普通高等教育“十一五”国家级规划教材

电磁场与电磁波基础教程

李一玫 主编
邵小桃 郭勇 副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

电磁场与电磁波基础教程

李一玫　主　编

邵小桃　郭　勇　副主编

中国铁道出版社

2010年·北京

内 容 简 介

本书为普通高等教育"十一五"国家级规划教材。本书对电磁场与电磁波的基本理论做了系统介绍，全书共有 7 章，内容包括矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、平面波和导行波。除每章有本章小结外，每节都附有思考与练习题，供读者对本节内容作进一步探讨和复习巩固之用。为便于读者自学，书末附有重要的矢量恒等式、贝塞尔函数、基本常数(量)的符号和单位等附录及参考答案。

本书可作为通信、电子、自动化控制等专业的"电磁场与电磁波"课程的本科生教材，也可作为相近专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波基础教程 / 李一玫主编．—北京：中国铁道出版社，2010.2

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978-7-113-11165-6

Ⅰ.①电… Ⅱ.①李… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 041013 号

书　　名：电磁场与电磁波基础教程
作　　者：李一玫　主编

责任编辑：武亚雯　**电话：**010-51873134　**电子信箱：**zhuminjie_0@163.com　**教材网址：**www.tdjiaocai.com
编辑助理：朱敏洁
封面设计：冯龙彬
责任校对：龚长江
责任印制：陆　宁

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）
网　　址：http：//www.tdpress.com
印　　刷：三河市华丰印刷厂
版　　次：2010 年 2 月第 1 版　　2010 年 2 月第 1 次印刷
开　　本：787mm×1092mm　1/16　印张：16.75　字数：420 千
书　　号：ISBN 978-7-113-11165-6
定　　价：32.00 元

前言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是为适应现代的科学环境与教学理念而编写的一本适用于通信、电子、自动化控制等专业的本科生教材。希望通过本书表达出在教学实践过程中所形成的一些实用的教学理念，并使之尽可能适应目前本科生的学习特点。

电磁场理论之所以被认为难懂、难教、难学，是因为电磁场与电磁波虽客观存在，但却不能亲眼所见，其存在的规律必须用复杂的数学工具来描述。因此，本书在编写过程中力求把数学工具的使用及其所代表的物理含义阐述清楚，注重物理概念的讲解和对物理定律的理解，及时总结各种场的分析方法，并结合工程实际把理论用在实处。

本书第一章较为完整地介绍了矢量分析，包括矢量的各种运算的定义、运算法则和有关场论的若干定理，强调了梯度、散度（通量）和旋度（环量）的物理意义及其在正交坐标系中的计算式，指出了矢量场的一般分析方法。

第二章至第四章讲述静态场，强调分析方法的同一性，即先从实验定律、实验现象出发抽象出物理场（静电场、恒定电场和恒定磁场），然后按照亥姆霍兹定理内容研究该矢量场的基本方程及边界条件。边值问题的基本的求解方法分离变量法和镜像法放在静电场中讲解，并在恒定电场和恒定磁场中具体应用。之后分析静态场中的分布参数电容、电导和电感，最后讨论能量和力。

第五章时变电磁场仍由实验定律（法拉第电磁感应定律）出发，演绎出时变电磁场的基本方程——麦克斯韦方程组，并导出边界条件。在导出无源区的麦克斯韦方程满足波动方程后，介绍了电磁波的一般概念，最后从动态位是滞后位的理论中以例题的形式简单介绍了偶极子天线的辐射概念。

第六章专门介绍平面波，包括均匀平面波的一般传播特性和均匀平面波在介质分界面或导体表面上的垂直入射和斜入射问题。

第七章专门介绍导行波，包括平面波在矩形波导、圆波导、同轴线、谐振腔等导波装置中的模式场。

本书在编写上具有以下特点：

1. 插图丰富，除各种说明图例外，对各种场分布也尽可能多地给出图例，使抽象的场变得形象、具体。

2. 每一节都留有思考与练习题，这部分题目大致分为三种类型，一种是对本节中的公式的简单应用，一种是对文中未尽的理论的补充证明，一种是对文中内容的进一步探讨和实际应用。

3. 每一章都有小结，对本章的主要内容、公式进行了总结和梳理。

4. 每一章都备有充足的例题和习题，书后附有习题答案。

本书由北京交通大学李一致主编。其中李一致编写第一、三、五、六章，第二章第一至六节及第九、十节；邵小桃编写第四、七章；郭勇编写第二章第七、八节。张波在本书编写过程中给予了很多帮助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，文中难免有错误或不妥之处，诚恳欢迎批评、指正。

编　者

2010 年 1 月

目 录

第一章

矢量分析

矢量分析是研究场论的重要数学工具，它以矢量代数为基础，以矢量微积分为主要研究内容，是专门应场论的研究而生的一种数学语言。利用这种语言，可以把千百年来人类观测电磁效应所得出的规律，用简洁明快的符号精确地表述出来。这样做不仅可以使电磁理论系统化，还便于我们对其深刻理解和应用，从而有利于进一步的深入研究和探索。

第一节　标量场和矢量场

什么是场？在数学上，一个场就是一个函数；在物理上，场描述在空间某一区域内所有点上的一个物理量（称为场量）。因此，场的重要属性，一是占有一定的空间，二是可以表达成函数形式，并且，除了有限个点、线、面外，场量应处处连续、可微。

一、场的分类

按照场量在空间是否具有方向，场可分为标量场和矢量场。

标量场的场量是标量，即场域内每个点对应的物理量是一个数。如温度场、密度场、电位场等，都是常见的标量场。

矢量场的场量是矢量，即场域内每个点对应的物理量必须同时用大小和方向来描述。如速度场、加速度场、重力场、电场和磁场等，都是矢量场。

按照场量是否随时间变化，场又可分为静态场和时变场。

静态场的场量不随时间变化，也称时不变场，可有静态标量场和静态矢量场。本书将在第二、三、四章分别讨论由静止电荷产生的静电场和恒定电流产生的恒定电场及恒定磁场。

时变场的场量随时间变化，也称动态场，可有时变标量场和时变矢量场。本书将在第五、六、七章讨论有关时变电磁场和电磁波的理论。

二、场的表示方法

1. 函数表示法

标量场用标量函数表示，如温度场可表示为 $T(x,y,z)$（静态场），密度场可表示为 $\rho(x,y,z,t)$（时变场）。

矢量场用矢量函数表示。本书中所有矢量均用黑体字表示，如电场强度 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_E E$，其中 $\boldsymbol{a}_E$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 方向上的单位矢量，$\boldsymbol{a}_E=\dfrac{\boldsymbol{E}}{E}$，$E$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 的模值，即 $E=|\boldsymbol{E}|$。矢量运算往往在某一坐标系中进行。在正交坐标系中，一个矢量（场）可以分解为沿着三个坐标轴的分量，例如在直角坐标系中：

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{a}_x E_x(x,y,z)+\boldsymbol{a}_y E_y(x,y,z)+\boldsymbol{a}_z E_z(x,y,z) \tag{1-1-1}$$

而模值

$$E = |\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_x^{\ 2} + E_y^{\ 2} + E_z^{\ 2}} \tag{1-1-2}$$

应该注意的是，单位矢量仅仅表示其模值为1，若其方向固定不变，即为常矢量，其导数为零；若其方向随某变量而变化，则仍是矢量函数，求导时应按函数进行求导。如

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\boldsymbol{a}_E E) = E\frac{\partial \boldsymbol{a}_E}{\partial \varphi} + \boldsymbol{a}_E \frac{\partial E}{\partial \varphi} \tag{1-1-3}$$

2. 场图表示法

标量场可用等值线（二维）或等值面（三维）来表示场的分布情况。等值面就是函数值相等的点所构成的曲面，例如标量场 $u(x,y,z) = x + y + z$ 的等值面方程为

$$u(x,y,z) = x + y + z = C(\text{常数}) \tag{1-1-4}$$

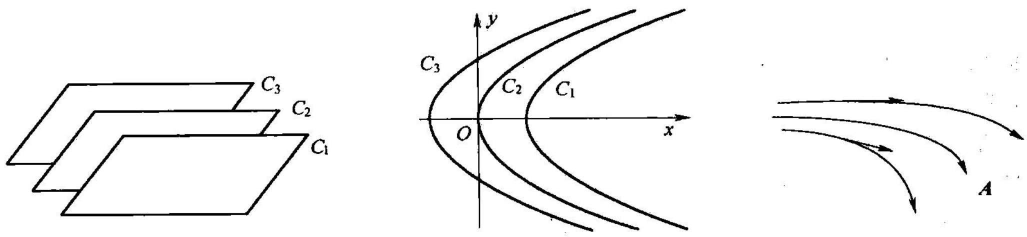
这是一族平行平面，如图 1-1-1(a)所示。又如二维标量场 $u(x,y) = x - y^2$ 的等值线方程为

$$u(x,y) = x - y^2 = C \tag{1-1-5}$$

这是一族抛物线，如图 1-1-1(b)所示。

矢量场在空间的分布可用矢线来表示，矢线上每一点的切线方向表示该点场量的方向，场量的大小则用矢线的疏密程度来表示，矢线密集处表示场量的模值大，矢线稀疏处表示场量的模值小，也就是说，可用垂直穿过单位面积的矢线根数来表示矢量场的大小，如图 1-1-1(c)所示。

对于时变场，场图只能表示每一时刻的场的分布。



(a) 标量场的等值面　　(b) 等值线　　(c) 矢量场的矢线

图 1-1-1　标量场和矢量场

思考与练习题

1-1　下列物理量哪些是矢量，哪些是标量？

(1)重量；(2)频率；(3)功；(4)速率；(5)电压；(6)动量；(7)能量；(8)距离；(9)磁场强度；(10)电场力。

1-2　画出下列矢量场的图形，及其模值的等值线：

(1) $\boldsymbol{v}(x,y) = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y$；(2) $\boldsymbol{v}(x,y) = -\boldsymbol{a}_x x - \boldsymbol{a}_y y$。

第二节　矢量运算

本课程将使用到矢量的加减法、矢量的数乘、矢量的点乘和叉乘以及矢量的微积分，其中

矢量的微积分运算是重点和难点，将在后面几节重点介绍。

矢量加法 两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相加，可采用平行四边形法则或三角形法则，如图 1-2-1 所示，使两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的始端重合，以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为邻边做平行四边形，其对角线即为和矢量 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；或通过平移将 $\boldsymbol{A}$ 矢量的末端和 $\boldsymbol{B}$ 矢量的始端相接，则连接 $\boldsymbol{A}$ 首 $\boldsymbol{B}$ 尾的有向线段即为和矢量。

可以证明，矢量加法服从加法的交换率和结合率，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1-2-1}$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \tag{1-2-2}$$

矢量减法 矢量差 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，可写成矢量和的形式 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，其中 $-\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{B}$ 大小相等方向相反的矢量，于是可利用平行四边形法则或三角形法则做加法运算，如图 1-2-2 所示。

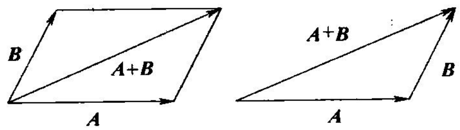


图 1-2-1 矢量加法

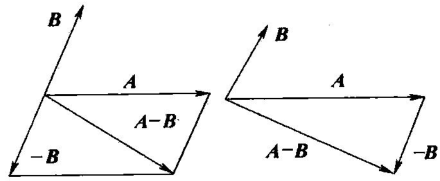


图 1-2-2 矢量减法

矢量的数乘 一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和一个标量 k 相乘，结果是一个矢量，即

$$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A} \tag{1-2-3}$$

当 $k>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 方向相同，当 $k<0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 方向相反。两种情况都称矢量 $\boldsymbol{B}$ 和矢量 $\boldsymbol{A}$ 平行，而 $\boldsymbol{B}$ 的模值是 $\boldsymbol{A}$ 模值的 $|k|$ 倍。

两矢量的标量积 两矢量的标量积也称点积或点乘，写作 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，定义其运算结果为标量，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1-2-4}$$

其中 θ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的较小夹角，如图 1-2-3 所示。

特别地，若 $\boldsymbol{A}$ 是单位矢量 $\boldsymbol{a}_A$，则

$$\boldsymbol{a}_A\cdot\boldsymbol{B}=B\cos\theta=B_A \tag{1-2-5}$$

称为矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的分量(标投影)，而

$$(\boldsymbol{a}_A\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{a}_A=(B\cos\theta)\boldsymbol{a}_A=B_A\boldsymbol{a}_A \tag{1-2-6}$$

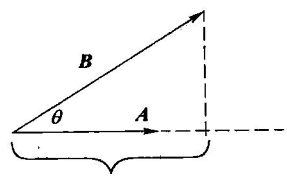


图 1-2-3 两矢量的标量积

称为矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的分矢量(矢投影)。利用式(1-2-5)和式(1-2-6)可写出一个矢量在正交坐标系中沿三个相互垂直的坐标方向的标投影和矢投影。例如，在直角坐标系中，若位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y、z 坐标轴的夹角分别为 α、β、γ，则 $\boldsymbol{r}$ 在 x、y、z 坐标轴上的分量分别为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_x=r\cos\alpha,\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_y=r\cos\beta,\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_z=r\cos\gamma$$

于是 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系中即可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x r\cos\alpha+\boldsymbol{a}_y r\cos\beta+\boldsymbol{a}_z r\cos\gamma \tag{1-2-7}$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 称为方向余弦。

式(1-2-4)也可用来求出两个非零矢量之间的夹角

$$\theta=\cos^{-1}\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB} \tag{1-2-8}$$

当 $\theta=90°$ 时，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，因此，两矢量的标量积是否为零可作为两矢量是否垂直的判据。即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B} \tag{1-2-9}$$

当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ 时，$\theta=0°$，可求出矢量的模

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{1-2-10}$$

标量积的运算服从交换律和分配律。

交换律：
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1-2-11}$$

分配律：
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1-2-12}$$

两矢量的矢量积　两矢量的矢量积也称叉积或叉乘，写作 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，定义其运算结果为矢量，其方向垂直于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所构成的平面，且指向由矢量 $\boldsymbol{A}$ 经 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间较小夹角按右手螺旋转向 $\boldsymbol{B}$ 时右手拇指所指的方向，如图 1-2-4 所示；其大小为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的模值与它们之间较小夹角的正弦之积。即

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB\sin\theta \tag{1-2-13}$$

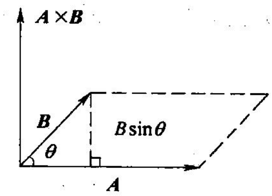


图 1-2-4　两矢量的矢量积

若以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边做平行四边形，可看出矢量积的模值即是该平行四边形的面积。式(1-2-13) 也可用来求两矢量间的夹角，但不如式(1-2-8) 计算方便。不过，当 $\theta=90°$ 时，若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的单位矢量分别为 $\boldsymbol{a}_A$、$\boldsymbol{a}_B$，则其所构成平面的法线方向可直接用叉乘来表示，即

$$\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_A\times\boldsymbol{a}_B \tag{1-2-14}$$

当 $\theta=0°$ 或 $180°$ 时，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$。因此，两矢量的矢量积是否为零矢量可作为两矢量是否平行的判据。即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B} \tag{1-2-15}$$

当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ 时，$\theta=0°$，于是

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0} \tag{1-2-16}$$

矢量积的运算服从分配律，但不服从交换律：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1-2-17}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1-2-18}$$

三矢量的混合积　三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的混合积定义为

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=ABC\sin\theta\cos\varphi \tag{1-2-19}$$

其中 θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间的夹角，φ 是矢量 $\boldsymbol{C}$ 与($\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$)间的夹角。从标量积和矢量积的定义来看，三矢量的混合积表示以这三个矢量为邻边的平行六面体的体积，如图 1-2-5 所示。

可以证明，当运算符号不变，三矢量循环变换次序（向左或向右）时，混合积的结果不变，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\\&=-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{1-2-20}$$

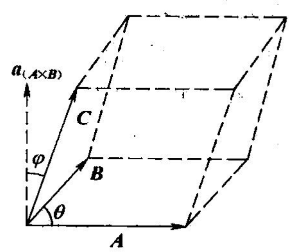


图 1-2-5　混合积

三矢量的二重矢量积　三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的二重矢量积定义为按照顺序或优先级别做两次叉乘运算，如 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，可以证明二重矢量积不满足结合律，但满足下面的恒等式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1-2-21}$$

思考与练习题

1-3 已知 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，证明：若矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共面，则 $x=y=0$。

1-4 若 O 为三角形 ABC 内任一点，且 P、Q、R 分别为 AB、BC、CA 的中点。

(1)证明 $OA+OB+OC=OP+OQ+OR$；

(2)若 O 在三角形外部，上述结果是否成立？证明之。

1-5 化简 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A})$。

第三节 正交曲线坐标系

矢量运算定义了矢量之间的加减法和乘法运算规则，通过一般意义上的作图运算，我们可以直观地了解各种矢量运算的结果和意义。但当各种运算交织在一起，运算过程较复杂时，就需要在选定的坐标系中用数学的方法将矢量分解成三个相互垂直的分量来处理，坐标系的选择应以矢量在该坐标系中分解的分量数最少为宜，这样可以减小运算量。本节介绍最常见的三种正交坐标系：直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

正交坐标系中的基本概念：三张正交的曲面称为坐标面，它们相交出三条正交的曲线称为坐标轴。坐标轴上不同位置的识别用坐标变量来表示，坐标变量可以是长度，也可以是角度。坐标轴的方向指向该坐标变量增加的方向，该方向也是坐标变量取任一常数时所得相应坐标面的法线方向。坐标轴的交点即为坐标原点。

一、直角坐标系

直角坐标系由三张正交的平面——x 坐标面(yOz 面)、y 坐标面(xOz 面)和 z 坐标面(xOy 面)相交成三条正交的直线(x 轴、y 轴和 z 轴)，坐标轴的正方向分别用单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 来表示，它们都是常矢量。

空间任意一点的位置 $P(x,y,z)$ 可用由原点指向 P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示，如图 1-3-1 所示，位置矢量在三个坐标轴上的标投影分别是 x，y 和 z，矢投影分别是 $\boldsymbol{a}_x x$，$\boldsymbol{a}_y y$ 和 $\boldsymbol{a}_z z$，于是位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z \tag{1-3-1}$$

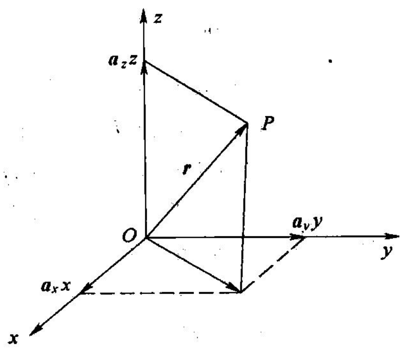


图 1-3-1 直角坐标系

类似地，若矢量函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 在任意点的标投影分别为 $A_x(x,y,z)$，$A_y(x,y,z)$ 和 $A_z(x,y,z)$，则可表示为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\boldsymbol{a}_x A_x(x,y,z)+\boldsymbol{a}_y A_y(x,y,z)+\boldsymbol{a}_z A_z(x,y,z) \tag{1-3-2}$$

矢量加减法 若矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y A_y+\boldsymbol{a}_z A_z \tag{1-3-3a}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y B_y+\boldsymbol{a}_z B_z \tag{1-3-3b}$$

则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{a}_y(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{a}_z(A_z\pm B_z) \tag{1-3-3c}$$

矢量乘法 由于三个单位矢量相互正交，任意两个点积为

$$\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_z = 1 \tag{1-3-4}$$

或

$$\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_x = 0 \tag{1-3-5}$$

利用以上两式结果和乘法分配律，矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z) \cdot (\boldsymbol{a}_x B_x + \boldsymbol{a}_y B_y + \boldsymbol{a}_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\end{aligned} \tag{1-3-6}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模值

$$A = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2} \tag{1-3-7}$$

三个单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 之间呈右手螺旋关系，其叉积为

$$\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{0} \tag{1-3-8}$$

$$\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z,\ \boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_x,\ \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{a}_y \tag{1-3-9}$$

利用以上两式结果和乘法分配律，矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z) \times (\boldsymbol{a}_x B_x + \boldsymbol{a}_y B_y + \boldsymbol{a}_z B_z) \\ &= \boldsymbol{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \boldsymbol{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \boldsymbol{a}_z (A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned} \tag{1-3-10}$$

上式结果还可以很方便地写成行列式的形式

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1-3-11}$$

注意，上式只是为了方便记忆借用了行列式的形式，并不具有行列式的形质，因此只能按照第一行展开。

三矢量的混合积也可写成行列式的形式

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1-3-12}$$

二、圆柱坐标

圆柱坐标系保留了直角坐标系的 z 坐标面，组合了平面极坐标(ρ,φ)，空间任一点记作 $P(\rho,\varphi,z)$，其中 ρ 是点 P 到 z 轴的垂直距离，也即位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 在 xOy 平面上的投影，$\rho \in [0, +\infty)$，单位矢量 $\boldsymbol{a}_\rho$ 向外指向 ρ 增加的方向，ρ 坐标面是半径 ρ 为常数的圆柱面；φ 是点 P 的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 在 xOy 平面上的投影与正 x 轴之间的夹角，$\varphi \in [0, 2\pi]$，规定 P 点反时针转时 φ 角增大，单位矢量 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 指向圆柱坐标面与 z 坐标面相交出的圆的切线方向，φ 坐标面是 φ 角为常数且过 z 轴的半平面，如图 1-3-2 所示。

从图中可以得出圆柱坐标和直角坐标变量之间的关系

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \tag{1-3-13}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1-3-14}$$

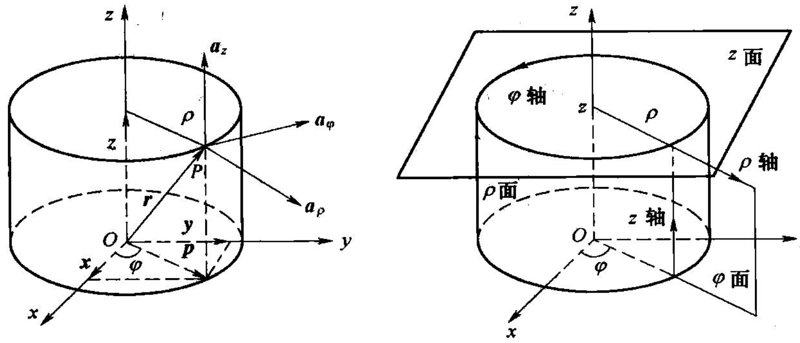
位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_\rho \rho + \boldsymbol{a}_z z \tag{1-3-15}$$

三个单位矢量 $\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 之间呈右手螺旋关系，任意两个之间的叉积为

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\varphi \times \boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{0} \tag{1-3-16}$$

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{a}_z,\ \boldsymbol{a}_\varphi \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_\rho,\ \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\varphi \tag{1-3-17}$$



(a) 圆柱坐标系中点的投影　　(b) 圆柱坐标系的三个坐标面

图 1-3-2 圆柱坐标系

应该注意的是，$\boldsymbol{a}_\rho$ 和 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 的模值都是1，但方向却随 φ 角的不同而变化，因此不是常矢量，而是 φ 的函数。

圆柱坐标系中任意一点处两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的加、减、乘等运算与直角坐标系相类似，事实上，在正交坐标系中，若将三个正交的单位矢量分别用 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 表示，矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 写为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_1 A_1 + \boldsymbol{a}_2 A_2 + \boldsymbol{a}_3 A_3$ 和 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_1 B_1 + \boldsymbol{a}_2 B_2 + \boldsymbol{a}_3 B_3$，则矢量运算可用下列通式来表示

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_1 (A_1 \pm B_1) + \boldsymbol{a}_2 (A_2 \pm B_2) + \boldsymbol{a}_3 (A_3 \pm B_3) \tag{1-3-18}$$

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{1-3-19}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \tag{1-3-20}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{1-3-21}$$

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{1-3-22}$$

单位矢量的坐标变换　将空间任意一点投影到 xOy 平面上，单位矢量 $\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\varphi$ 沿 x 和 y 轴分解及 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 沿 ρ 和 φ 轴分解示意图如图 1-3-3 所示，从中可见

$$\boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_x \cos\varphi + \boldsymbol{a}_y \sin\varphi \tag{1-3-23a}$$

$$\boldsymbol{a}_\varphi = -\boldsymbol{a}_x \sin\varphi + \boldsymbol{a}_y \cos\varphi \tag{1-3-23b}$$

$$\boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{a}_\rho \cos\varphi - \boldsymbol{a}_\varphi \sin\varphi \tag{1-3-24a}$$

$$\boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_\rho \sin\varphi + \boldsymbol{a}_\varphi \cos\varphi \tag{1-3-24b}$$

单位矢量的导数　式(1-3-23)显示，单位矢量 $\boldsymbol{a}_\rho$ 和 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 是坐标 φ 的函数，其导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_\rho}{\mathrm{d}\varphi} = -\boldsymbol{a}_x \sin\varphi + \boldsymbol{a}_y \cos\varphi = \boldsymbol{a}_\varphi \tag{1-3-25a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\boldsymbol{a}_x \cos\varphi - \boldsymbol{a}_y \sin\varphi = -\boldsymbol{a}_\rho \tag{1-3-25b}$$

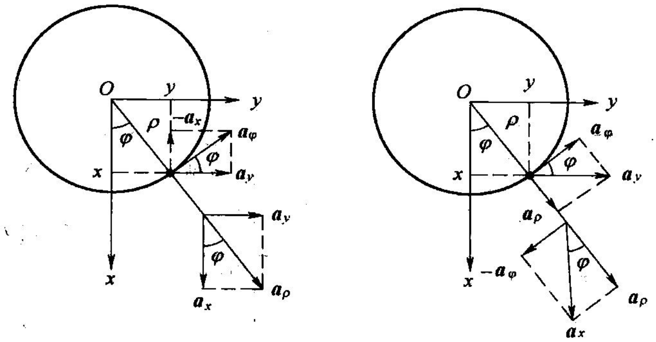


图 1-3-3　单位矢量的分解

矢量的坐标变换　同一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 在不同的坐标系有不同的表达式，它在各个坐标系中的投影也不相同。在圆柱坐标中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho A_\rho + \boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi + \boldsymbol{a}_z A_z \tag{1-3-26}$$

它在直角坐标系中的投影

$$A_x = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_x = A_\rho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi \tag{1-3-27a}$$

$$A_y = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_y = A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi \tag{1-3-27b}$$

类似的方法可以得到

$$A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi \tag{1-3-28a}$$

$$A_\varphi = - A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \tag{1-3-28b}$$

三、球 坐 标

球坐标系保留了圆柱坐标的 φ 坐标面，组合了位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 及其与正 z 轴的夹角 θ，空间任一点记作 $P(r,\theta,\varphi)$，其中变量 r 是坐标原点到点 P 距离，$r \in [0, +\infty)$，单位矢量 $\boldsymbol{a}_r$ 指向 r 增加的方向，r 坐标面是半径 r 为常数的球面；变量 θ 是点 P 的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与正 z 轴之间的夹角，规定 P 点与 $+z$ 轴重合时 θ 为零，P 点向 $-z$ 轴旋转时 θ 角增大，$\theta \in [0, \pi]$，单位矢量 $\boldsymbol{a}_\theta$ 指向 φ 坐标面（半平面）与 r 坐标面（球面）相交出的半圆的切线方向，θ 坐标面是 θ 角为常数所形成的以 z 轴为轴线的圆锥面，如图 1-3-4 所示。

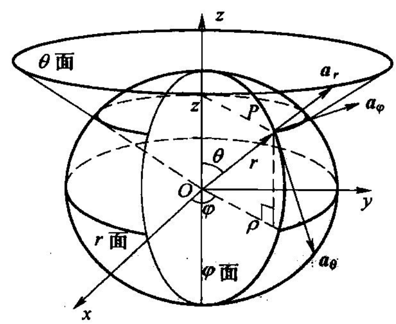


图 1-3-4　球坐标系

从图 1-3-4 中可得出球坐标与直角坐标的关系

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta \tag{1-3-29a}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \tan^{-1}\sqrt{(x^2 + y^2)/z},\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \tag{1-3-29b}$$

位置矢量在球坐标系中的表达式最为简单

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_r r \tag{1-3-30}$$

而三个单位矢量 $\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_\theta$ 和 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 之间呈右手螺旋关系，因此其叉积为

$$\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\varphi \times \boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{0} \tag{1-3-31}$$

$$\boldsymbol{a}_r\times\boldsymbol{a}_\theta=\boldsymbol{a}_\varphi,\ \boldsymbol{a}_\theta\times\boldsymbol{a}_\varphi=\boldsymbol{a}_r,\ \boldsymbol{a}_\varphi\times\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_\theta \tag{1-3-32}$$

从图 1-3-4 可以看出，这三个矢量的方向都随 θ 和 φ 变化，因此它们不是常矢量，而是 θ 和 φ 的函数。

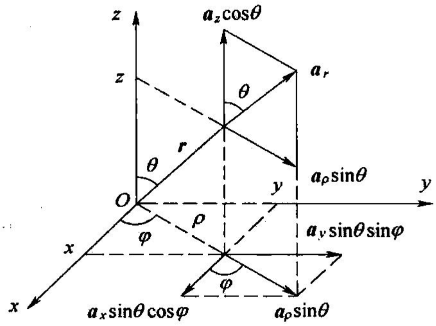
球坐标系中任意一点处两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的加、减、乘等运算与直角坐标和圆柱坐标相类似，参看式(1-3-18)～(1-3-22)。

单位矢量的坐标变换 将空间任意一点处的单位矢量 $\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_\theta$ 和 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 沿 x、y 和 z 轴分解，如图 1-3-5 所示($\boldsymbol{a}_\varphi$的分解同圆柱坐标)，可得

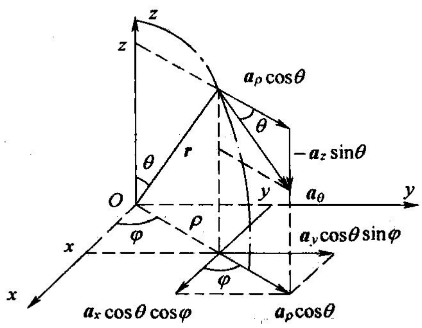
$$\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_\rho\sin\theta+\boldsymbol{a}_z\cos\theta=\boldsymbol{a}_x\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{a}_z\cos\theta \tag{1-3-33a}$$

$$\boldsymbol{a}_\theta=\boldsymbol{a}_\rho\cos\theta-\boldsymbol{a}_z\sin\theta=\boldsymbol{a}_x\cos\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\theta\sin\varphi-\boldsymbol{a}_z\sin\theta \tag{1-3-33b}$$

$$\boldsymbol{a}_\varphi=-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi \tag{1-3-33c}$$



(a) $\boldsymbol{a}_r$的分解



(b) $\boldsymbol{a}_\theta$的分解

图 1-3-5 单位矢量的分解

单位矢量的导数 式(1-3-33)显示，单位矢量 $\boldsymbol{a}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_\theta$ 是坐标 θ 和 φ 的函数，$\boldsymbol{a}_\varphi$ 是坐标 φ 的函数，其偏导数

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}_r}{\partial\theta}=\boldsymbol{a}_x\cos\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\theta\sin\varphi-\boldsymbol{a}_z\sin\theta=\boldsymbol{a}_\theta \tag{1-3-34a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}_r}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{a}_x\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\theta\cos\varphi=\boldsymbol{a}_\varphi\sin\theta \tag{1-3-34b}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{a}_x\sin\theta\cos\varphi-\boldsymbol{a}_y\sin\theta\sin\varphi-\boldsymbol{a}_z\cos\theta=-\boldsymbol{a}_r \tag{1-3-34c}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}_\theta}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{a}_x\cos\theta\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\theta\cos\varphi=\boldsymbol{a}_\varphi\cos\theta \tag{1-3-34d}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\theta}=\boldsymbol{0} \tag{1-3-34e}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{a}_x\cos\varphi-\boldsymbol{a}_y\sin\varphi=-\boldsymbol{a}_r\sin\theta-\boldsymbol{a}_\theta\cos\theta \tag{1-3-34f}$$

矢量的坐标变换 在球坐标中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\theta A_\theta+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi \tag{1-3-35}$$

它在圆柱坐标系和在直角坐标系中的投影分别为

$$A_\rho=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\rho=A_r\sin\theta+A_\theta\cos\theta \tag{1-3-36a}$$

$$A_\varphi = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\varphi = A_\varphi \tag{1-3-36b}$$

$$A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{1-3-36c}$$

$$A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_x = A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi \tag{1-3-37a}$$

$$A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_y = -A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi \tag{1-3-37b}$$

$$A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{1-3-37c}$$

思考与练习题

1-6 求连接点(1,3,2)与(3,5,1)的直线与坐标轴所成的锐角。

1-7 在圆柱坐标系中描述下列轨迹，并写出其直角坐标方程：

(1) $\rho = 4$, $z = 0$;(2) $\rho = 4$;(3) $\varphi = \pi/2$;(4) $\varphi = \pi/3$, $z = 1$ 。

1-8 用球坐标表示下列轨迹：

(1)球 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;(2)抛物面 $z = x^2 + y^2$;(3)圆锥 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$;

(4)平面 $z = 0$;(5)平面 $y = x$ 。

第四节 微分元和积分运算

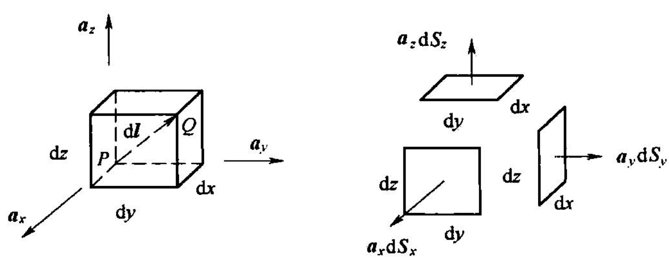
微积分是学习电磁场必备的数学工具，在某一坐标系下要完成线、面、体积分的计算，首先要了解长度、面、体微分元是如何构成的。

一、长度、面和体的微分元

设正交坐标系中一点 P 沿任意方向位移了一小段微分距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到达 Q 点，则 P 点的三个坐标面与 Q 点的三个坐标面围成一个微分六面体，该六面体的两个顶点 PQ 之间的距离矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 称为矢量线元；考虑到六个微分面不同的纵横位置，以垂直于面元的法线方向(坐标轴方向)定义其面元方向，则面元与其法线方向的乘积 $\boldsymbol{a}_i\mathrm{d}S = \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 称为矢量面元；该微分六面体所围成的体积 $\mathrm{d}\tau$ 即为体积元。下面分述在三种坐标系中这些微分元的具体表达。

直角坐标系 如图 1-4-1 所示，从 P 到 Q 的矢量线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在 x、y、z 轴上的投影分别是 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$，因此可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_x\mathrm{d}x + \boldsymbol{a}_y\mathrm{d}y + \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z \tag{1-4-1}$$



(a) 矢量线元和体积元　　(b) 矢量面元

图 1-4-1 直角坐标系中的微分元