University Physics

大学物理编写组　编著

大学物理

解题指导

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学物理解题指导

大学物理编写组　编著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学物理解题指导/《大学物理》编写组编著. —天津：天津大学出版社，2010.2

ISBN 978-7-5618-3407-7

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①大…　Ⅲ.①物理学—高等学校—解题　Ⅳ.①04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 022182 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022—27403647　邮购部:022—27402742
网　　址　www.tjup.com
印　　刷　天津泰宇印务有限公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　169mm×239mm
印　　张　14.
字　　数　300 千
版　　次　2010 年 2 月第 1 版
印　　次　2010 年 2 月第 1 次
印　　数　1—4 500
定　　价　22.00 元

前　言

作为现代科学技术发展源泉的物理学,始终影响着人类的发展和进步。物理学也是学习其他学科知识与技术的基础。"大学物理"是高等院校许多专业学生必修的重要基础课程之一,同时也与其他课程的学习密切相关。除为今后的专业发展打好物理基础外,在培养高素质人才的过程中,它也是不可替代的,尤其在建立唯物主义世界观、培养创新精神与科学思维能力方面,更有其独特的作用。

长期以来,为适应不同时期教学要求,天津大学先后编写出版了四套教材,分别是:杨仲耆等编的《大学物理学》(高等教育出版社,1980,1981,1982);李金锷主编的《大学物理》(天津大学出版社,1981;科学出版社,2001);陈宜生、李增智主编的《大学物理》(天津大学出版社,1999);霍炳海主编的《大学物理》(天津大学出版社,2001)。在当今科学技术迅速发展,交叉学科不断涌现的背景下,物理学思想与方法在各个领域中得到广泛的应用。原有教材的内容与篇幅有必要进行充实与调整。在我校教务处、理学院及物理系领导的关怀与支持下,我们根据非物理类教学指导委员会近期提出的"教学基本要求",并结合多年的教改成果与教学经验,吸取我校原有教材的精华,编写了这部教材。

编写此套书的指导思想:(1)基本教材内容简练,以基本概念、规律及研究方法为主,力求做到重点突出,教师好用,学生好读;(2)适当调整经典与近代内容的比例,讲解经典内容时注意其在新科技中的应用,赋予时代气息;(3)辅助教材中所选内容与讲授深度适合学生的接受能力,以激发学生继续学习与探索的激情。

在本教材的组织编写过程中,笔者承担了策划、审稿和定稿工作。参加基本教材的编写人员有:力学部分,王莱;分子动理论,王克起;热力学,霍炳海;电磁学,吴亚非;振动与波、光学,李增智;狭义相对论,顾洪恩;量子物理、原子核与基本粒子,周佩瑶。

由于水平有限,衷心希望使用此书的老师和同学对我们提出批评与指正。

林家逖

目录

第1章　质点运动学

1. 基本要求

- 确切理解质点模型及参考系的概念。
- 掌握质点位矢及位移的概念。
- 掌握瞬时速度及瞬时加速度的概念和计算。
- 掌握求解直线运动的各种方法。
- 掌握用矢量分解法处理曲线运动问题的方法。

2. 基本内容

(1)质点是真实物体的点模型，即具有物体质量而忽略其形状和大小的物理模型。

(2)参考系是为了对物体运动及状态进行描述所必须选取的作为参照的物体或物体组。

(3)坐标系是为了定量解析和描述质点运动在参考系上建立的坐标轴系统。常用的坐标系有直角坐标系、球坐标系、自然坐标系等。

(4)描述质点运动及状态的常用物理量。

① 位矢 $\boldsymbol{r}(t)$：由参考系中某一参考点（通常选坐标系的原点）指向质点位置的矢量。随时间 t 的改变，$\boldsymbol{r}(t)$ 的变化描述了质点在空间的实际路径。在直角坐标系中，t 时刻的位矢及 Δt 时间内位矢改变（即位移）表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

② 瞬时速度 $\boldsymbol{v}(t)$：质点位矢对时间的变化率，即

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

其大小为 $|\boldsymbol{v}|$，即速率 $v = \dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$；其方向为轨道上该点的切线方向。

③ 瞬时加速度 $\boldsymbol{a}(t)$：质点速度对时间的变化率，即

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在自然坐标系中，加速度沿轨道切线方向的分量称为切向加速度 a_τ，沿法线方向的分量称为法向加速度 a_n，

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

a_τ 和 a_n 分别描述了速度大小和速度方向对时间的变化率。

(5) 参考系 S' 相对参考系 S 以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动时，质点相对于 S' 系的速度 $\boldsymbol{v}'$ 与相对于 S 系的速度 $\boldsymbol{v}$ 之间满足如下关系：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

通常也称 $\boldsymbol{v}'$ 为相对速度，称 $\boldsymbol{v}$ 为绝对速度，称 $\boldsymbol{u}$ 为牵连速度。

质点相对于 S' 系的加速度 $\boldsymbol{a}'$ 与相对于 S 系的加速度 $\boldsymbol{a}$ 之间满足如下关系：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

也常称 $\boldsymbol{a}'$ 为相对加速度，称 $\boldsymbol{a}$ 为绝对加速度，称 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 为牵连加速度。

3. 典型例题

例 1(习题 1.7)　一个质点在 X、Y 平面上运动，运动方程为

$$\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + 3t - 4 \end{cases}$$

式中 t 以 s 计，x、y 以 m 计。

(1) 以时间 t 为变量，写出质点的运动函数；

(2) 求 $t = 1$ s 时刻和 $t = 2$ s 时刻的位矢，计算这 1 s 内质点的位移；

(3) 写出轨道方程；

(4) 求质点的速度表达式，并计算 $t = 4$ s 时刻质点速度的大小和方向；

(5) 求质点的加速度表达式，并计算 $t = 4$ s 时刻质点加速度的大小和方向；

(6) 求质点的法向加速度和切向加速度的表达式，并计算 $t = 4$ s 时刻质点切向加速度与法向加速度。

解　(1) $\boldsymbol{r} = (3t + 5)\,\boldsymbol{i} + (\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4)\,\boldsymbol{j}$ m

(2) $\boldsymbol{r}_1 = 8\,\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{j}$ m，$\boldsymbol{r}_2 = 11\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j}$ m，$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = 3\,\boldsymbol{i} + \frac{9}{2}\,\boldsymbol{j}$ m

(3) $18y = x^2 + 8x - 137$

(4) $\boldsymbol{v} = 3\,\boldsymbol{i} + (t + 3)\,\boldsymbol{j}$ m/s；$t = 4$ s 时 $v_4 = 7.6$ m/s，速度与 X 轴的夹角 $\alpha = \arctan\frac{7}{3} = 66.8°$。

(5) $\boldsymbol{a} = 1\,\boldsymbol{j}$ m/s^2；$t = 4$ s 时 $a = 1$ m/s^2，加速度沿 Y 轴的正方向。

(6) $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 6t + 18}}$ m/s^2

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{3}{\sqrt{t^2+6t+18}}\ \mathrm{m/s^2}$$

$t = 4$ s 时，$a_{\tau 4} = 0.92\ \ \mathrm{m/s^2}$，$a_{n4} = 0.39\ \ \mathrm{m/s^2}$

例 2　有一作直线运动的质点，当 $t=0$ 时，该质点经过原点 O，沿 X 轴正向运动，且速度大小为 v_0，其运动规律为 $\frac{dv}{dt} = -kv$，k 为常量。求解该质点的速率 v 随时间 t 改变的规律以及运动函数 $x = x(t)$。

解　(1) 质点沿 X 轴作一维运动，其速度、加速度等运动状态矢量均平行于 X 轴方向，因此可采用其值的正负来表示方向。为了得出该质点运动中 v 随时间 t 改变的规律，可从题目给出的运动规律入手。首先将其改写为如下等价形式：

$$\frac{dv}{v} = -k dt$$

利用初始条件，对上式积分 $\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$，即可得出函数：

$$v = v_0 e^{-kt} \tag{1}$$

此函数描述了 v 随时间 t 改变的规律，表明质点速度的大小随时间按照指数规律衰减，方向始终沿着 X 轴正向。当 $t\to\infty$ 时，速度衰减到零。

(2) 质点的运动函数，可以根据速度的定义并利用初始状态对(1) 式积分获得。首先由(1) 式有

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 e^{-kt},$$

利用初始条件，对上式积分 $\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$，即得出运动函数为

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

由此结果也不难得出，该质点在停下来的时刻位移为 $\frac{v_0}{k}$。

4. 习题解答

1.1　对一个质点来说，$\frac{dv}{dt}$、$\frac{dr}{dt}$、$\frac{ds}{dt}$、$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$、$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$ 各表示什么物理意义？

答　分别为切向加速度 a_τ、径向速度 v_r、速率 v、加速度 $\boldsymbol{a}$ 和加速度的大小。

1.2　质点的切向加速度 a_τ、径向速度 v_r、速率 v、加速度 $\boldsymbol{a}$、加速度的大小 a 分别如何表示？

答　$a_\tau = \frac{dv}{dt}$，$v_r = \frac{dr}{dt}$，$v = \frac{ds}{dt}$ 或 $v = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$，$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$，$a = \left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$。

1.3　若第 1.2 题中的各量分别等于零，分别表明为哪种运动状态？

答　分别为匀速率运动、圆周运动、静止、匀速直线运动、匀速直线运动。

1.4 在直角坐标系中，已知 $\boldsymbol{A}=3\,\boldsymbol{i}+2\,\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{B}=5\,\boldsymbol{j}+11\,\boldsymbol{k}$，试求：(1)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(2)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。

解 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(3\,\boldsymbol{i}+2\,\boldsymbol{j})\cdot(5\,\boldsymbol{j}+11\,\boldsymbol{k})=10$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 11\end{vmatrix}=22\,\boldsymbol{i}-33\,\boldsymbol{j}+15\,\boldsymbol{k}$$

1.5 有一质点沿 X 轴作直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$，式中 x 单位为 m，t 单位为 s。试求：(1) 从 $t=1$ s 到 $t=2$ s 之间的路程；(2) 从 $t=1$ s 到 $t=2$ s 之间的位移及平均速度；(3)$t=1$ s 时的速度和加速度。

解 (1) 令 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9t-6t^2=0$，解出 $t_1=0$ 及 $t_2=1.5$ s，说明质点在 $t_2=1.5$ s 时运动反向，路程 $s=|x(1.5)-x(1)|+|x(2)-x(1.5)|=2.25$ m

(2) 位移 $\Delta x=x(2)-x(1)=-0.5$ m；平均速度：$v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=-0.5$ m/s

(3) $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9t-6t^2$，当 $t=1$ s 时，$v(1)=3$ m/s

$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=9-12t$，当 $t=1$ s 时，$a(1)=-3$ m/s²

1.6 一质点作直线运动，其相对起点 O 的位移 y 随时间 t 改变的情况如图 1-13 中抛物线所示。在 a 点处该曲线的切线与 Y 轴的夹角为 30°，分析质点的运动类型，并写出其运动函数。

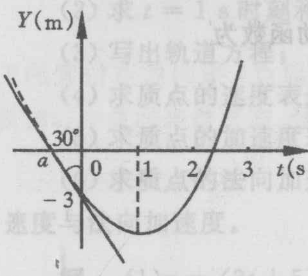


图 1-13 题 1.6 图

解 y 随 t 变化的关系一定可表示为

$$y=A(t-1)^2-B$$

代入题设条件

$$\begin{cases} y=-3 & (t=0)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\tan(-60^\circ)=-\sqrt{3} & (y=0)\end{cases}$$

可求解得出 A、B 的值，故

$$y=\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}(t-1)^2-\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

或表示为 $y=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}t^2-(-3+2\sqrt{3})t-3$

该质点作匀加速直线运动。

1.7 见例 1。

1.8 一物体从地面上以初速度 $v_0=10$ m/s 沿 $\theta=45^\circ$ 角向斜上方抛出，忽略空气阻力，求：(1) 经多长时间物体速率为 8 m/s？此时的切向加速度、法向加速度各是多少？(2) 经多长时间物体在空中的速率达到最小值？

解 (1) 斜抛运动方程：$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = v_0 \sin\theta \cdot t - gt^2/2 \end{cases}$，速度：$\begin{cases} v_X = v_0 \cos\theta \\ v_Y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$

速率：$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\theta)^2 + (v_0 \sin\theta - gt)^2}$ ①

解出：$t = [v_0 \sin\theta - \sqrt{v^2 - (v_0 \cos\theta)^2}]/g$

当 $v = 8\ \mathrm{m/s}$ 时，$t = 0.34\ \mathrm{s}$

$a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_0 \sin\theta - gt}{v} g$，将 $v = 8\ \mathrm{m/s}$，$t = 0.34\ \mathrm{s}$ 代入，得：

$a_\tau = -4.58\ \mathrm{m/s^2}$；而 $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = 8.66\ \mathrm{m/s^2}$

(2) 由上面 ① 式可知，当 $v_0 \sin\theta - gt = 0$ 时，v 最小（$v_{\min} = v_0 \cos\theta$），此时 $t = v_0 \sin\theta / g = 0.72\ \mathrm{s}$

1.9 一粒子沿抛物线轨道 $y = x^2$ 运动，粒子速度沿 X 轴的投影恒为 $v_X = 3\ \mathrm{m/s}$，求当坐标 $x = 2/3\ \mathrm{m}$ 时，粒子的速度和加速度。

解 $v_X = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3$，$v_Y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x \cdot 3 = 6x$，$\boldsymbol{v} = v_X \boldsymbol{i} + v_Y \boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 6x\boldsymbol{j}$

$$a_X = \frac{\mathrm{d}v_X}{\mathrm{d}t} = 0,\ a_Y = \frac{\mathrm{d}v_Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_Y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6 \times 3 = 18,\ \boldsymbol{a} = a_X \boldsymbol{i} + a_Y \boldsymbol{j} = 18\boldsymbol{j}$$

当 $x = 2/3\ \mathrm{m}$ 时，$\boldsymbol{v}(2/3) = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s}$，$\boldsymbol{a}(2/3) = \boldsymbol{a} = 18\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s^2}$

1.10 如图 1-14 所示，一小船停于河中，河岸高出水面 h，船上的人以匀速率 v_0 收绳，写出小船运动的微分方程，并分析船向岸边靠拢的加速度 a 随绳子角度 θ 的变化规律。

解 (1) 几何关系：$x^2 + h^2 = l^2$，两边求导并注意 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -v_0$，得：$x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + lv_0 = 0$ ①

再求导一次，得微分方程：$x\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - v_0^2 = 0$

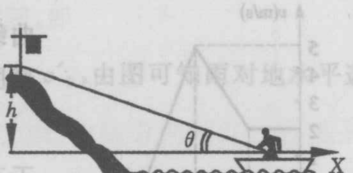


图 1-14 题 1.10 图

(2) 将 ① 式改写成：$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{lv_0}{x} = -\dfrac{v_0}{\cos\theta}$

加速度：$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{v_0}{\cos\theta}\right) = -\dfrac{v_0 \sin\theta}{\cos^2\theta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ②

而 $v_0 = -\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{h}{\sin\theta}\right) = \dfrac{h\cos\theta}{\sin^2\theta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ③

将 ③ 式代入 ② 式得：$a = -\dfrac{v_0 \sin\theta}{\cos^2\theta} \cdot \dfrac{v_0 \sin^2\theta}{h\cos\theta} = -\dfrac{v_0^2}{h}\tan^3\theta$（负号表示与 X 轴反向）

1.11 在光滑水平桌面上有一根细棒绕棒的一端 O 旋转，如以 O 为极点，沿一固定方向作射线为极轴，则相对极轴细棒旋转角度与时间的关系为 $\theta = 0.4t\ \mathrm{rad/s}$。现在棒上有一只昆虫在 $t = 0$ 时，从 O 点出发沿棒向外爬行，昆虫相对棒的速度恒为 $u = 0.01\ \mathrm{m/s}$，求当 $t = 2\ \mathrm{s}$ 时，昆虫相对桌面的径向速度、横向速度及总速度的大小。

解 极坐标运动方程：$r=ut, \theta=0.4t$；速度：$v_r=\frac{dr}{dt}=u, v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=0.4ut$，当 $t=2$ s 时，$v_r=u=0.01$ m/s，$v_\theta=0.8u=0.008$ m/s，$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=0.013$ m/s。

1.12 一质点沿半径为 R 的圆周运动，其沿圆周运动的路程公式为 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$，式中 v_0 和 b 均为正常数，求：(1) t 时刻质点总加速度的大小和方向；(2) t 为何值时总加速度的大小等于 b？(3) 当总加速度大小等于 b 时质点走过的路程。

解 (1) 速率：$v=\frac{ds}{dt}=v_0-bt, a_\tau=\frac{dv}{dt}=-b, a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}},\theta=\arctan\frac{a_n}{a_\tau}=\arctan\left[-\frac{(v_0-bt)^2}{bR}\right]$$

(2) 令 $a=b$，解出：$t=\frac{v_0}{b}$

(3) 将 $t=\frac{v_0}{b}$ 式代入 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 式，得：$s=v_0\frac{v_0}{b}-\frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2=\frac{v_0^2}{2b}$

1.13 一质点沿直线运动，速度 $v=t^2+2t+2$ m/s，如果当 $t=2$ s 时，质点位置为 $x=4$ m，求 $t=3$ s 时质点的位置、速度和加速度。

解 $v=\frac{dx}{dt}$，积分：$\int_4^{x(3)}dx=\int_2^3 v dt=\int_2^3(t^2+2t+2)dt$，解得 $x(3)=17.33$ m。

求 v 直接代值：$v(3)=17$ m/s；加速度：$a=\frac{dv}{dt}=2t+2$，代值：$a(3)=8$ m/s

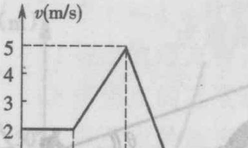


图 1-15 题 1.14 图

1.14 有一作直线运动的物体，其速度与时间的关系曲线如图 1-15 所示。求：(1) $t=2$ s、$t=6$ s、$t=10$ s 时的加速度；(2) 前 4 s、前 8 s、前 12 s 内物体运动的距离。

解 (1) 加速度对应 $v-t$ 曲线的斜率，所求三点分别位于三段直线的中间，利用式子 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 可直接求出结果；

(2) $v=\frac{dx}{dt}$，积分 $x=\int v dt$ 等于曲线下的面积，分别求各段面积即可，不必积分。

1.15 一质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2$ m/s²，如果当 $t=3$ s 时，质点位置为 $x=9$ m，速度为 $v=2$ m/s，求质点的运动方程。

解 $a=\frac{dv}{dt}$，积分：$\int_2^v dv=\int_3^t a dt=\int_3^t(4-t^2)dt$，得：$v=4t-\frac{t^3}{3}-1$；

$v=\frac{dx}{dt}$，再积分：$\int_9^x dx=\int_3^t v dt=\int_3^t\left(4t-\frac{t^3}{3}-1\right)dt$，得：$x=2t^2-\frac{t^4}{12}-t+0.75$ m

1.16 物体的运动规律为 $dv_X/dt=-kv_X^{\frac{3}{2}}t$，$k$ 为常量。当 $t=0$ 时，该物体的速度为

v_{X0}。写出其速度 v_X 随时间 t 改变的函数关系。

解 $\int_{v_{X0}}^{v_X} v_X^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v_X = -\int_0^t kt\,\mathrm{d}t$

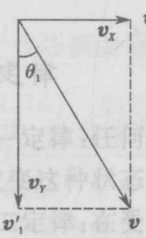
故 $\dfrac{1}{\sqrt{v_X}} = \dfrac{1}{\sqrt{v_{X0}}} + \dfrac{k}{4}t^2$

1.17 一质点沿直线运动，其加速度 $a = 4x$，且已知初始条件为 $x = x_0$ 时，$v = v_0$，求速度函数 $v(x)$。

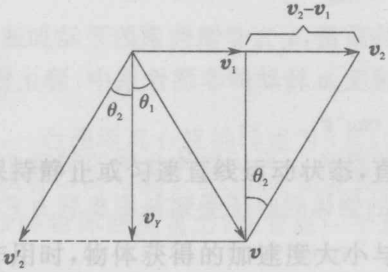
解 先做变量代换：$4x = a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

积分：$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} 4x\mathrm{d}x$，得：$v(x) = \sqrt{v_0^2 + 4(x^2 - x_0^2)}$

1.18 一辆汽车冒雨沿平直的公路行驶，当车的速率为 6 km/h 时，车窗上的雨迹为竖直向下。当车的速率为 18 km/h 时，车窗上的雨迹向车后倾斜且与竖直方向成 30°角。求雨点的速率与下落方向。



(a)



(b)

解 如图(a)：车速 $\boldsymbol{v}_1$，雨对车 $\boldsymbol{v}'_1$，雨对地：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}'_1$，由图可知雨对地水平速度：

$v_X = v\sin\theta_1 = v_1 = 6\ \mathrm{km/h}$

如图(b)：车速 $\boldsymbol{v}_2$，雨对车 $\boldsymbol{v}'_2$，雨对地：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}'_2$，由图可知雨对地垂直速度：

$v_Y = v\cos\theta_1$

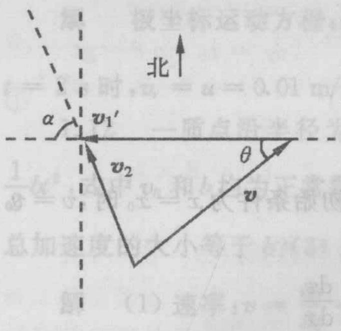
其与车速关系为：$\tan\theta_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{v_Y}$，故

$$v_Y = \frac{v_2 - v_1}{\tan\theta_2} = \frac{18 - 6}{\tan 30^\circ} = 20.78\ \mathrm{km/h}$$

所以 $v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2} = 21.6\ \mathrm{km/h}$；$\tan\theta_1 = \dfrac{v_X}{v_Y}$，$\theta_1 = \arctan\dfrac{v_X}{v_Y} = 16.1^\circ$，斜向前如图。

1.19 飞机甲以 $v_1 = 1\,000$ km/h 的速率向东飞行，同时另一架飞机乙正以 $v_2 = 800$ km/h 的速率相对飞机甲向西偏北 60°方向飞行。求飞机乙相对地的速度。

解 地相对于飞机甲以 $v_1{}' = 1\,000$ km/h 的速率向西飞行，飞机乙相对于飞机甲



题 1.19 图

以 $v_2 = 800\ \text{km/h}$ 的速率向西偏北 $\alpha = 60°$ 方向飞行。

依据伽利略相对性变换，飞机乙相对于地的速度 $\boldsymbol{v}$ 与上述两速度之间的关系为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1{}'$，如图所示。

飞机乙相对地的速度大小为

$$v = \sqrt{v_2^2 + v_1'^2 - 2v_2 v_1' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$= 916.5\quad \text{km/h}$$

方向为东偏北 θ 角，$\theta = 49.1°$。

第2章 牛顿力学的基本定律

1. 基本要求

• 确切理解力的概念，掌握牛顿三定律及其使用条件。
• 掌握常见力的性质和计算方法。
• 掌握分析物体受力的方法和隔离体法。
• 能用微积分方法求解变力作用下简单的质点动力学问题。
• 理解非惯性系与惯性系的区别，初步掌握在非惯性系中求解力学问题的方法。

2. 基本内容

1）牛顿三定律

（1）牛顿第一定律：任何物体都将保持静止或匀速直线运动状态，直到其他物体作用的力迫使它改变这种状态。

（2）牛顿第二定律：在受到外力的作用时，物体获得的加速度大小与合力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与合力方向相同，即

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \text{ 或 } \sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$$

（3）牛顿第三定律：当物体 A 以力 $\boldsymbol{F}$ 作用于物体 B 上时，物体 B 同时以力 $\boldsymbol{F}'$ 反作用于 A 上，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}'$ 大小相等，方向相反，即

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$$

2）几种常见力

（1）万有引力 $\boldsymbol{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$，是指任何两个物体间都存在相互作用的引力。其中 G 为引力常量。物体在地面或地表附近受到的地球的引力称为重力（$m\boldsymbol{g}$），其中 g 称为重力加速度，其大小为 $g = G\frac{M_{地}}{R_{地}^2}$。

（2）弹性力 $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$，是指弹性物体发生形变而产生的力，如弹簧的弹力、绳子的张力、接触物体之间的正压力等，其中 k 为劲度系数。

（3）摩擦力，分为静摩擦力和滑动摩擦力。

① 静摩擦力，是指当相互接触的两物体有相对运动趋势时，沿接触表面切向指向

阻碍运动趋向方向的力。静摩擦力的最大值称为最大静摩擦力 $f_{s,\max}$，

$$f_{s,\max} = \mu_s N$$

其中 μ_s 称为最大静摩擦系数，N 为正压力。

② 滑动摩擦力，是指当相互接触的两物体相对滑动时，沿接触表面切向指向阻碍运动方向的力，

$$f_k = \mu_k N$$

其中 μ_k 称为滑动摩擦系数，N 为正压力。

3）惯性力

惯性力是非惯性系中的物体由于系统相对于惯性系作加速运动而感受到的一种作用。它有别于通常概念上的力，它没有施力物体，可认为是一种虚拟力，称为惯性力。在非惯性系中引进惯性力，则非惯性系中的力学规律仍遵从牛顿定律。

① 在平动加速度为 $\boldsymbol{a}$ 的非惯性系中，物体受到的惯性力

$$\boldsymbol{F}_{惯} = -m\boldsymbol{a}$$

其中 m 为物体的质量，$\boldsymbol{a}$ 为非惯性系的平动加速度。

② 在以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的非惯性系中，静止物体感受到惯性离心力

$$\boldsymbol{F}_{惯} = m\omega^2\boldsymbol{r}$$

其中 m 为物体的质量，$\boldsymbol{r}$ 为从物体此刻的转动中心指向物体的位矢。而在非惯性系中，以速度 $\boldsymbol{v}'$ 运动的物体同时还受到科里奥利力 $\boldsymbol{F}_C$ 的作用，

$$\boldsymbol{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}')$$

3. 典型例题

例 1 如图(a) 所示，一倾角为 θ、质量为 M 的楔形木块 A 放于粗糙表面上，与表面间的摩擦系数为 μ。另有一质量为 m 的木块 B 放在木块 A 上，设 A、B 之间的接触是光滑的。试分析，若要 B 沿 A 的表面下滑时 A 保持相对表面不动，摩擦系数 μ 至少为多大？

解：(1) 此问题要从木块 A 在水平方向受力分析入手。而考虑到 A、B 之间有相互作用力并彼此约束，首先需用隔离体法分别分析两个木块的受力情况。如图(b) 所示，木块 A 受到重力 $M\boldsymbol{g}$、表面摩擦力 $\boldsymbol{f}$、表面支持力 $\boldsymbol{F}_R$、B 给 A 的正压力 $\boldsymbol{F}'_N$；如图(c) 所示，木块 B 受到重力 $m\boldsymbol{g}$、A 的支持力 $\boldsymbol{F}_N$。$\boldsymbol{F}'_N$ 与 $\boldsymbol{F}_N$ 是作用力与反作用力。

(2) 依据题意，木块 A 处于受力平衡的静止状态，木块 B 在垂直 A 表面方向受力平衡。建立如图所示的坐标系，应用牛顿第二定律，采用隔离体法可分别写出 A、B 的方程：

$$A:\begin{cases} F'_N \sin\theta - f = 0 \\ F_R - Mg - F'_N \cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$B: mg\cos\theta - F_N = 0$$