

高等学校教学用书

数学解析习题彙編

上册

Г. Н. 別尔曼著

高等教育出版社

高等学校教学用书



数学解析习题彙編

上册

I. H. 别尔曼著

景毅 徐寶議 張琪譯

高等教育出版社

物理系

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別尔曼 (Г. Н. Берман) 著“数学解析習題彙編”(Сборник задач по курсу математического анализа) 1953 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定作为高等学校教学参考書。

本書密切配合別尔曼特 (А. Ф. Бермант) 著“数学解析教程”(Курс математического анализа), 全書章节也完全与“数学解析教程”一致, 所选题材都能將理論貫穿到实际問題中去, 而且有許多富于兴趣的題目, 对于理論的深刻了解, 确有很大帮助。附有解答, 以备参考。

参加本書翻譯和校訂工作的为东北地質学院景毅、徐賢議、張琪三位同志。

本書原由商务印書館出版, 自 1957 年 6 月起改由本社出版。

数 学 解 析 習 題 彙 編

上 册

Г. Н. 別尔曼著

景 毅 徐賢議 張 琪譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠 170 号

(北京市書刊出版業營業許可證出字第 054 号)

商務印書館上海廠印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·334 开本 850×1168 1/32 印張 9 8/16 字數 196,000 印數 8,001—10,500

1954 年 2 月商務初版 (共印 17,500)

1957 年 6 月新 1 版 1957 年 12 月上海第 4 次印刷 定价(8) ¥ 1.10

序

由於我的“數學解析教程”^①新版(1950年)中內容上有着重大的變更以及對本書第一版各種缺點,作了必要的修正,本版的“習題彙編”也有了很顯著的修改。

選擇及安排習題材料的基本原則依舊如前版,問題和練習是完全按照上述教程理論的章節而系統的編集起來的,並且“習題彙編”編排的標題,除少數例外,都和這“教程”新版的標題相符合。

關於本版“習題彙編”的修改和變動的情形,並沒有寫出的必要——細心的讀者很容易就會發現出來的。我們只指出下列的新辦法,即只要是可能的話,在章末就排上所謂“計算問題”,其目的是在那章研究過及演算過的材料的基礎上發展計算的熟練技巧。經驗證明,這樣安排計算問題,在方法上是恰當的。

和第一版一樣,這裏沒有編入關於必要的公式的理論知識和證明,關於這些,讀者可以在上述“教程”或任何別種數學解析教本的相當項目中找到。“習題彙編”的多數段落,爲了便於使用,分成了更小的部份而不標註號數。我們在一羣同類問題之前,作一總的提示,在有物理內容的問題之前,給出必需的物理知識,在問題本文裏,沒有任何別的公式或解釋,如果問題比較困難,那麼就在答案裏予以提示;這樣的問題都標上星號(*),在“教程”中用作例證的典型問題,和在“教程”中研究過的其他問題在“習題彙編”中都不再重複,問題的編號是依所有的問題一直排下來的。

“習題彙編”的改編是在它的作者 Георгий Николаевич Бермант 沒

① А. Ф. Бермант, Курс Математического Анализа, Гостехиздат, ч. I, изд. 6-е, ч. II, изд. 4-е, 1950 (譯者註:本書中譯本由張理京等譯出,1953年由重工業出版社出版,現由高等教育出版社出版。)在“習題彙編”本文中,這教本縮寫作“教程”。

有參加的情形下進行的，他是在偉大的衛國戰爭前線負傷後，經過長期沉重的疾病，在 1949 年二月九日逝世的。參加改編的全體人員，多數是和 Г. Н. Берман 多年共同工作的同志，在這裏都以深刻的景仰和熱烈心情追念這位富有才幹的教師，傑出的數學普及工作者，學識淵博的人，蘇維埃愛國者和優秀的同志。

從事“習題彙編”本版的準備工作的有：И. Г. Араманович, А. Ф. Бермант, Б. А. Кердемский, Р. И. Позойский, М. Г. Шестопал。

全部問題都由 Р. Я. Шостако 重新解算過，編者們謹在此對他表示謝忱。

阿·甫·別爾曼特(А. Ф. Бермант)

上册目錄

序

第一章 函數概念	1
§ 1. 函數及其表示法	1
§ 2. 函數的符號及分類	3
§ 3. 函數的圖形研究	6
§ 4. 一些最簡單的函數	11
§ 5. 冪函數、指數函數和對數函數	18
§ 6. 三角函數和反三角函數	21
§ 7. 計算問題	25
第二章 極限概念	27
§ 1. 基本定義	27
§ 2. 無窮大量，極限運算法則	29
§ 3. 連續函數	33
§ 4. 無窮小量的比較，函數極限值的計算	35
第三章 導數和微分，微分法	43
§ 1. 導數的概念，函數的變化率	43
§ 2. 函數的微分法	47
§ 3. 微分概念，函數的可微分性	65
§ 4. 作為變化率看待的導數(其他的例子)	69
§ 5. 累次微分法	77
第四章 函數和曲線的研究	83
§ 1. 函數“在一點處”的性態	83
§ 2. 一階導數的應用	84
§ 3. 二階導數的應用	94
§ 4. 函數研究中的補充問題，方程的解法	98
§ 5. 台勞公式及其應用	107
§ 6. 曲線的接觸度，曲率	110
§ 7. 計算問題	114

第五章 定積分	115
§ 1. 定積分概念	115
§ 2. 定積分的基本性質	116
§ 3. 定積分的基本性質(續). 牛頓-萊布尼茲公式	121
§ 4. 計算問題	125
第六章 不定積分. 積分法	126
§ 1. 不定積分的概念和不定積分法	126
§ 2. 積分的基本方法	130
§ 3. 可積函數的基本類型	133
第七章 定積分(續). 旁義積分	141
§ 1. 積分計算法	141
§ 2. 近似積分法	147
§ 3. 旁義積分	150
第八章 積分的應用	154
§ 1. 一些幾何的和靜力學的問題	154
§ 2. 物理上的一些問題	169
第九章 級數	180
§ 1. 數項級數	180
§ 2. 函數項級數	184
§ 3. 冪級數	189
§ 4. 台勞級數的幾種應用	191
§ 5. 計算問題	195
答案	196

第一章 函數概念

§ 1. 函數及其表示法

1. 平面凸多角形的內角和是其邊數的函數，問宗標可以取那些值？給出這個函數的解析表達式。

2. 一函數已給如下表：

自變量 x	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
函數 y	-1.5	-1	0	3.2	2.6	0	-1.8	-2.8	0	1.1	1.4	1.9	2.4

用曲線連這些點作它的圖形，並依圖形決定函數在 $x=2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5$ 時的值使得表更“細密”一些。

3. 已給函數的圖形如圖 1 所示，把圖移到毫米紙上並選取自變量的某一些值及自變數和函數的尺度。由圖形量出所取各自變量值對應的函數值，並作這些值的表。

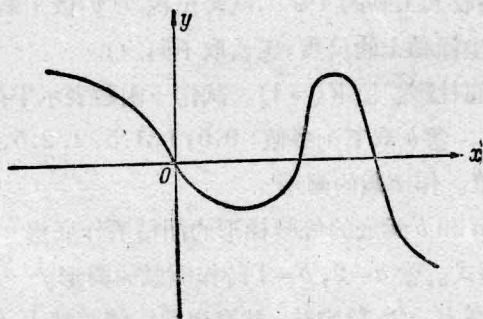


圖 1

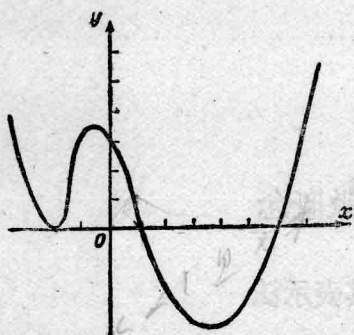


圖 2

4. 已給函數的圖形如圖 2 所示，按圖形回答下面的問題：

(a) 自變量在什麼值時，函數變成 0？

(b) 自變量在什麼值時，函數是正的？

(B) 自變量在什麼值時，函數是負的？

5. 兩個電荷間的作用力和它們中間距離的依存關係是由函數

$$F = \frac{e_1 \cdot e_2}{\varepsilon \cdot r^2}$$

來表示的(庫倫定律)。假定 $e_1 = e_2 = 1$ 且 $\varepsilon = 1$ ，試對 $r = 1, 2, 3, \dots, 10$ 作已給函數的值的表，並描其圖形。

6. 某種稅收是用下面方法來決定的，工薪在 100 盧布以內的不付，工薪在 100 盧布(不包括 100 盧布)到 200 盧布者付 1 盧布，工薪在 200 盧布(不包括 200 盧布)到 500 盧布者付 3 盧布，工薪在 500 盧布(不包括 500 盧布)到 1000 盧布者收 8 盧布，工薪在 1000 盧布以上(不包括 1000 盧布)者收其工薪的 1%。試畫出稅收(y)依工薪(x)所確定的函數的圖形(兩坐標軸上的尺度，應當取不同的)。

7. 已給圓柱體體積 $V (=1)$ 。試作一函數表示半徑 r 對它的高度 h 的依存關係。當 h 取下列各值：0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5 時，求 r 的值。作函數的圖形。

8. 把以 a 和 b 為底的等腰梯形的面積看作底邊 a 上角 α 的函數，試寫出其表達式。當 $a = 2$, $b = 1$ 時作函數的圖形。

9. 在斜高 $l (=2)$ 給定時，試寫出圓錐體體積 V 作為它的高 h 的函數的表達式。

10. 當直角三角形斜邊 $c(=5)$ 一定時, 試表示其一邊長 b 與另一邊長 a 的依從關係。驗證, 這個函數的圖形就是半圓。

§ 2. 函數的符號及分類

符 號

11. 已給函數

$$(a) f(x) = \frac{x-2}{x+1}, \quad (b) \varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}.$$

求: $f(0), f(1), f(2), f(-2), f(-\frac{1}{2}), f(\sqrt{2}), |f(\frac{1}{2})|, \varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(-2), \varphi(4), \varphi(a)$ 。

12. 已給函數 $f(u) = u^3 - 1$,

求: $f(1), f(a), f(a+1), f(a-1), 2f(2a)$ 。

13. 已給函數

$$F(z) = 2^{z-2} \quad \text{和} \quad \varphi(z) = 2^{|z|-2}.$$

求: $F(0), F(2), F(3), F(-1), F(2.5), F(-1.5)$ 和 $\varphi(0), \varphi(2), \varphi(-1), \varphi(x), \varphi(-1) + F(1)$ 。

14. 已給函數

$$\psi(t) = t \cdot a^t,$$

求: $\psi(0), \psi(1), \psi(-1), \psi(\frac{1}{a}), \psi(a), \psi(-a)$ 。

15. $\varphi(t) = t^3 + 1$ 。求: $\varphi(t^2)$ 和 $[\varphi(t)]^2$ 。

16. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 。證明, $F(a) = F(-a)$ 。

17. $\Phi(z) = z^3 - 5z$ 。證明, $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ 。

18. $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$ 。證明, $f(t) = f(\frac{1}{t})$ 。

19. $f(x) = \sin x - \cos x$ 。證明, $f(1) > 0$ 。

20. $\psi(x) = \log x$ 。證明, $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$ 。

21. $F(z) = a^z$ 。(1)證明, 對於任意的 z , 關係式 $F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0$ 都是正確的。(2)證明, $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$ 。

22. 已給函數 $f(x)$ 的表:

自變量 x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
函數 $f(x)$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$

驗證, 對於表中的值有等式 $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ 成立, 如果預先知道函數有形式 $f(x) = m^x$, 求它的解析表達式, 作圖。

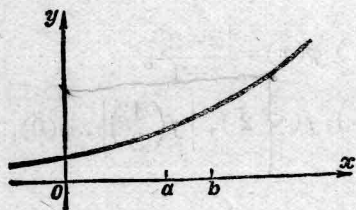


圖 3

23. 已給函數 $y = f(x)$ 的圖形和自變量 x 的值 a 與 b (圖 3), 在圖上作出 $f(a)$ 和 $f(b)$ 。比 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的幾何意義如何?

? 24. 試證, 如果 $y = f(x)$ 圖上的任一條弦都高出於它所張的弧, 則不等式 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 對所有的 $x_1 \neq x_2$ 都成立。

25. 已給函數 $f(x)$ 。指出方程 $f(x) = f(a)$ 的根。

26. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 。求方程 (a) $f(x) = f(0)$, (b) $f(x) = f(-1)$ 的所有的根。

27. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$ 。求方程 $f(x) = f(-2)$ 的所有的根。

28. $F(x) = x^2 + 6$, $\varphi(x) = 5x$ 。求方程 $F(x) = |\varphi(x)|$ 的所有的根。

29. $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = x - 2$ 。解方程 $|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$ 。

疊函數

30. 已給: $y = z^2$, $z = x + 1$ 。把 y 表示為 x 的函數。

31. 已給: $y = \sqrt{z + 1}$, $z = \lg^2 x$ 。把 y 表示為 x 的函數。

32. 已給: $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{x + 1}$, $x = a^t$ 。把 y 表示為 t 的函數。

33. 已給: $y = \sin x$, $v = \log y$, $u = \sqrt{1+v^2}$ 。把 u 表示為 x 的函數。

34. 已給: $y = 1+x$, $z = \cos y$, $v = \sqrt{1-z^2}$ 。把 v 表示為 x 的函數。

35. 用幾個基本初等函數表示下面的疊函數:

(1) $y = \sin^3 x$, (2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$, (3) $y = \log \operatorname{tg} x$,

(4) $y = \sin^3(2x+1)$, (5) $y = 5^{(3x+1)^2}$ 。

36. $f(x) = x^3 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$ 。求:

(a) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$, (б) $\varphi[f(1)]$, (в) $\varphi[f(2)]$,

(г) $f[\varphi(x)]$, (д) $f[f(x)]$, (e) $f\{f[f(1)]\}$ 。

37. 如果 $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$, 試求函數表達式 $f(x) = ax^2 + bx + 5$ 裏的 a 和 b 的值。

38. 試指出滿足方程

$$f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$$

的 x 的值。

39. 驗試: 下列按照組成函數 $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ 的已知圖形作疊函數 $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ 的圖形的方法是正確的: 在函數 $\varphi(x)$ 的圖形上從對應於自變量 x 的已給值的點 A (圖 4), 引直線平行於 Ox 軸交第一和第三象限的分角線於點 B , 由 B 點引直線平行於 Oy 軸交函數 $f(x)$ 的圖形於點 C 。點 C 的縱坐標就代表疊函數 $F(x)$ 的值,

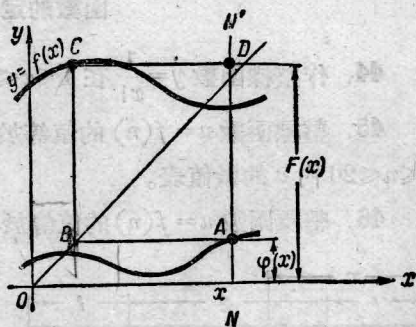


圖 4

如果由點 C 引直線平行於 Ox 軸, 則它與直線 NN' 的交點 D 就是函數 $F(x)$ 的圖形上對應於所取的 x 值的點。

函數的分數

40. 將下列方程所給的隱函數寫成 y 的顯函數的形式：

- (1) $x^2 + y^2 = 1$; (2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 (3) $x^3 + y^3 = a^3$; (4) $xy = C$;
 (5) $2^{xy} = 5$; (6) $\log x + \log(y+1) = 4$;
 (7) $2^{x+y}(x^2-2) = x^3+7$; (8) $(1+x)\cos y - x^2 = 0$ 。

41. 試將方程 $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$ 所確定的隱函數 y 變成顯函數。

42. 寫出由方程 $(y^2 - 16)^2 = 25 - x^2$ 所確定的隱多值函數 y 各單值枝的顯表達式。

43*. 試證，當 $x > 0$ 時，方程 $y + |y| - x - |x| = 0$ 所表示的函數 y 的圖形是第一象限角的分角線，而當 $x \leq 0$ 時，這個函數是許多值，並且它的“圖形”是第三象限角內所有點的集合（包括其邊界上的各點）。

§ 3. 函數的圖形研究

函數的定義域

44. 作整標函數 $y = \frac{1}{x!}$ 在 $1 \leq x \leq 6$ 內的數值表。

45. 整標函數 $u = f(n)$ 的值等於不超過 n 的質數的個數。試作 $1 \leq n \leq 20$ 內 u 的數值表。

46. 整標函數 $u = f(n)$ 的值等於宗標異於 1 和 n 本身的整因子個數。試作 $1 \leq n \leq 20$ 內 u 值的表。

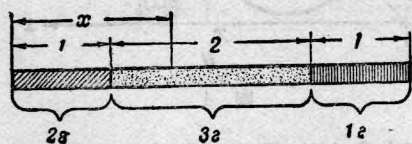


圖 5

47. 一個橫樑是由三段長各為 1, 2, 1 重量各為 2, 3, 1 所組成的（圖 5）。以 x 為長的變動段 AM 的重量是 x 的函數。當 x 為

何值時這個函數是確定的？作其解析表達式並構圖。

48. 一個塔具有下述的形式：在底半徑為 $2R$ （下底）和 R （上底）高為 R 的正圓錐台的上面是一個半徑為 R 高為 $2R$ 的圓柱體；在圓柱體上面是一個半徑為 R 的半球。把塔的橫斷面面積 S 表示為由圓錐台下底到它的距離 x 的函數。作這個函數的圖形。

49. 在半徑為 R 的球內作一個內接圓柱體。試寫出這個圓柱體體積 V 與其高 x 的函數依從關係。求這個函數的定義域和其解析表達式的定義域。

50. 在半徑為 R 的球內作一個內接正圓錐體。試寫出這個圓錐體的側面積 S 與其斜高 x 的函數依從關係。求這個函數的定義域和其解析表達式的定義域。

在問題 51 和 52 中指出各函數的定義域：

51. (1) $y = 1 - \log x$; (2) $y = \log(x+3)$;
 (3) $y = \sqrt{5-2x}$; (4) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;
 (5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; (6) $y = \frac{1}{x^2+1}$;
 (7) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; (8) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$;
 (9) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; (10) $y = \frac{1}{x^3-x}$;
 (11) $y = \sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; (12) $y = \log_x 2$;
 (13) $y = \arcsin(x-2)$; (14) $y = \arcsin \sqrt{2x}$;
 (15) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$;
 (16) $y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \log(4-x)$;
 (17) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \log(2x-3)$;

$$(18) y = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2};$$

$$(19) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}; \quad (20) y = \log \sin x;$$

$$(21) y = \arccos \frac{2}{2+\sin x}; \quad (22) y = \sqrt{-px} \quad (p>0).$$

$$52. (1) y = \arccos(1-2x); \quad (2) y = \arcsin \frac{x}{4};$$

$$(3) y = \arccos \frac{1-2x}{4}; \quad (4) y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}};$$

$$(5) y = \frac{3}{4-x^2} + \log(x^3-x); \quad (6) y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x};$$

$$(7) y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1};$$

$$(8) y = \sqrt{1-|x|};$$

$$(9) y = \log \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5};$$

$$(10) y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(11) y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}};$$

$$(12) y = (x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}};$$

$$(13) y = \log(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x});$$

$$(14) y = \log[1 - \log(x^2-5x+16)].$$

53. 試舉出用解析式給出的函數的例：

(1) 只定義在區間 $-2 \leq x \leq 2$ 內；

(2) 只定義在區間 $-2 < x < 2$ 內而在 $x=0$ 時無定義；

(3) 除 $x=2, x=3, x=4$ 外，到處都有定義。

54. 試求用已知方程：

$$(1) y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0, \quad (2) y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$$

所表示的函數 $y = \varphi(x)$ 的各單值枝的定義域。

函數的初等性質

55. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; (a) 指出函數 $f(x)$ 的定義; (b) 說明這個函數不為負; (c) 函數 $f(x)$ 的值的集合是怎樣的?

56. 試求下列各函數的同號區間和零點:

(1) $y = 3x - 6$; (2) $y = x^2 - 5x + 6$; (3) $y = 2^{x-1}$;

(4) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$; (5) $y = |x|$.

57. 下列函數中那些是奇函數, 那些是偶函數, 那些函數既不是奇函數又不是偶函數?

(1) $y = x^4 - 2x^2$;

(2) $y = x - x^2$;

(3) $y = \cos x$;

(4) $y = 2^x$;

(5) $y = x - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{120}$;

(6) $y = \sin x$;

(7) $y = \sin x - \cos x$;

(8) $y = 1 - x^2$;

(9) $y = \operatorname{tg} x$;

(10) $y = 2^{-x^2}$;

(11) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$;

(12) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$;

(13) $y = \frac{x}{a^x - 1} \ (a > 1)$;

(14) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1} \ (a > 1)$;

(15) $y = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \ (a > 1)$;

(16) $y = 2^{x-x^2}$.

58. 把下列各函數表示為偶函數和奇函數的和的形式:

(1) $y = x^2 + 3x + 2$;

(2) $y = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$;

(3) $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$.

59. 證明 $f(x) + f(-x)$ 是偶函數, 而 $f(x) - f(-x)$ 是奇函數。

60. 把下列函數表示為偶函數和奇函數的和的形式:

(1) $y = a^x$;

(2) $y = (1+x)^{100}$ (見題 59)。

61. 試證，兩個偶函數的乘積是偶函數，兩個奇函數的乘積也是偶函數，一個奇函數和一個偶函數的乘積是奇函數。

62. 下列函數那些是週期函數？

(1) $y = \sin^2 x$;

(2) $y = \sin x^2$;

(3) $y = x \cdot \cos x$;

(4) $y = \sin \frac{1}{x}$;

(5) $y = 1 + \operatorname{tg} x$;

(6) $y = 5$;

(7) $y = E(x)$;

(8) $y = x - E(x)$ 。

[函數 $E(x)$ 是這樣定義的：如果 x 是整數，則 $E(x) = x$ ，如果 x 不是整數，則 $E(x)$ 等於比 x 小的最大整數。例如 $E(2) = 2$ ， $E(3.25) = 3$ ，

$E(-1.37) = -2$]

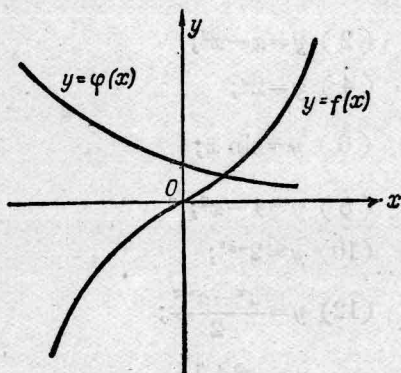


圖 6

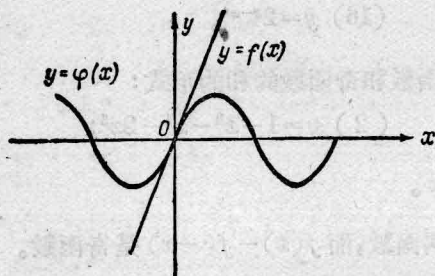


圖 7

63. 試作週期 $T=1$ ，在半開區間 $(0, 1]$ 內由公式 (1) $y = 2x$ ；(2) $y = x^2$ 所給的週期函數的圖形。

64. 指出函數：

(1) $y = |x|$;

(2) $y = |x| - x$

的增區間，減區間和不變區間。

65. 指出函數：

(1) $y = \sin^2 x$;

(2) $y = \cos x^2$;

(3) $y = 1 - \sin x$;

(4) $y = 2^x$

的最大值和最小值。

66. 就：(1)圖 6 所示；(2)圖 7 所示，用圖形相加法作函數 $y = f(x) + \varphi(x)$ 的圖形。