GAODENG ZHIYE JIAOYU

主　编◎冯　宁

高等职业教育课程改革示范教材

经济应用数学

少学时用

◎微积分简介

◎线性代数与线性规划

◎概率统计与线性回归

◎MATLAB 7.0简介

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

经济应用数学

少学时用

主　编　冯　宁
编　者　王晓琴　肖劲军

南京大学出版社

内容简介

本书是根据经济类、管理类专业对数学的需要编写而成，内容设计简明. 全书分为四个部分：第一部分为预备知识，包括微积分的基础知识；第二部分为线性代数与线性规划初步，包括行列式、矩阵、线性方程组、基本线性规划问题；第三部分为概率统计与线性回归初步，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、数理统计与一元线性回归的基础知识；第四部分是结合本书内容介绍数学软件 MATLAB 7.0 及其使用.

本书针对高职高技能应用型人才培养目标的特点，在教学内容的安排上，密切结合经济类与管理类专业的需要，以"理解基本概念、掌握基本运算方法及应用"为原则；在教学内容的处理上，不求深，不求全，只求实用，重视数学在经济方面的应用，注意与专业课接轨，体现"有所为，必须有所不为".

本书可作为高职高专经济类、管理类专业通用数学教材（少学时），也可作为相关专业人员更新知识的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学 / 冯宁主编. —南京：南京大学出版社，2010.8

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-07081-5

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ②冯… Ⅲ. ①经济数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 092258 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 高等职业教育课程改革示范教材
书　　名 经济应用数学
主　　编 冯　宁
责任编辑 吴　华　　　编辑热线 025-83592146
照　　排 南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷 赣榆县赣中印刷有限公司
开　　本 787×1 092　1/16　印张 11　字数 284 千
版　　次 2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-07081-5
定　　价 19.80 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

前 言

为了适应新的职业教育人才培养要求，我们通过与专业课教师共同研讨，在继承省级精品课程建设成果的基础上，充分汲取近年来高职院校基础课程教学改革的经验，组织编写了这本适用于少学时经济类、管理类专业的教改示范教材. 本教材淡化了理论推导和证明，在教学内容的处理上，不求深，不求全，只求实用，突出了数学知识在经济、管理方面的具体应用，难易程度更适合现在高职院校的生源状况.

本书在编写过程中，遵循“面向专业需求，淡化严密形式，融入建模思想，注重应用能力”的原则，力求突出如下特点：

1. 面向专业需求设计模块，满足经济类、管理类专业的一般需求.

2. 淡化严密形式，针对高职文科学生的数学基础，淡化数学概念和定理的严格表述，适度论证，不追求理论上的系统性和逻辑性. 力求使基本概念、基本定理直观化、具体化，缓解课时少与教学内容较多的矛盾.

3. 融入建模思想，注重用数学的思想和方法将经济问题转化为数学模型，加强数学建模的训练.

4. 注重应用能力，以实例引入概念，加强了与经济应用联系较多的数学知识、方法的训练，并结合教学内容，应用 MATLAB 7.0 解决极限、导数、函数的最值、积分、线性方程组、线性规划、回归分析等问题的计算，以培养学生应用计算机及相应数学软件求解数学模型的能力，体现高职教育的实践性和应用性.

5. 在每章后安排了小结与复习的内容，帮助学生总结重要结论和解题方法，节后配有练习与思考和适量习题等，以帮助学生快速提高运算技能，并起到释疑解难的作用.

全书的框架结构安排、统稿工作由常州轻工职业技术学院冯宁教授承担. 本书的第 1～5 章由冯宁编写，第 6～8 章由王晓琴编写，第 9 章由肖劲军编写.

编　者
2010 年 4 月

目　录

第 1 章　微积分初步

微积分学是高等数学最基本、最重要的组成部分，是现代数学许多分支的基础. 函数是微积分的主要研究对象，极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，而导数与微分、不定积分与定积分是微积分中很重要的概念. 本章将简要介绍极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分的基本概念及基本计算方法.

§1.1　极限与连续

一、数列的极限

按正整数顺序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列，简记作 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为数列的通项或一般项.

数列可看做自变量为正整数 n 的函数：$x_n = f(n), n \in \mathbb{N}_+$.

定义 1-1　设有数列 $\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，x_n 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A(n \to \infty),$$

亦称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 A. 如果一个数列没有极限，就称该数列是**发散**的.

【例 1.1.1】　下列数列是否收敛，若收敛，指出其极限值.

(1) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$；　　(2) $\{2^n\}$；　　(3) $\{(-1)^{n+1}\}$.

解　(1) 数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 即为

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$$

易见，当 n 无限增大时，$\dfrac{n}{n+1}$ 无限接近于 1，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

(2) 数列 $\{2^n\}$ 即为

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$$

易见，当 n 无限增大时，2^n 也无限增大，故该数列是发散的.

(3) 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 即为

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$$

易见，当 n 无限增大时，$(-1)^{n+1}$ 反复取 1，-1 两个数，而不会无限接近于任何一个确定的常数，故该数列是发散的.

二、函数的极限

1. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-2　设函数 $f(x)$，如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确

定的常数 A，则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

如果在上述定义中，限制 x 只取正值或者只取负值，即有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=A,$$

则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的极限**.

注意 $x\to\infty$ 表示同时考虑 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的情形.

定理 1-1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

【例 1.1.2】 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ 的极限.

解 由图 1-1 可知，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近于 -1，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1.$$

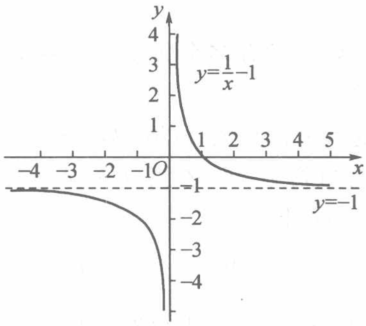

图 1-1

【例 1.1.3】 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的极限.

解 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁有定义(**x_0 点可以除外**). 如果当自变量 x 无限趋于 $x_0(x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

当自变量 x 从 x_0 的左侧(或右侧)趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**(或**右极限**)，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A).$$

注意 $x\to x_0$ 表示 x 是既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧无限趋于 x_0 的.

定理 1-2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

【例 1.1.4】 讨论分段函数 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解 由图 1－2 可知，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

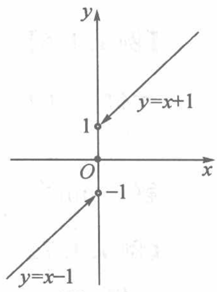

图 1－2

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

三、无穷小与无穷大

后面讨论的一般性结论中，若记号“ lim ”下面没有标明自变量的变化过程，则表示所述结果对数列极限和函数极限都适用.

1. 无穷小

定义 1－4 极限为零的变量称为**无穷小**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷小.

注意 (1) 无穷小是相对于自变量的某一变化过程而言的. 例如，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，而当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x}$ 不是无穷小.

(2) 无穷小是一个变量，不能将它与绝对值很小的数混淆. 零是唯一可以看做无穷小的常数.

2. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小.

(2) 有界函数(或常数)与无穷小的乘积是无穷小.

【例 1.1.5】 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$.

解 因为 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数. 又 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，即 x 是 $x\to 0$ 时的无穷小. 根据无穷小的性质(2)可知 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

3. 无穷大

定义 1－5 在自变量某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 为无穷大. 形式上记作 $\lim f(x)=\infty$.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$，故当 $x\to+\infty$ 时，2^x 为无穷大.

同样，无穷大也与自变量的变化过程有关.

定理 1－3 在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

四、极限的运算法则

定理 1－4 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$ (可推广至有限个函数).

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$ (可推广至有限个函数).

推论 1－1 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$ (c 为常数).

(3) 若 $B\neq 0$，$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$.

【例 1.1.6】 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

分析 当 $x\to 3$ 时,分子与分母的极限都为 0,不能直接用商的极限法则,可约去公因子 $(x-3)$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-1)=2.$

【例 1.1.7】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)$.

分析 当 $x\to\infty$ 时,x^3 和 $3x^2$ 极限不存在,不能直接用极限法则.

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3-3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}=0,$$

根据无穷小与无穷大的关系(定理 1 - 3),得

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)=\infty.$$

【例 1.1.8】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-2}{2x^3-x+1}$.

分析 当 $x\to\infty$ 时,分子、分母极限都不存在(呈现 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 形式),不能直接用极限法则,可用分母中 x 的最高次幂除之,然后再求极限.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-2}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{2}.$

【例 1.1.9】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

分析 当 $x\to 0$ 时,分子分母极限均为零,不能直接用商的极限法则,可先对分子有理化,然后再求极限.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【例 1.1.10】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{x}{1-x}\right)$.

分析 当 $x\to 1$ 时,两项极限均不存在. 可先通分,再求极限.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{x}{1-x}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{2-x(1+x)}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{1-x^2}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

五、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

【例 1.1.11】 求极限(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$;(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$($k$ 为非零常数).

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

在上式中，令 $\frac{1}{x}=z$，当 $x\to\infty$ 时，$z\to 0$，从而又有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}.$$

【例 1.1.12】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$（$k$ 为非零常数）.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=\mathrm{e}^k$.

3. 连续复利计算模型

设初始本金为 p，年利率为 r，若每年计息一次，按复利计算，则第 n 年末的本利和为

$$s_n=p(1+r)^n,$$

这就是**复利计算模型**.

若为半年计息一次，则半年利率为 $\frac{r}{2}$，n 年共计息 $2n$ 次，则第 n 年末的本利和为

$$s_n=p\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}.$$

若一年分 m 次付息，则每次利率为 $\frac{r}{m}$，n 年共计息 mn 次，则第 n 年末的本利和为

$$s_n=p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

由于资金周转过程是不断进行的，计算利息分期越细越合理，从而有计息次数 $m\to\infty$，则

$$s_n=\lim_{m\to\infty}p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=p\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{r\cdot n}=p\mathrm{e}^{r\cdot n},$$

这就是**连续复利计算模型**.

六、函数的连续性

1. 函数的增量(或改变量)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，当自变量从初值 x_0 变到终值 x 时，对应的函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$，则称 $x-x_0$ 为**自变量的增量**，$f(x)-f(x_0)$ 为**函数的增量**，分别记作 $\Delta x,\Delta y$，即

$$\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

注意 $\Delta x,\Delta y$ 均可正可负，当初值大于终值时，增量就是负的，其几何意义如图 1－3 所示.

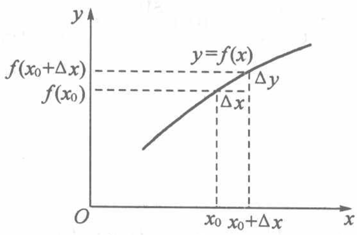

图 1-3

2. 函数的连续性

定义 1-6 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，如果自变量的增量 Δx 趋于零时，对应的函数增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续.**

由于 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$；$\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$，于是得到与定义 1-6 等价的定义.

定义 1-7 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处及其近旁有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续.**

由定义 1-7 可知，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，必须同时满足下列三个条件：

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) 上述极限值等于函数值 $f(x_0)$.

上述三个条件中只要有一个不满足，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的**间断点.**

【例 1.1.13】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x>0\\ -x+1 & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 及其近旁有定义，且 $f(0)=1$. 又

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+1)=1,$$

即
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1=f(0),$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 1.1.14】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & 0<x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 及其近旁有定义，且 $f(1)=2$.

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2-x)=1,$$

即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，所以点 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点(如图 1-4).

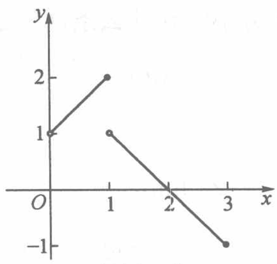

图 1-4

不难得到如下重要结论：**基本初等函数在其定义域内都是连续的；一切初等函数在其定义区间内都是连续的.**

注意　“定义区间”不能换成“定义域”，所谓定义区间，就是包含在定义域内的区间.

根据这个结论，求初等函数 $f(x)$ 在其定义区间内某点 x_0 处的极限，可归结为计算函数值 $f(x_0)$，且求初等函数的连续区间就是求定义区间.

练习与思考 1.1

1. 判断下列各命题是否正确，若错，指出错在哪里.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 一定存在；

(2) 如果 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$；

(3) 如果 $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$，则 $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 不存在；

(4) 无穷大必须是正数；

(5) 无限个无穷小的和仍是无穷小；

(6) 若函数在点 x_0 处间断，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 一定不存在.

2. 下列运算错在何处：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续与在点 x_0 处有极限，两者有什么联系与区别？

习题 1.1

1. 分析下列各极限，若极限存在，求出该极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$.

2. 求 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x=0$ 处的左右极限，并指出当 $x\to 0$ 时，函数的极限是否存在.

3. 利用无穷小的性质求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$.

4. 下列函数在什么条件下是无穷小？在什么条件下是无穷大？

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$.

§1.2　导数与微分

一、两个实例

1. 变速运动的瞬时速度

设一物体做变速直线运动，其经过的路程 s 与时间 t 的函数关系为 $s=s(t)$，现在考察该物体在 t_0 时刻的瞬时速度(即路程相对于时间的变化率).

当时间由 t_0 变到 $t_0+\Delta t$ 时，物体在这一段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

很明显，当 $|\Delta t|$ 无限小时，$\bar{v}$ 就无限接近于 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

2. 产品总成本的变化率

设某产品的总成本 C 是产量为 x 单位时的函数 $C=f(x)$，考察产量为 x_0 时的总成本的变化率，在经济学中称为**边际成本**.

当产量由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限是产量为 x_0 时的**边际成本**. 它的经济意义：当产量为 x_0 时，产量再增加一个单位的成本增加值，即总成本对产量的变化率.

在经济学中，还有许多其他的量，如边际收入、边际利润等都具有这种形式，这种特殊形式的极限就是函数的导数.

二、导数的定义

定义 1-8　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$ 时，函数有相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数（也称微商），记作

$$f'(x_0), y'\big|_{x=x_0}, \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} \text{或} \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0},$$

即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

若上述极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内任一点 x_0 都存在导数 $f'(x_0)$，这就确定了一个新的函数，称此函数为 $f(x)$ 的导函数，记作 $f'(x)$. 显然有

$$f'(x)\big|_{x=x_0} = f'(x_0).$$

【例 1.2.1】 设函数 $f(x) = x^2$，求 $f'(x), f'(2)$.

解 (1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

(3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$.

所以 $f'(x) = (x^2)' = 2x, f'(2) = f'(x)\big|_{x=2} = 2x\big|_{x=2} = 4$.

注意 一般地，$f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$.

三、导数的几何意义

如图 1-5 所示，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处切线的斜率，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right).$$

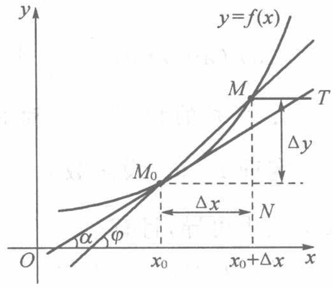

图 1-5

由导数的几何意义及直线的点斜式方程可知，曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

【例 1.2.2】 求曲线 $y = x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线方程.

解 因为所求切线的斜率 $k = y'\big|_{x=2} = 2x\big|_{x=2} = 4$，所以切线方程为

$$y - 4 = 4(x - 2),$$

即 $4x - y - 4 = 0$.

四、可导与连续的关系

定理 1-5 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注意 此定理的逆定理不成立，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，却不一定在点 x_0 处可导. 如

图 1-6 所示，函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处不可导，从几何上看，曲线 $y=|x|$ 在原点 $(0,0)$ 处没有切线.

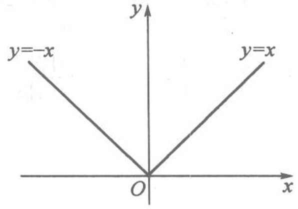

图 1-6

因此，函数在某点连续是在该点可导的必要条件，而非充分条件.

五、导数的基本公式和四则运算法则

1. 基本初等函数的求导公式

根据导数定义和运算法则，可以求出基本初等函数的求导公式.

(1) $(C)'=0$（C 为常数）；
(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 为实常数）；
(3) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq1)$；
(4) $(e^x)'=e^x$；
(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$；
(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；
(7) $(\sin x)'=\cos x$；
(8) $(\cos x)'=-\sin x$；
(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$；
(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；
(11) $(\sec x)'=\tan x\sec x$；
(12) $(\csc x)'=-\cot x\csc x$；
(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；
(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；
(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；
(16) $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1-6 设函数 $u=u(x),v=v(x)$ 在点 x 处可导，则函数 $u\pm v,u\cdot v,\dfrac{u}{v}(v\neq0)$ 在点 x 处也可导，且有

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$；

(2) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$，特别地 $[Cu(x)]'=Cu'(x)$（C 为常数）；

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

(1)、(2) 可以推广到有限个可导函数的情形.

【例 1.2.3】 求函数 $y=\sqrt{x}-\cos x-2\ln x+e^2$ 的导数.

解 $y'=(x^{\frac{1}{2}})'-(\cos x)'-2(\ln x)'+(e^2)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x-\dfrac{2}{x}$.

【例 1.2.4】 求函数 $y=(3x^2-5e^x)\sin x$ 的导数.

解 $y'=(3x^2-5e^x)'\sin x+(3x^2-5e^x)(\sin x)'$

$=(6x-5e^x)\sin x+(3x^2-5e^x)\cos x$.

【例 1.2.5】 运用商的求导法则证明正切函数的导数公式.

证明　$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$
即证　$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

六、复合函数的求导法则

定理 1－7　若函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y = f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且导数为
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 或 } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

复合函数的求导法则又称为**链式法则**. 它还可以推广到多个中间变量的情形.

【例 1.2.6】　求函数 $y = \sin 3x$ 的导数.

解　将 $y = \sin 3x$ 看成 $y = \sin u, u = 3x$ 复合而成的函数，故
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

【例 1.2.7】　求函数 $y = (2x+1)^3$ 的导数.

解　将 $y = (2x+1)^3$ 看成 $y = u^3, u = 2x+1$ 复合而成的函数，故
$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2.$$

复合函数求导的关键是先要分清函数的复合层次，在计算比较熟练后，可以不写出中间变量，直接按复合函数的层次由外层向内层逐层求导.

【例 1.2.8】　运用复合函数的求导法则证明幂函数的导数公式.

证明　因为　$$y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha\ln x},$$
所以　$$y' = (e^{\alpha\ln x})' = e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)' = x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$
即证 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 为实常数）.

【例 1.2.9】　某厂每月生产的产品固定成本为 800 百元，生产 x 台产品的可变成本为 $x^3 - 2x^2 + 10x$ 百元. 某厂目前日产量为 12 台，问每天多生产一台产品的成本为多少?

解　总成本函数为 $C(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 800$，则边际成本为
$$C'(x) = (x^3 - 2x^2 + 10x + 800)' = 3x^2 - 4x + 10,$$
所以 $C'(12) = 394$（百元），即每天多生产一台产品成本增加 394 百元.

【例 1.2.10】　某产品销售 x 件的收入函数为 $R(x) = 30x - \frac{1}{4}x^2$ 元，求边际收入函数，以及销售件数为 $x = 30, 60, 80$ 时的边际收入，并说明其经济意义.

解　边际收入函数为 $R'(x) = \left(30x - \frac{1}{4}x^2\right)' = 30 - \frac{1}{2}x$，于是
$$R'(30) = 15, R'(60) = 0, R'(80) = -10.$$
即当销售量为 30 件时，再多销售一件产品，可使收入增加 15 元；当销售量为 60 件时，再销售一件产品，收入不增不减；当销售量为 80 件时，再多销售一件产品，收入反而减少 10 元.