新课标·新教材

根据最新竞赛大纲第五次修订

中小学学科奥赛编辑部编审

全国金牌

奥赛教材

通用版

2008～2009

金牌奥赛

阶梯素质教育研究所

七年级数学

0101010101100

01010101110

01010101010110

京华出版社

全国金牌奥赛教材

（通用版）

七年级 数学

京 华 出 版 社

责任编辑:王　建
封面设计:颜国森

图书在版编目(CIP)数据
全国金牌奥赛教材.七年级.数学/项昭义 主编.
-北京:京华出版社.
ISBN 978-7-80600-748-8

Ⅰ.全…　Ⅱ.项…　Ⅲ.数学课-初中-习题　Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第22389号

著　　者□　项昭义　陈　斌　王向东
出版发行□　京华出版社(北京市安华西里1区13楼　100011)
经　　销□　京华时代图书(北京)有限公司
(010)63993657　63993659
印　　刷□　三河市华润印刷有限公司印刷
开　　本□　880毫米×1230毫米　32开本
字　　数□　200千字
印　　张□　9印张
印　　数□　5000册
出版日期□　2009年2月第5次修订　第3次印刷
书　　号□　ISBN 978-7-80600-748-8
定　　价□　12.00元

丛书出版说明

《中小学奥林匹克学科竞赛》系列丛书分为教材类、入门教材类、练习卷类、模拟试卷类、强化教材类、精典题解类、每周测类、试题汇编类、一题多解类等总计200多品种。本系列丛书是由中小学学科奥赛编辑部组编,北京阶梯素质教育研究所的研究成果。自奥林匹克出版社出版以来独树一帜,深受广大教师、家长、学生的喜爱。在经过较大程度的修订、改版或重新编写后,现更名为《金牌奥赛》、《金牌奥校》等系列丛书,由京华出版社再版发行。值此再版之际,向全国千百万读者表示真挚的感谢。

《金牌奥赛》、《金牌奥校》等系列丛书的封面设计、书名等各种标识均已进行了商标注册,请读者朋友在选购时注意分辨,谨防假冒。如发现有盗用书中内容、盗版、冒用品牌等行为,请及时告知北京阶梯素质教育研究所,我所将根据有关法律追究侵权者的法律责任。在此我们对您表示由衷的感谢。

本书的读者如有疑难问题或发现本书的疏漏之处,请来信与本研究所联系。我们将认真听取您的意见和建议,并竭诚为您服务,与您共同切磋,共同研究,共同进步。

来信请寄:北京市莲宝路2号院盛今大厦10A

北京阶梯素质教育研究所(收)

邮　　编:100073

联系电话:(010)63993657　　63993659

北京阶梯素质教育研究所教育网站:"金牌奥赛网"已经开通,欢迎登录!

网　　址:http://www.jpas.cn

导读

中小学学科奥林匹克竞赛(简称学科奥赛)是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生学科竞赛活动。学科奥林匹克是由体育奥林匹克借鉴、引申而来。国际数学奥林匹克(简称IMO)、国际物理奥林匹克(简称 IPHO)、国际化学奥林匹克(简称ICHO)等是国际上影响较大的中学生学科竞赛活动,每年都受到了千百万青少年学生的向往与关注。之所以受到如此关注,究其原因是奥赛具有很强的创新性、灵活性、综合性以及注重培养学生的探索能力和启发学生的创新意识,而这些也恰恰是素质教育的核心内容。这些也正是未来发展的需要。

中小学学科奥赛编辑部在精心研究了多年国内外这项活动及大量该类优秀图书的基础上,邀请了全国各地一些潜心耕耘于这块园地的优秀园丁,陆续编写出版了《金牌奥赛》、《金牌奥校》等一系列有关数学、语文、英语、物理、化学、生物、信息七大学科共计200多个品种的奥赛读物。就我社奥赛类图书的品种、数量、质量而言堪称在国内外同行中影响最大,在中小学师生心目中最具魅力。

《金牌奥赛》、《金牌奥校》等系列丛书的编写宗旨及特点是:

第一:高。来源于教材,又高于教材。来源于教材,就是参照教育部最新[课程标准]编写;高于教材,就是紧扣各级竞赛大纲,注意与各级竞赛在内容、题型及能力要求等各方面全面接轨,培养兴趣,开发智力,提高能力。

第二:准。科学准确,结构合理。各册按照学科特点进行分层设计,科学编排;依照循序渐进的原则,进行深入浅出的分析,教授全面细致的解题方法。

第三:新。书中选用的题型新颖独特,趣味性强。汇集近年国内外奥赛、中考、高考试题精华,代表当前奥赛的最高水平,体现课程改革的新概念及竞赛命题的新思想、新方法、新动态。

第四:精。精选例题,难而不怪,灵活性强,高而可攀。重在举一

反三，触类旁通；重在一题多解、一题多变、一题多问；注重对思维能力的训练，不搞题海战术，使学习成为一种兴趣和爱好。

第五：名。名师荟萃，名赛集锦。中小学学科奥赛编辑部邀请了全国各地一些名牌大学教授、重点中学的特级教师、高级教师、学科带头人、著名奥林匹克金牌教练共同编写。

第六：全。本系列丛书共含以下12套总计200多品种：

1.《小学数学金牌奥赛入门教材（ABC卷）》

2.《金牌奥赛教材》（通用版）

3.《金牌奥赛ABC卷》

4.《金牌奥赛模拟试卷》

5.《金牌奥赛试题汇编》

6.《金牌奥赛热点试题分类全解》

7.《中、高考夺冠题》

8.《考试高手教程》

9.《金牌奥赛（金牌奥校）精典题解》

10.《金牌奥赛每周测》

11.《金牌奥赛精典题一题多解》

12.《国际金牌奥赛试题解析》

本系列丛书在编写和修订过程中，参考并引用了一些国内外优秀试题，在书中未一一注明出处，在此谨向原题的编者表示感谢。

本系列丛书虽然从策划、编写，再到设计、出版，我们兢兢业业、尽心尽力、鞠躬尽瘁，但疏漏之处在所难免。如果您有什么意见和建议，欢迎并感谢赐教，让我们共同努力，以使本系列丛书更好地服务于广大的中小学师生。

中小学学科奥赛编辑部

北京阶梯素质教育研究所

目录

第一章　数学思想方法

数学思想方法是科学地解决数学问题的指导思想. 在解决数学问题时,若能正确地应用数学思想方法,科学地指导解题的全过程,就能十分简捷优美地解决数学问题,达到事半功倍的最佳效果.

本章,将介绍在初中数学学习中常用的转化思想,探索和经验归纳思想,分类讨论的思想和反证法的思想方法,旨在指导读者了解和掌握这些数学思想方法.

§1.1　转化的思想方法

数学知识有一个由简单到复杂,由初等到高等的发展过程,这足以表明复杂的问题是由许多简单问题组成的. 因此,数学解题的过程也是一个不断地转换问题的过程. 经过这种转化,使问题不断被简化,将一个陌生的或复杂的题目,逐步转变成我们所熟悉的、简单的题目,进而解之. 下面我们来说明这种转化的思想方法.

例 1　2003 减去它的$\frac{1}{2}$,再减去余下的$\frac{1}{3}$,再减去余下的$\frac{1}{4}$,依此类推,一直到最后减去余下的$\frac{1}{2003}$,求最后剩下的数.

【分析】　我们必须依照题意先表示出这个数,再设法化简此数.

【解】　依题意,得

$$2003\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})\times\cdots\times(1-\frac{1}{2003})$$

$$=2003\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2002}{2003}$$

$$=2003\times\frac{1}{2003}$$

$=1.$

例 2　计算 $2003\times20022002-2002\times20032003$.

【分析】　此数繁杂,我们可采用提取公因数的形式,使问题转化为易于观察的形式.

【解】　$2003\times20022002-2002\times20032003$

$=2003\times2002\times10001-2002\times2003\times10001$

$=0.$

【评注】　提取公因数是化简运算繁杂计算题的常用方法,是将复杂问题转化为简单问题的方法之一.

例 3　1966, 1976, 1986, 1996, 2006 这五个数的总和是多少?

【分析】　认真观察我们不难发现,后 4 个数分别比 1966 大 10,20,30,40,应用这一特点,即可简化运算;再认真思考,注意到 1966,2006;1976,1996 两组数的平均数均为 1986. 这样,我们可得如下两种解法.

【解法一】　五个数的总和为

$1966\times5+10\times(1+2+3+4)$

$=9830+100=9930.$

【解法二】　五个数的总和为

$1986\times5=9930.$

【评注】　解法一部分地应用了将加法转化为乘法的方法;而解法二则全面将加法转化为了乘法. 相比之下,解法二更为简单.

例 4　(1)　甲学校和乙学校有同样多的同学参加学科竞赛. (2)学校用汽车把学生送往考场. 甲校用的汽车,每车坐 15 人,乙校用的汽车,每车坐 13 人. (3)结果乙校比甲校多派一辆汽车. 后来各校增加一人参加竞赛,这样两校需要的汽车就一样多了. (4)最后又决定每校各增加一个人参加比赛,乙校又比甲校多派了一辆汽车. (5)问最后两校共有多少人参加竞赛?

【分析】　为了解决这个问题,我们首先应该把它转化为纯数学问题. 对于题中所加的每条叙述,可以相应地表述如下:

(1)有一个数 a;(2)a 分别除以 15 和 13;(3)a 能被 15 整除;

(4)$a+1$ 是13 的整倍数(即 $a+1$ 能被 13 整除);(5)求 $2(a+2)$ 的(最小)值.

(此题的解为 184 人,解法过程略)

【评注】 学会转化,首先应该学会将一个实际问题转化为一个纯数学问题. 即把实际问题中所包含的数量与数量的关系,几何元素的位置关系抽取出来,以便用我们已有的数学知识求得问题的解决. 本例就是这种转化的典型一例.

例5 在初一年级的学生中,随意挑出 6 个人,这 6 个人中必有这样 3 个人:他们要么互相认识,要么互相不认识,试说明理由.

【分析】 我们可以用点和点间的连线来使问题纯数学化. 将随意挑出的六个人,看做是六个点,如果两人相识,两点之间连红线;如果两人不相识,两点之间连蓝线. 这样原问题就是说明在这个图中一定有一个三边颜色相同的三角形存在.

即原问题转化为:有六个点,每两点之间都用红线或蓝线中的一种相连接,试说明在这个图中,一定有一个三边的颜色相同的三角形存在(解法请参见本章"§1.3").

例6 试求:$1^1,2^2,3^2,\cdots,123456789^2$ 的和的个位数的数字.

【分析】 由 $123456789=10\times12345678+9$ 知,我们只需要讨论其末位,即求 123456789 个数的末位的和即可.

【解】∵ $123456789=12345678\times10+9$,

∴ 所求数字等于 $(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0)\times12345678+(1+4+9+6+5+6+9+4+1)$ 的结果的个位数字,即 $5\times8+5=45$ 的个位数的数字,故所求数字为 5.

【评注】 此题将一个繁冗的计算,通过对末位数的研究,转化为一个十分简单的计算,它为我们提供了一种思维方式,即抓住问题的实质,充分运用转化的思想方法.

例7 鸡兔同笼不知数,三十六头笼中露.
数清脚共五十双,多少只鸡多少兔.

【分析】 问题复杂性在于每只鸡与兔脚不同. 为便于求解,不

妨假设“笼中只有鸡”,那么36只鸡只有36双脚,这与题中50双脚相差14双.这是我们的“假设”,使14只兔按14只鸡看待的结果,所以笼中有兔14只,鸡36-14=22只.

【评注】 在我们上述“假设”下,把问题变的简化为“每只只有两只脚”,这便是简化原则的运用.随着数学学习的深入展开,我们还会发现简化原则的许多运用.诸如:把复杂的问题拆成几个简单问题,利用简单情况发现规律或验证结论、核实猜测等.简化原则是转化策略的一种形式,是一种转化思想方法.

奥赛习题 1-1

1. 先看甲、乙的一段对话:

甲:请你写一个四位数(要求百位数字不是0).

乙:已经写好了.

甲:现在把你写的四位数的千位数字移到这个数的最后,得到一个新的四位数.

乙:已经移好了.

甲:把这两个四位数加起来,把和告诉我.

乙:3565.

甲:不对! 你在骗我.

乙:对不起,报和数时,我把十位数修改了.

试问:十位数字是几?

2. 如果 n 是一个整数,我们把 n 的约数的个数用一个符号 $A(n)$ 表示,n 的约数的和用一个符号 $B(n)$ 表示.

(1) 求 $A(42)$,$B(42)$;

(2) 使 $A(n)=8$ 的最小自然数 n 是多少?

3. 计算 $1-\dfrac{2}{1\times(1+2)}-\dfrac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}-\dfrac{4}{(1+2+3)\times(1+2+3+4)}$

$$=\cdots=\frac{10}{(1+2+3+\cdots+9)(1+2+3+\cdots+10)}.$$

4. 小亮出生时是星期三,那么百日以后是星期几?

5. 如果整数 A 的末两位数字组成的数能被 4 整除时,那么 A 就能被 4 整除. 试说明理由.

6. 有一种电子钟,每到整点响一次铃,每走 9 分钟亮一次灯. 中午 12 点整,它既响铃又亮灯. 那么它下一次既响铃又亮灯时,应该是几点钟?

§1.2 探索和经验归纳的思想方法

在解题时,先通过对问题的若干种简单的或特殊情况的探索分析,从中发现某种规律,进而利用这种规律找到解决一般问题的途径或结论. 这种方法就称为经验归纳法. 它是一种较为简单、易行的发现法.

例 1 四个小动物换座位,开始是鼠、猴、兔和猫分别坐 1,2,3 和 4 号位上,如图 1－1. 第一次前后排动物换座位,第二次左右动物换座位……这样交替进行下去. 那么第 10 次换座位后,小兔坐在第几号座位上?

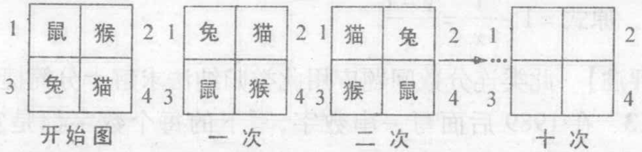


图 1－1

【分析】 自开始图起,经 10 次调换座位,总共可以得到 11 幅座位图,同时按照先上、下,再左、右的调换方法,依次观察前几次调换的结果,可以发现,第四次调换之前四种动物的位置已恢复到开始图所给出的位置,这样以开始图算起,这 11 幅图每四幅便是一个循环周期. 由 $(10+1)\div4=2\cdots\cdots3$,可知第十次调换后的图样应为第二次调换后的图样. 即这时小兔的座位在第 2 号座位上.

例2 计算

$$\left.\begin{array}{l}1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1\cdots}}}\\ \qquad\qquad\cdots\\ \qquad\qquad 1-\cfrac{1}{x}\end{array}\right\}\text{共 1999 层}$$

【分析】 利用找规律的方法，从最后一层逐层运算.

【解】 $1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}$，

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=1+(x-1)=x,$$

$\therefore$ 第三层就出现 x，也就是说，到了倒数第四层又出现了 $1-\dfrac{1}{x}$.

$1999\div3=666\cdots\cdots1$，

$\therefore$ 原式 $=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

【评注】 此类连分数问题应用此类归纳法求解十分简捷.

例3 在 1989 后面写一串数字，写下的每个数字都是它前面两个数字的乘积的个位数. 如，$8\times9=72$，则 1989 后的数字应为 2……，由此得到一串数字 1989286……. 那么自这串数字的第一位数字 1 开始往右数，它的第 1989 个数字是什么？

【分析】 按照题中数串生成的规则，考查数串前若干项的数字有什么规律：由 $8\times9=72$，$9\times2=18$，$2\times8=16$，$8\times6=48$，$8\times8=64$；$8\times4=32$（开始出现与前面重复的数字！），$4\times2=8$，$2\times8=16$，$8\times6=48$，$8\times8=64$，…… 这样可知在 1989 后面的一串数字按

286884 为一个循环节,重复出现. 而$(1989-4)\div 6=330\cdots\cdots 5$,所以在1989后面,每六位数字作一段,有 330 段余 5 个数字,即这串数字中的第1989个数字应是循环节中的第 5 个数字 8.

例 4 求奇数列 3,5,7,…的第 n 个数是什么?

【分析】 如果设 a_n 表示第 n 个数,先列出下表来寻找规律:

n	1	2	3	4	5	6	…
a_n	3	5	7	9	11	13	…

仔细观察就会发现:把第一行所有的数乘以 2 再加上 1,就得到第二行相应的数. 依据这条规律,我们不难知道:当第一行中的数是 n 时,第二行相应的数为 $2n+1$,所以 $a_n=2n+1$.

例 5 有一串真分数,按下列规律排列:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots$$

那么,第 100 个分数是几分之几?

【分析】 分母相同的分数分别是 1 个,2 个,3 个,4 个,…,分母是 14 的有 13 个.

$$1+2+3+\cdots+13=91,$$

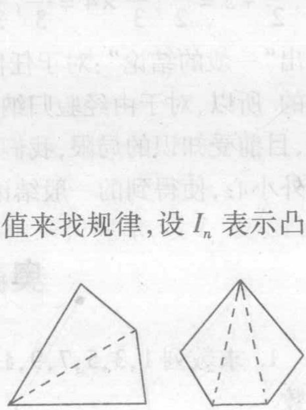
所以排在第 100 位的是$\frac{9}{15}$.

例 6 求凸 n 边形的内角和$(n\geqslant 3)$.

【分析】 通过 n 取 3,4,5 等的特殊值来找规律,设 I_n 表示凸 n 边形的内角和.

(1) 当 $n=3$ 时,$I_3=180°$;

(2) 当 $n=4$ 时,为利用 I_3,我们可把凸四边形分割为两个三角形,如图 1－2(a),则 I_4 恰为两个三角形的内角和,即 $I_4=2\times 180°$;



(a) (b)

图1－2

(3) 当 $n=5$ 时,用类似于(2)中的分割方法,可以得 $I_5=3\times 180°$. 如图 1－2(b).

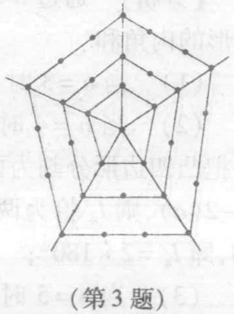
通过这些特殊结果,可以归纳出一般的规律:可取凸 n 边形的一个顶点,由它出发作凸多边形的对角线,除该顶点及相邻的两顶点外,可以与其余 $n-3$ 个顶点连成 $n-3$ 条对角线,它们将凸 n 边形分为 $n-2$ 个三角形,把各三角形的内角和加起来就是 I_n.

【解】 $I_n=(n-2)\cdot 180°$

【评注】 (1)前面我们讨论了如何通过探索用经验归纳法解题的方法,尤其是学习了如何使用这种方法探讨与自然数有关的问题.如果我们回忆一下学校数学课程中学习的许多性质,都是采用经验归纳法得到的.譬如,在学习加法交换律时,老师总是用一些特殊的数作为实例,总结出 $a+b=b+a$ 的规律性.因而,经验归纳法是用以发现客观规律的有力武器.

(2)但应指出,经验归纳法只是从少数特例去猜测一般的规律,因而这种猜测可能会发生错误.譬如,由 $2\times2=4,2+2=4$;$\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{2},\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$;$\frac{4}{3}\times4=\frac{16}{3},\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$;$\frac{5}{4}\times5=\frac{25}{4},\frac{5}{4}+5=\frac{25}{4}$;……得出“一般的结论”:对于任何数 a 与 b,有 $a\times b=a+b$.这显然是错误的.所以,对于由经验归纳法得到的结论是否正确必须经过严格证明,目前受知识的局限,我们暂不介绍这种证明,因而在作归纳时,应格外小心,使得到的一般结论不出错误.

奥赛习题 1-2



(第3题)

1. 求数列 1,3,5,7,9,11,…中的第 1000 个数.

2. 求数列 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…中数 55 后面的数是几.

3. 如图,是一个五边形的点阵,它的中心是一个点,算作第一层;第二层是每边两个点(五边形顶点处的点);第三层