形 Σ 作对偶变换, 即把 Σ 中的各元素改成其对偶元素, 各运算改成其对偶运算, 则得到另一个图形 Σ^*. 称 Σ 与 Σ^* 为一对对偶图形.*

图 1.1 与图 1.2 是一对对偶图形的例子, 其中 $(\cdot)$ 表示点, 而 $[\cdot]$ 表示直线.

一般情况下, 射影几何中关于点线的一些命题, 都存在相应的关于线点的对偶命题. 在本书中, 点、线的记号统一为 $a,b,u,v,\cdots$.

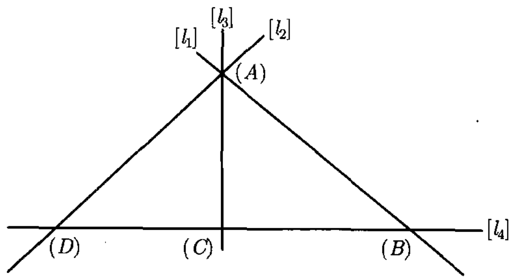

图 1.1

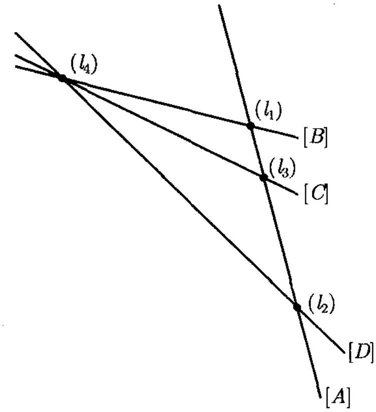

图 1.2 图 1.1 的对偶图

下面叙述著名的 Pascal 定理.

定理 1.6(Pascal 定理) *任给二次曲线的任一内接六边形, 它的三对对边 (延长线) 的交点必落在一条直线上 (此直线称为 Pascal 直线).*

利用对偶原理, 有如下的对偶命题.

定理 1.7(Brianchon 定理) *任给二次曲线的任一外切六边形, 它的三对对顶点的连线必交于一点.*

Pascal 定理是射影几何中非常著名的定理, 甚至可以说它对射影几何这一数学分支的诞生具有重要影响. B. Pascal(1623—1662) 在 17 岁时发现了二次曲线为圆时的这一结论, 后进一步发现这一结论对任意的二次曲线情形亦成立. B. Pascal 是 17 世纪对射影几何作出重要贡献的主要人物. 事实上, Pascal 定理揭示了二次代数曲线的非常重要的内蕴性质, 也蕴涵着代数曲线的一个整体不变量. 关于三次以上代数曲线的类似的内蕴性质以及一种新的几何不变量的讨论, 第 5 章将进行专门的介绍.

注释 1.1 射影几何学是以射影平面作为空间，以射影变换群 (其元素是二维射影变换) 为主变换群的几何学, 研究的是图形的射影不变性和不变量. 其中最基本的射影不变性有同素性 (即点的像仍然是点；直线的像仍然是直线)、关联性 (即点与直线的关联关系: 某点在某直线上, 某直线通过某点), 最基本的射影不变量是交比. 所有其他射影不变性和不变量都是由这些基本的不变性和不变量演绎出来的性质和数量. 而我们以前经常见到的如距离、角度、平行性等，都不是射影几何学的研究内容.

射影仿射几何学是以拓广平面为空间, 射影仿射变换群为主变换群的几何学. 由于无穷远直线在射影仿射变换群下保持不变, 故以无穷远直线作为绝对形的仿射几何学就仿射性质而言, 与射影仿射几何学是同构的. 因而我们也常常去掉无穷远

直线, 直接将仿射几何学与欧式几何学都作为射影几何的子几何学.

欧氏几何学是以欧氏平面为空间, 以正交变换群作为主变换群的几何学, 作为仿射几何的子几何学, 欧氏几何的研究内容首先包含仿射几何学的全部内容, 再加上正交变换特有的不变性和不变量.

对于上述三者关系有如下图示:

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{射影几何} & & \text{射影仿射几何} & & \text{射影欧氏几何} \\
(P,K) & \Longleftarrow & (P,KA) & \Longleftarrow & (P,KM) \\
 & \nwarrow & \| & \nwarrow & \| \\
 & & (PA,A) & \Longleftarrow & (PA,M) \\
 & & \text{仿射几何} & & \text{欧氏几何}
\end{array}
$$

在上述图表中, “$\Longleftarrow$”表示后者为前者的绝对子几何学; “$\longleftarrow$”表示后者为前者的相对子几何学; “$=$”表示伴随关系, 相对子几何学的绝对形均为 l_∞.

1.2 关于代数曲线

代数曲线是古老而经典的数学 (特别是代数几何) 研究对象. 由于它在数学与应用数学各个分支的应用, 以及在工程领域如密码系统、编码理论、容错编码、数字图像以及计算机视觉等领域的重要应用, 近些年对它的研究特别是从计算的角度的研究成为非常活跃的分支. 下面简要介绍有关代数曲线的一些基本知识.

代数曲线是多项式方程 $p(x,y)=0$ 的所有解的集合, 其中 $p(x,y)$ 是定义在数域 K 上的二元多项式. 多项式 $p(x,y)$ 的次数 (degree) 定义为该代数曲线的阶 (order).

1.2.1 多项式的结式

对于两个一元多项式

$$
\begin{aligned}
f &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0, \\
g &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \quad b_m \neq 0,
\end{aligned}
$$

其中所有系数是给定数域中的元素, 称如下的行列式

$$
R = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\
 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m
\end{vmatrix} \tag{1.1}
$$

为多项式 f 和 g 的**结式**, 其中含 a_i 和 b_i 字母的分别共有 m 和 n 行. 称多项式 f 和它的导函数的结式为多项式 f 的**判别式**.

结式及判别式是多项式的消元、公因子、代数曲线的公共零点以及参数曲线隐式化研究中的重要工具. 下面列出一些相关的结论.

定理 1.8 *存在次数至多为 $m-1$ 和 $n-1$ 的两个多项式 A 和 B, 使得 $R=Af+Bg$.*

定理 1.9 *两个多项式含有非常数公因子的充分必要条件为它们的结式恒为零.*

推论 1.4 *特征数为零的整环上的多项式含有非常数重因子当且仅当它的判别式为零.*

对于多元情形, 引入如下齐次多项式的概念.

定义 1.4 *称非零多项式 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 为 n 次齐次多项式, 如果*

$$f(tx_1,\cdots,tx_r)=t^n f(x_1,\cdots,x_r),$$

其中 r 为大于 1 的正整数.

设

$$\begin{aligned}F_n&=A_n+A_{n-1}x_r+\cdots+A_0x_r^n,\quad A_0\neq 0,\\ G_m&=B_m+B_{m-1}x_r+\cdots+B_0x_r^m,\quad B_0\neq 0\end{aligned}$$

分别为 n 次和 m 次的齐次多项式, 其中 A_i,B_i 是次数为 i 的关于 $x_1,\cdots,x_{r-1}$ 的齐次多项式. 类似于一元多项式情形, 可定义 F_n 和 G_n 关于 x_r 的结式 $R(x_1,\cdots,x_{r-1})$, 则有如下结论.

定理 1.10 *结式 $R(x_1,\cdots,x_{r-1})$ 或者恒等于零或者是 mn 次的齐次多项式.*

1.2.2 Bézout 定理

代数曲线 (面) 的相交理论, 甚至代数簇的研究是代数几何中的主要研究内容. 本节介绍经典代数曲线理论中的几个基本又重要的结论.

利用结式的方法, 不难证明如下的 Bézout 定理的弱形式.

定理 1.11(Bézout 定理弱形式) *如果两条次数分别为 m 和 n 的代数曲线存在多于 mn 个公共零点 (或交点), 则它们必含有公共分支.*

通过适当定义代数曲线公共零点的重数 (又称代数曲线在一点的阶数), 可以得到如下的 Bézout 定理的强形式.

定理 1.12(Bézout 定理强形式) *两条次数分别为 m 和 n 的不含有公共分支的代数曲线恰有 mn 个公共零点 (含重数在内).*

1.2.3 Nöther 定理

称平面代数曲线上的点 p 为 r 重平常点, 如果该曲线在此点处存在 r 条不同的切线.

定理 1.13(Nöther 定理) 设 F 和 G 是不含有公共分支的两条代数曲线, p_i 是曲线 F 上满足 $O_{p_i}(G)>0$($O_{p_i}(G)>0$ 表示曲线 G 在 p_i 处的阶数) 的 $r_i(>1)$ 重平常点. 如果对每一如此的 p_i 满足

$$O_{p_i}(H) \geqslant O_{p_i}(G)+r_i-1,$$

则 $H=AG+BF$, 其中 A,B 为多项式.

事实上, Nöther 定理是代数学中著名的 Hilbert 零点定理在较强条件下的结果.

定理 1.14(Hilbert 零点定理) 设 K 为域, $K[x_1,\cdots,x_n]$ 为 K 上的多项式环. $F,F_1,\cdots,F_m\in K[x_1,\cdots,x_n]$. 若多项式 $F_1,\cdots,F_m$ 的每一公共零点都是 F 的零点, 则存在自然数 r 使得

$$F^r=A_1F_1+A_2F_2+\cdots+A_mF_m \quad (F^r\in Id\langle F_1,\cdots,F_m\rangle),$$

其中 $Id\langle F_1,\cdots F_m\rangle$ 表示 $F_1,\cdots,F_m$ 生成的理想.

利用代数的语言, 这个定理可以等价地描述为: 若 α 是 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 的真理想, 则 α 中的所有多项式一定有公共零点.

利用 Nöther 定理容易证明如下结论.

定理 1.15(Chasles 定理) 如果两条三次代数曲线 F 和 G 的 9 个交点均是 F 的简单点, 则任意通过其中 8 点的三次曲线必通过第 9 点.

当然, 这一定理也可利用其他方法证明. 读者不难利用 Chasles 定理证明二次曲线的 Pascal 定理, 也正是这一原因许多学者把 Chasles 定理看成是 Pascal 定理的推广. 进一步, 对于任意次数的代数曲线有下面重要的定理.

定理 1.16(Cayley-Bacharach 定理) 设 m,n 和 r 是满足

$$3\leqslant r\leqslant \min\{m,n\}+2$$

的自然数. 假定次数为 m 的曲线 $p(x,y)=0$ 和次数为 n 的曲线 $q(x,y)=0$ 恰好相交于 mn 个不同点. 如果一 $m+n-r$ 次代数曲线 $f(x,y)=0$ 通过其中的 $mn-\dfrac{1}{2}(r-1)(r-2)$ 个点, 则它必通过余下的 $\dfrac{1}{2}(r-1)(r-2)$ 个点, 除非这些 $\dfrac{1}{2}(r-1)(r-2)$ 个点落在一条 $r-3$ 次代数曲线上.

Cayley-Bacharach 定理不仅是代数几何中的重要结果, 而且在计算几何特别是在多项式插值理论等方面有着重要的应用. 到目前为止, 有许多不同版本的 Cayley-Bacharach 定理和猜想, 特别是对于高维情形. 感兴趣的读者可参阅文献 [2] 及所附文献.