全国高等师范专科学校教材

中学数学教材教法

第二分册　初等代数研究

赵振威　主编　章士藻　副主编

华东师范大学出版社

全国高等师范专科学校教材

中学数学教材教法

第二分册　初等代数研究

主　　审　张奠宙

主　　编　赵振威

副主编　章士藻

编写人员　赵振威　章士藻
何履端　沈培华
谭　浩

华东师范大学出版社

中学数学教材教法

第二分册

赵振威　主编

华东师范大学出版社出版

（上海中山北路3663号）

新华书店上海发行所发行　　　上海译文印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　　印张：9.25　　字数：250千字

1990年6月第一版　　1990年9月第二次印刷

印数：4,001—14,000本

ISBN7-5617-0569-7/N·036　　定价：2.25元

出 版 说 明

党的十一届三中全会以来，师范专科教育有了很大的发展，但是，作为师专教学三大基本建设之一的师专教材建设，却始终没有得到很好的解决．长期以来，师范专科教材基本上是借用本科的教材，不但借用师范本科教材，而且还借用综合大学的本科教材，不适合师范专科的特点，影响了师范专科的教学质量．近几年来，有的地区和学校为了改变这种状况，也零星地编写了一些师专教材，可是，不成套，有的科甚至编写了几种，质量参差不齐．虽对师专无教材的局面有了部分改变，但终因没有一套全国统一的、高质量的教材而限制了师专办学效益的提高，也给师专的教学管理和评估工作带来了许多困难．

为了进一步发挥师专的办学效益，彻底改变师专没有适合自己特色的教材的局面，国家教委师范司在 1987 年制订了《二年制师范专科学校八个专业教学计划》；继之又约请了全国有教学经验的专家、教授编写了这八个专业的《教学大纲》；1988年 7 月在长春市东北师范大学又召开了全国二年制师专教材编写出版规划会议，会上研究制订了《1988～1990 年二年制师专八个专业教材编写出版规划》．八个专业是：中文、历史、政治教育、数学、物理、化学、生物和地理．同时，还准备组织编写二年制音乐、美术、体育和英语专业教材．

在国家教委师范司的统一部署、各省市自治区教委的大力帮助和出版社的积极组织下，聘请了一些长期从事师专教学工作，具有丰富的教学实践经验和较高学术水平的教授或副教授担任各科主编．各位主编根据国家教委师范司拟定的《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及各科《教学大纲》的精神，组织

编者收集资料，综合研究，争取编出一套具有师专自身特色的教材，以适应师专教育的迫切需要。

现在，在各方面的大力支持下，经过主编和各位编写人员的努力和辛勤劳动，这套教材将陆续面世。我们热忱地欢迎师专的广大师生使用它，并在使用过程中，多提宝贵意见，使之不断完善，不断提高，以保持与当代科学和师专教育实践的同步发展。

1989年1月

目　录

绪　言

“代数学”一词，渊源于阿拉伯数学家阿尔·花拉子模（Al-Khowarizmi）所著“ilm al-jabr wa'l muquabalah”一书，后来，由阿拉伯文译成拉丁文时，“al-jabr”变成了“algebra”，其余的词逐渐被人们所遗忘.1859年，我国清代数学家李善兰首次把“algebra”译成代数学.

代数学是一门古老而崭新的数学分支.它的古典部分的历史，可以追溯到公元前1700年以前；而近世代数学至今还只有百来年的历史，目前仍在蓬勃发展，是最有活力的学科之一.

在代数学的早期历史上，我国占有重要的地位．例如，公元前100年前后成书的《九章算术》中，就提出了正、负数的相反意义和正负数加减法则，给出了形如 $x^2+px=n$ 的二次方程的数值解法；在祖冲之的时候，已经给出了形如 $x^3+px^2+qx=n$ 的三次方程的数值解法；在11世纪，由贾宪、秦九韶等人创立了“增乘开方法”，解决了高次方程的求数值根问题，等等．因此，在16世纪以前，除阿拉伯的某些成就外，我国对于代数学的研究，在世界占有领先地位.

§1　关于代数学发展的几个历史观点

纵观代数学的历史发展，大体上可以分为初等代数的形成、高等代数的发展、抽象代数的产生和深化三个阶段．随着这门学科自身的发展，人们对于什么是代数，即代数的研究对象是什么，逐步形成了三种主要的历史观点.

一、代数是研究字母运算的科学

代数学的古典部分，主要是初等代数，它是随着解方程和方程组而产生、发展的。人类很早就接触到方程。但是，严格意义下的代数学，却是在16世纪才逐渐形成的。

16世纪，在欧洲的文艺复兴时期，由于生产力的发展，对数学的要求更为迫切，原有的算术内容和它的实际应用已显得十分狭隘。在这样的背景下，泰塔格利亚(Tartaglia)、费拉里(Ferrari)得到了三次和四次方程的一般解法；法国数学家韦达(Vieta)划时代地系统使用符号，不仅用字母表示未知数及其幂，还用字母表示方程的系数和常数。以后，笛卡尔等不少数学家，又对符号作出了改进。

符号的改进和普遍化，使代数从算术中分离出来，成为严格意义下的代数学。同时，由于使用了以字母代替数的方法，便能运用自如地处理计算和代数式，极大地提高了思考的效率和正确性。

因此，当时人们把代数学看成是关于字母的运算，由字母表示的公式的变换，以及解代数方程一类的科学。字母运算学的观点，是代数学的第一个观点，也是代数学的原始观点。这种观点的代表性的著作，是欧拉(Euler)在1770年所著的《代数学引论》。这种观点一直被持续到18世纪后期。

二、代数是研究方程理论的科学

随着生产力的进一步发展，许多数量关系的问题，都被归结为代数方程的求解问题。从而，人们开始把注意力集中到关于方程和方程组的一般理论上去，逐步形成以方程论为主要内容，包括行列式、矩阵论和二次型在内的高等代数。

16世纪起，随着四次方程根式解法的发现，数学家的视线逐渐转移到五次以至更高次代数方程的根式解法，在随后长达三个世纪中，诸如拉格朗日(Lagrange)、范德蒙(Vandermonde)、鲁非

尼（Ruffini）、阿贝尔（Abel）、伽罗华（Galois）等著名数学家，都为此付出了巨大的劳动，创造了以代数方程的根的计算与分布为中心的复杂理论。

在这一时期里，代数学以研究代数方程的理论为中心。所以，当时人们把代数学理解为研究方程理论的科学，或简称它是方程的科学。这是代数学的第二个观点，即以方程为中心的观点。反映这种观点的代表作，是 19 世纪中叶谢尔（Schur）的两卷本代数学，他把代数学定义为代数方程的理论。

三、代数学是研究各种代数结构的科学

19世纪，在伽罗华群以后，随着四元数、向量、矩阵、线性变换等一系列更具一般性的研究对象的出现，代数的研究内容和研究方法发生了巨大的变革，从原来以研究代数方程的理论为中心的数学分支，转变到定义在任意性质的元素集上的代数运算的规律和性质，包括群论、环论、伽罗华理论、向量空间、线性代数、同调代数等内容的庞大的数学分支。这就是抽象代数，或称近世代数。

上述变革，是在数学严格化、抽象化和公理化思想的影响下展开的。在代数中，遵循不同的公理系统，便形成不同的代数结构。因此，当时人们把代数学理解为研究各种代数结构的科学。这是代数学的第三个观点，即近代观点。20世纪20年代，德国数学家范德瓦尔登（Van dev Waerden）的著名教科书《代数学》两卷本深刻地阐明了上述观点。

上面，我们择要介绍了代数学发展的几个历史观点。深刻地理解这些观点，有助于完整地、历史地认识代数学的全貌。

§2 作为教学科目的中学代数

作为教学科目的中学代数，它的性质和内容都不同于作为一

门科学的代数学。在国外数学教育现代化运动中，人们曾试图以结构化、公理化的思想来进行中学数学教学，这在一定程度上反映了数学的本质，但终因超越了中学生的认识水平，难以普遍实施。

根据中学数学的教学目的，我国现行中学代数教材，以传统内容为主，适当渗透近代数学思想，课程内容具有多样性和广泛性，除固定意义的代数基本内容外，还安排一些其它数学分支的知识。教材的基本内容包括数、式、函数、方程、不等式五个方面。

1．数

先在算术数的基础上引进负数，完成有理数集的扩充；接着引进无理数，完成实数集的扩充；最后引进虚数，完成复数集的扩充。对于数集的讨论，着眼于介绍某一数集里的各种代数运算，而不涉及数集自身的结构理论。

2．式

主要讨论代数式与简单超越式的概念、性质和变换。其中解析式的恒等变换是重点内容，它是求解方程、研究函数的基础。

3．函数

函数在中学代数里占有十分重要的地位，在初中和高中分别进行考察。利用函数的图象讨论函数的性质，或根据函数的性质绘制函数的图象，体现了形数结合的基本思想。

4．方程

主要研究各类方程（组）的解法。有关方程的同解理论以及对方程的讨论，都是为解方程服务的。

5．不等式

主要研究一元一次不等式（组）和一元二次不等式的解法。对其它类型的不等式，只讨论如何化为一元一次不等式或一元二次不等式，然后进行求解。关于不等式的证明，仅介绍一些常用的证明方法。

除了上面五部分内容外，还包括等差数列、等比数列、数学归纳法、排列与组合、二项式定理、概率统计初步等。

中学代数内容十分丰富，前五部分内容，相互间密切联系，为了保证学生系统地学好这些内容，以交叉安排为宜；其余内容相对独立，可分列专题研究。

根据高等师范专科学校数学专业的培养目标，本书拟联系中学代数教学实际，重点研究前面五个方面的内容。

第九章 数

数是数学最基本的研究对象，也是在一切科学技术和社会领域中必不可少的工具．本章主要讨论数的概念的形成与扩展，数的运算与性质，数的近似计算等内容．这些知识，对于掌握、驾驭中学代数教材，都是十分必要的．

§1 数系的扩展

一、数的发展简史

1．数的形成与发展

数是各种具体的量的抽象．从历史上看，人类对于数的认识，大体上是按照以下的逻辑顺序进行的：

$$\text{自然数}\xrightarrow{\text{添正分数}}\text{正有理数}\xrightarrow{\text{添 零}}\text{非负有理数}$$

$$\xrightarrow{\text{添负数}}\text{有理数}\xrightarrow{\text{添无理数}}\text{实数}\xrightarrow{\text{添虚数}}\text{复数}$$

自然数的产生，起源于人类在生产和生活中计数的需要．开始只有很少几个自然数，后来随着生产力的发展和记数方法的改进，逐步认识越来越多的自然数．这个过程大致可以分为三个阶段：在第一阶段，物体集合的性质，是由物体间的直接比较确定的．我国古代传说的结绳记数便属于这一阶段．在第二阶段，出现了数词，如三头牛、五只羊等等．这时，还没能把单个的数从具体物体的集合中分离出来．在第三阶段，认识到每一个单个的数，是物体集合的一种性质，把数从具体物体的集合中分离出来，形成了抽象的自然数（正整数）概念，并有了代表它的符号．从某种意义上说，幼儿认识自然数的过程，就是人类祖先认识自然数的过程的再现．

随着生产的发展，在土地测量、天文观测、土木建筑、水利工程等活动中，都需要进行测量。在测量过程中，常常会发生度量不尽的情况，如果要更精确地度量下去，就必然产生自然数不够用的矛盾。这样，正分数就应运而生。据数学史书记载，三千多年前埃及纸草书中已经记有关于正分数的问题。引进正分数，这是数的概念的第一次扩展。

最初人们在记数时，没有“零”的概念。后来，在生产实践中，需要记录和计算的东西越来越多，逐渐产生了位值制记数法。有了这种记数法，零的产生就不可避免的了。我国古代筹算中，利用“空位”表示零。公元6世纪，印度数学家开始用符号“0”表示零。但是，把“0”作为一个数是很迟的事。引进数0，这是数的概念的第二次扩充。

以后，为了表示具有相反意义的量，负数概念就出现了。我国是认识正、负数最早的国家，《九章算术》中就有了正、负数的记载。在欧洲，直到17世纪才对负数有一个完整的认识。引进负数，这是数的概念的第三次扩充。

数的概念的又一次扩充渊源于古希腊。公元前5世纪，古希腊毕达哥拉斯（Pythagoras）学派发现了单位正方形的边长与对角线是不可公度的，为了得到不可公度线段比的精确数值，导致了无理数的产生。当时只是用几何的形象来说明无理数的存在，至于严格的实数理论，直到19世纪70年代才建立起来。引进无理数，形成实数集，这是数的概念的第四次扩充。

数的概念的再一次扩充，是为了解决数学自身的矛盾。16世纪前半叶，意大利数学家泰塔格利亚发现了三次方程的求根公式，大胆地引用了负数开平方的运算，得到了正确答案。由此，虚数作为一种合乎逻辑的假设得以引进，并在进一步的发展中加以运用，成功地经受了理论和实践的检验，最后于18世纪末至19世纪初确立了虚数在数学中的地位。引进虚数，形成复数集，这是数的概念的第五次扩充。

上面，我们简要地回顾了数的发展过程。必须指出，数的概念的产生，实际上是交错进行的。例如，在人们还没有完全认识负数之前，早就知道了无理数的存在；在实数理论还未完全建立之前，已经运用虚数解三次方程了。

2．数的扩充方法与扩充原则

直到19世纪初，从自然数到复数的理论基础，并未被认真考虑过。后来，由于数学严密性的需要以及公理化倾向的影响，促使人们开始认真研究整个数系的逻辑结构。从19世纪中叶起，经过皮亚诺（Peano）、康托尔（Cantor）、戴德金（Dedekind），维尔斯特拉斯（Weierstrass）等数学家的努力，完成了建立整个数系的逻辑工作。

近代数学关于数的理论，是在总结数的历史发展的基础上，用代数结构的观点和比较严格的公理系统加以整理而建立起来的。作为数的理论系统的基础，首先要建立自然数集，然后逐步加以扩展。一般采用的扩展过程是

$$\underset{(\text{自然数集})}{N} \longrightarrow \underset{(\text{整数集})}{Z} \longrightarrow \underset{(\text{有理数集})}{Q}$$

$$\longrightarrow \underset{(\text{实数集})}{R} \longrightarrow \underset{(\text{复数集})}{C}$$

科学的数集的扩充，通常采用两种方法：一是添加元素法，即把新元素添加到已建立的数集中去；二是构造法，即从理论上构造一个集合，然后指出这个集合的某个真子集与先前的数集是同构的。

中、小学数学教学中，为了适应学生的年龄特征和接受能力，关于数系的扩充，主要是渗透近代数学观点，采用添加元素并强调运算的方法来进行的。其扩充过程是

$$\text{自然数集} \xrightarrow{\text{添 零}} \text{扩大的自然数集} \xrightarrow{\text{添正分数}} \text{算术数集}$$

$$\xrightarrow{\text{添负有理数}} \text{有理数集} \xrightarrow{\text{添无理数}} \text{实数集} \xrightarrow{\text{添虚数}} \text{复数集}$$

不论是用添加元素法还是构造法，由数集A扩充到数集B，都应遵循以下各个原则：

1° A是B的真子集，即$A \subset B$.

2° 在B的元素间所定义的一些关系和运算，对于作为B的真子集A的元素，这样的定义与先前A中原有的关系和运算的定义应当保持一致。

3° A中不是总能实施的某种运算，在B中总能实施。

4° B应当是A的所有具有上述三个性质的扩展中的唯一最小扩展（在同构观点下）。

数集的每一次扩充，都解决了一定的矛盾，从而扩大了数的应用范围。但是，数集的每一次扩充也会失掉一些性质。例如，在自然数集中，每一个数都有它唯一的后继数，而扩充到有理数集以后，就不再具有这个性质了。又如，实数集具有顺序性，而扩充到复数集以后，就失去了这种顺序性。

二、自然数理论

自然数具有两方面的意义：一是用来计数；二是用来排序。由此，形成了自然数的两种主要理论，即基数理论和序数理论。

1．自然数的基数理论

基数理论以“集合”作为原始概念，利用集合论的知识来定义自然数及其运算。

在集合论中，若集合A和B的元素之间，可以建立一一对应关系，就称集合A和B等价（或等势），记作$A \sim B$. 一切相互等价的非空集合的共同特征的标志，称为这些集合的基数（或势）。例如，五只羊的集合、五棵树的集合、五张桌子的集合、$\{a, b, c, d, e\}$等等，它们都是等价的集合，其基数用符号“5”表示。

定义 1　非空有限集的基数叫做自然数。

只含有一个元素的集合，它的基数记作 1；含有两个元素的集合，它的基数记作 2；…．从而得到自然数 1，2，…．由自然数组成的集合叫做自然数集，通常记为$\boldsymbol{N}$.

引进自然数以后，就可以利用集合的知识定义自然数集中元素间的大小关系（或顺序关系）和加法、乘法运算.

定义 2 设非空有限集A、B的基数分别是自然数a、b，A'、B'分别是A、B的真子集：

(1)若$A\sim B$，则称a等于b，记作$a=b$；

(2)若$A\supset A'\sim B$，则称a大于b，记作$a>b$；

(3)若$A\sim B'\subset B$，则称a小于b，记作$a<b$.

利用集合的知识，容易得到自然数的次序之间的基本顺序律.

定理 1 设a，b，$c\in N$，则

(1)次序的全序性（三歧性）：对于自然数a、b，下面三种关系有且仅有一种成立：

$$a=b,\quad a>b,\quad a<b.$$

(2)相等的反身性：$a=a$.

(3)相等的对称性：$a=b\Longleftrightarrow b=a$.

(4)相等的传递性：$a=b$，$b=c\Rightarrow a=c$.

(5)不等的对逆性：$a>b\Longleftrightarrow b<a$.

(6)不等的传递性：$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$.

证明　仅证(6).设a、b、c分别是非空有限集A、B、C的基数.依定义2，由$a>b$，$b>c$可知，存在非空有限集A'、B'，使$A\supset A'\sim B$；$B\supset B'\sim C$.从而必存在非空有限集A''，使$A'\supset A''$且$A''\sim B'$.于是$A\supset A'\supset A''\sim C$.所以$a>c$.

定义 3 设$A\cap B=\phi$，如果非空有限集A、B的基数分别是a、b，且$C=A\cup B$，那么集合C的基数c叫做a与b的和，记作$a+b=c$.a、b叫做加数，求两数和的运算叫做加法.

根据集合的运算性质，有

定理 2 设a，b，$c\in N$，则

(1)加法交换律：$a+b=b+a$.

(2)加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.