机械振动手册

屈维德 主编

机械工业出版社

机械振动手册

屈维德 主编

机 械 工 业 出 版 社

（京）新登字054号

简介

本手册是一部解决机械振动工程问题的综合性工具书。它既有机械振动的基础理论、常用数表、理论计算方法和公式，又有紧密结合解决机械振动工程问题所必需的实际应用资料、测试技术和数据处理，以及国内外的最新成果等。它内容丰富、查阅方便。

本手册共有22章。手册的前半部分，着重机械振动的基础理论和分析方法，由于考虑到弹性体振动的发展和应用，故加强了其中的某些内容。如壳体振动就增加了不少国内外的最新成果，并用较多的篇幅分两章编写。各章中的分析方法，除经典方法外，还有传递矩阵法、模态分析法和有限元法等。手册的后半部分，着重机械振动在工程中的应用和测试技术，如各种机械零部件的振动机理及其控制、噪声控制、振动的利用，以及信号分析和数据处理等。

本手册可供从事机械、仪器仪表、航空航天、船舶车辆、土木建筑等工作的科技人员查阅使用，也可供高等院校有关专业的师生参考。

机 械 振 动 手 册

屈维德　主编

*

责任编辑：朱亚冠　版式设计：胡金瑛

封面设计：方　芬　责任校对：熊天荣

责任印制：尹德伦

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16・印张 59 3/4・插页 2・字数 1871 千字

1992年8月北京第1版・1992年8月北京第1次印刷

印数　0,001—3,250・定价：52.00 元

*

ISBN 7-111-02694-2/TH・274

前　言

振动影响机械设备的工作性能，导致结构的疲劳损伤，危害机器的安全运行，恶化人们的工作环境。随着高性能机械设备的迅速发展，对振动防治的要求越来越高，振动问题也变得更加复杂。而且，各行各业不断涌现了新的振动问题。我们面临的任务是，应用当前发展的新技术和新方法，更加深入地研究各种振动的物理机理及其运动规律，掌握分析振动问题的现代工具，提出解决振动问题的各种途径和有效措施。

编写一本既有解决振动问题的常用数据、计算公式及经典方法，又有国内外机械振动科学技术的最新成就；既有基础理论，又有实际应用；既有理论计算，又有实验技术的机械振动手册，成为认识振动规律，解决振动问题的工具书，既是形势的迫切需要，也是我们衷心的愿望。

在70年代，我国第一次出现了有关机械振动的工具书——《机械工程手册》第21篇机械振动。经过十多年来的应用，虽然起了它应有作用。但是，由于技术的进步，以及当时编写的条件所限，已远远不能适应现在的需要。因此，有必要更新它，改写它，使其内容更加全面充实，实用性更强。这些年来，我们积累了各方面的经验和国内外的最新资料，并听取了广大读者的意见，编写出这本《机械振动手册》。

本手册共分二十二章。在手册的前半部分，偏重振动的基础理论和分析方法，除了经典方法外，还有传递矩阵法，模态分析法，有限元法等。考虑到弹性体振动的发展和应用，适当加强了其中的某些内容，例如，壳体的振动分两章编写。在手册的后半部分，偏重振动在工程中的应用，包括：各种机械零部件振动的机理及其控制，噪声控制和振动的利用。最后是振动的测试技术和数据处理。

编写这本手册我们遵循的原则是：

尽量结合我国当前的生产实际，反映中国的特色，安排编写内容，提高当前的实用性；

尽量引进当前国内外发展的新技术和新方法，便于在发展中使用；

尽量做到全书名词术语、公式符号、深度和广度的一致，以及各章的相互联系。同时，保持各章内容的系统性、完整性和特殊性。使全手册为一个整体，各章又分别独立，便于读者查用；

尽量增加解决振动问题的方法，便于读者在不同情况下选用；

尽量列举较多的例题，便于读者参照使用。

本手册由我院机械系、建工力学系的十几位同志参加编写。得到北京理工大学褚亦清教授和山东工业大学郑效忠副教授的精心审查和修改。在编写过程中，还得到我院振动研究室有关同志的帮助，在此一并致谢！

由于我们的水平有限，加之内容较多，难免有重复、不足，甚至错误之处，希望广大读者提出批评指正。

编者谨识

1988年10月于昆明工学院

常用符号表

A——振幅　m
A——面积　m^2
a——加速度　m/s^2
B——宽度　m
b——宽度　m
$B(\omega)$——机械导纳
C——电容　F
c——声速　m/s
c——阻尼系数　N·s/m
c_c——临界阻尼系数　N·s/m
c_e——等效阻尼系数　N·s/m
c_θ——扭转阻尼系数　N·m·s/rad
D——直径　m
d——直径　m
E——弹性模量　Pa
E——能量　J
E_p——势能　J
E_k——动能　J
e——偏心距　m
F——力　N
f——摩擦系数
f——频率　Hz
f_n——固有频率　Hz
G——切变模量　Pa
G——重力　N
g——重力加速度　m/s^2
H——高度　m
$H(s)$——传递函数
$H(\omega)$——频率响应函数
h——高度　m
$h(t)$——脉冲响应函数
I——冲量　N·s
I——声强　W/m^2
I——截面惯性矩　m^4
I_d——对轴的截面惯性矩　m^4
I_p——极惯性矩　m^4
i——传动比
i——$\sqrt{-1}$，虚数单位
J——转动惯量　$kg \cdot m^2$
J_d——对轴的转动惯量　$kg \cdot m^2$
J_p——极转动惯量　$kg \cdot m^2$
$K_D(\omega)$——动刚度
K_d——共振时动刚度的模　N/m
k——刚度　N/m
k_e——等效刚度　N/m
k_θ——扭转刚度　N·m/rad
L——长度　m
L——动量矩、角动量　$kg \cdot m^2/s$
L_p——声压级　dB
L_w——声功率级　dB
L——电感　H
l——长度　m
M——力矩、弯矩　N·m
M——质量　kg
M_j——激振力矩　N·m
m——质量　kg
m_e——等效质量　kg
N——正压力、轴力　N
N——功率　W、kW
n——转速　r/min
n——每分钟振动次数　c/min
n_c——临界转速　r/min
P——力　N
P——功率　W、kW
p——压力　Pa
p——动量　kg·m/s
p——声压　Pa
Q——力　N
R——半径　m
R——电阻　Ω
$R_{xx}(\omega)$——自相关函数
$R_{xy}(\omega)$——互相关函数
r——半径　m
S——面积　m^2

S_{tr}——斯脱罗哈（Strouhal）数
$S_{xx}(\omega)$——自谱函数
$S_{xy}(\omega)$——互谱函数
s——距离 m
T——周期、时间 s、min
T——动能 J
T——转矩、力偶矩 N·m
T——张力 N
T_l——单位长度的张力 N
t——时间 s、min
t——厚度 m
t_0——脉冲持续时间 s
V——体积 m^3
V——势能 J
V——速度 m/s
v——速度 m/s
W——重力 N
W——功 J
$W(\omega)$——动柔度
X、Y、Z——振幅 m
x、y、z——位移 m
$Z(\omega)$——机械阻抗

α、β——转角 rad
α、β——角加速度 rad/s^2
γ——切应变
δ——对数减缩
δ——相对位移 m
δ——比例系数
δ——厚度 m
δ_{st}——静变位 m
ε——角加速度 rad/s^2
ε——线应变
ζ——阻尼比
ζ_c——临界阻尼比
η——隔振系数
η——损耗因子
η——动力粘度 Pa·s
Θ——扭转振动振幅 rad
θ——转角 rad
λ——频率比
λ——波长 m
μ——泊松比、质量比、惯量比
μ——摩擦系数
ν——运动粘度 m^2/s
ρ——回转半径 m
ρ——密度 kg/m^3
ρ_V——体密度 kg/m^3
ρ_A——面密度 kg/m^2
ρ_l——线密度 kg/m
σ——标准偏差
σ——正应力 Pa
τ——切应力 Pa
τ——时间 s
φ——相位角、角位移 rad
ψ——相位角 rad
Ω——角速度 rad/s
ω——角频率、角速度 rad/s
ω_n——无阻尼固有角频率 rad/s
ω_0——共振频率 rad/s
ω_d——有阻尼共振频率 rad/s

$[M]$、$[m]$——质量矩阵
$[K]$、$[k]$——刚度矩阵
$[C]$、$[c]$——阻尼矩阵
$[\Delta]$、$[\delta]$、$[\alpha]$——柔度矩阵
$[\phi]$、$[A]$——振型矩阵
$[\phi]_N$——正则振型矩阵
$[I]$——单位矩阵
$[\ ]^T$——转置矩阵符号
$[\ ]^{-1}$——逆矩阵符号
$\lceil\ \rfloor$——对角矩阵符号
$\{F\}$——力矢量、力列阵
$\{A^{(r)}\}$——模态列阵（第 r 阶）
$\{q\}$——广义坐标
$\{Q\}$——广义力列阵
$\{z\}$——状态矢量

下标

x、y、z——直角坐标系中的分量
r、θ、z——柱坐标系中的分量
r、θ、φ——球坐标系中的分量
c——临界的
e——等效的
n——固有的
d——有阻尼的

p——对某点的

st——静止的

D——动态的

θ——扭转的

上标

$\dot{}$——对时间的一阶导数

$'$——对坐标的一阶导数

$\ddot{}$——对时间的二阶导数

$''$——对坐标的二阶导数

(r)——第 r 阶振型的

$*$——共轭的

$\bar{}$——平均值的

$\sim$——粗糙的估计值

$\wedge$——光滑的估计值

章　　次

第 1 章　概　述

屈维德　编

目　录

第1章　概　述

机械系统中的运动量是指位移、速度和加速度。机械系统中运动量的振荡现象，称为机械振动。说得更具体一点，相对已知的参考系，机械系统中一个随时间变化的运动量与其平均值相比，时大时小交替变化的现象，就是机械振动。在许多情况下，机械振动是有害的。它影响机械设备的工作性能和寿命，产生有损于建筑物的动载荷和不利于工作的噪声。机械振动严重时，会使零部件失效，甚至破坏而造成事故。因此，对于大多数机械设备，应将其振动量控制在允许范围以内。反过来说，对于利用振动原理而工作的机械设备，则应使它能产生所希望的振动，发挥其应有的效能。

1　机械振动的类型

按机械振动的特点，可分为五个类型。每一类型包含若干种振动。每种振动的主要特征及说明，见表 1-1。

表1-1　机械振动的分类

分　类	名　称		主　要　特　征　及　说　明
按产生振动的原因分类	自由振动		当系统的平衡被破坏，只靠其弹性恢复力来维持的振动，即去掉激励或约束之后所出现的振动。振动的频率就是系统的固有频率。存在阻尼时，其振幅逐渐衰减
	受迫振动		在外部周期性激励的持续作用下，系统被迫产生的稳态振动。振动的特性与外部周期性激励的大小、方向和频率密切相关
	参数振动		外来的作用按一定规律引起系统参数的变化而产生的振动。系统参数是指摆长、皮带张力、弦的张力、轴的刚度、轴的截面惯性矩等
	自激振动		在非线性机械系统内，由非振荡性能量转变为振荡激励所产生的振动。系统本身具有非振荡性能源和反馈特性，所产生的振动是周期性的，维持振动的交变力是由系统本身所产生或控制的，振动的频率接近于系统的固有频率
按振动的规律分类	简谐振动		随时间按正弦函数或余弦函数变化的周期性振动，振动的幅值和相位，事先能够精确地判定
	非简谐振动		不按正弦函数或余弦函数随时间变化的周期性振动或准周期性振动
	瞬态振动		非稳态、非随机的、短暂存在的振动
	随机振动		不能预先确定的振动。振动的瞬时幅值，用统计方法来描述
按振动系统的自由度数分类	单自由度系统的振动		在任意瞬时，只用一个广义坐标就可完全确定其位置的系统的振动
	多自由度系统的振动		在任意瞬时，需要两个或两个以上的广义坐标才能完全确定其位置的系统的振动
	弹性体振动		在任意瞬时，需要无限多个广义坐标才能完全确定其位置的系统的振动
按振动位移的特征分类	角振动	扭转振动	使系统产生扭转变形的振动。如果振动体是杆件，其质点只作绕杆件轴线的振动
		摆　动	振动点围绕转轴所作的往复角位移，即摆的振动
		角振动	振动位移是角位移的机械振动。扭转振动和摆动都是角振动

（续）

分类	名称		主要特征及说明
按振动位移的特征分类	直线振动	纵向振动	弹性杆沿其轴向的振动
		横向振动	使弹性系统产生弯曲变形的振动
		直线振动	振动位移是直线位移的机械振动。纵向振动和横向振动都是直线振动
按振动系统结构参数的特性分类	线性振动		可以用线性微分方程描述的振动。能运用叠加原理。振动的固有频率与其振幅无关
	非线性振动		系统中的某个或某几个参数（如刚度、阻尼等）具有非线性性质，只能用非线性微分方程描述的振动。不能运用叠加原理。振动的固有频率与其振幅有关

2 机械振动的表示方法

2·1 振动的时间历程

幅值是正弦量的最大值。机械振动的幅值包括位移幅值、速度幅值和加速度幅值。位移幅值是指振动体离开其平衡位置的最大位移，通常称为振幅。振动每往复一次的时间间隔，叫做周期，通常以 T 表示。周期的倒数，即每秒钟振动的次数，叫做振动的频率，通常以 f 表示，1 1/s 即 1 Hz。当频率以每秒 ω 弧度表示时，称为角频率，即 rad/s。设 n 表示每分钟振动的次数

$$n=\frac{60\,\omega}{2\,\pi}=9.5493\,\omega \tag{1-1}$$

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=0.1047\,n \quad \mathrm{rad/s} \tag{1-2}$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\,\pi} \quad \mathrm{Hz} \tag{1-3}$$

振动体的振动量是指振动体的位移、速度或加速度。机械振动是时间的函数。通常以时间为横坐标，以振动体的一种振动量为纵坐标的线图来描述振动的运动规律，也就是振动的时间历程。例如简谐振动的时间历程，在上述的线图上，是正弦曲线或余弦曲线，如图 1-1 所示。

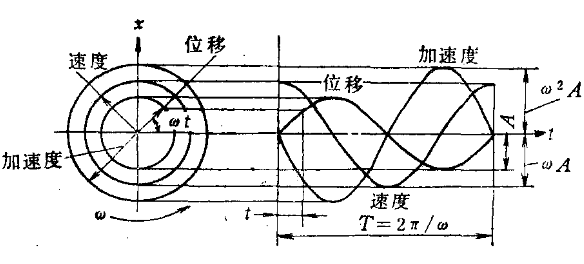

图1-1 振动的时间历程

2·2 简谐振动的表示方法

简谐振动可用矢量来表示。参见图 1-1，幅值为 A 的位移矢量以等角速度 ω 作反时针方向旋转，在 t 时刻，位移矢量在纵轴上的投影，表示振动体在此时刻的振动位移 x，即

$$x=A\sin\omega t \tag{1-4}$$

对 t 求导，得振动速度

$$\dot{x}=\omega A\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{1-5}$$

幅值为 ωA 的速度矢量比位移矢量超前 90°，同样以等角速度 ω 作反时针方向旋转，在 t 时刻，此速度矢量在纵轴上的投影表示振动体在此时刻的振动速度 $\dot{x}$。再对 t 求导，得振动加速度

$$\ddot{x}=\omega^2 A\sin(\omega t+\pi) \tag{1-6}$$

幅值为 $\omega^2 A$ 的加速度矢量，比位移矢量超前 180°，同样以等角速度 ω 作反时针方向旋转，在 t 时刻，此加速度矢量在纵轴上的投影表示振动体在此时刻的振动加速度 $\ddot{x}$。

当用矢量表示一简谐振动时，该矢量与参考矢量之间的夹角称为相角，相角是用弧度表示的。

$$x=A\sin(\omega t+\alpha) \tag{1-7}$$

$$x=A\sin(\omega t-\phi) \tag{1-8}$$

式（1-7）和式（1-8）都是简谐位移的表达式。

例1-1 今有一简谐位移，其表达式为

$$x=8\sin\left(24\,t-\frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{mm}$$

求 （1）振动的频率和周期；

（2）最大位移、最大速度和最大加速度；

（3）$t=0$ 时的位移、速度和加速度；

（4）$t=1.5$ s 时的位移、速度和加速度。

解 与式（1-8）对照，知 $\omega = 24$ rad/s

（1）频率 $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{24}{2\pi} = 3.82$ Hz

由式（1-3），得 周期 $T = \dfrac{1}{3.82} = 0.2618$ s

（2）最大位移 $A = 8$ mm

由式（1-5），得最大速度

$$\omega A = 24 \times 8 = 192 \quad \text{mm/s}$$

由式（1-6），得最大加速度

$$\omega^2 A = 24^2 \times 8 = 4608 \quad \text{mm/s}^2$$

（3）$t = 0$ 时，位移

$$x = 8\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -6.9282 \quad \text{mm}$$

由式（1-5），得速度

$$\dot{x} = 24 \times 8\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 192\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 96 \quad \text{mm/s}$$

由式（1-6），得加速度

$$\ddot{x} = 24^2 \times 8\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4808\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 3990.65 \quad \text{mm/s}^2$$

（4）$t = 1.5$ s 时，

位移 $x = 8\sin\left(36 - \dfrac{\pi}{3}\right) = -3.0806$ mm

由式（1-5），得速度

$$\dot{x} = 24 \times 8\sin\left(36 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -177.19 \quad \text{mm/s}$$

由式（1-6），得加速度

$$\ddot{x} = 24^2 \times 8\sin\left(36 + \pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1774.40 \quad \text{mm/s}^2$$

例1-2 一振动体作频率为 50Hz 的简谐振动，测得其加速度为 80m/s²，求它的位移幅值和速度幅值。

解 由式（1-6），知 $\omega^2 A = 80000\text{mm/s}^2$

由式（1-3），得 $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi$

位移幅值

$$A = \frac{\omega^2 A}{\omega^2} = \frac{80000}{(100\pi)^2} = 0.81 \quad \text{mm}$$

速度幅值 $\omega A = (100\pi) \times 0.81 = 254.47$mm/s

例1-3 一简谐振动的表达式为 $x = A\cos(100t - \phi)$，当 $t = 0$ 时，$x = 4$ mm，$\dot{x} = 1000$mm/s，求相角 ϕ 及位移幅值 A。

解 应用 $\cos\theta = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$的关系，该表达式变为 $x = A\sin\left(100t - \phi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

当 $t = 0$ 时，

$$4 = A\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = A\cos\phi \qquad (a)$$

由式（1-5），得 $\dot{x} = \omega A\sin(100t - \phi + \pi)$

$$= -\omega A\sin(100t - \phi)$$

当 $t = 0$ 时，$\dot{x} = -\omega A\sin(-\phi) = \omega A\sin\phi$

$$1000 = 100A\sin\phi$$

$$10 = A\sin\phi \qquad (b)$$

式（b）÷式（a），得

$$\frac{10}{4} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi$$

$$\phi = 1.1903 \quad \text{rad}$$

由式（b），

$$A = \frac{10}{\sin 1.1903} = 10.7703 \quad \text{mm}$$

例1-4 一振动台面以频率 f Hz 作简谐振动，要求放置于台面上的物体随台面作竖向振动而不稍离台面，求台面的最大振幅。

解 设当地的重力加速度为 g cm/s²

由式(1-6)，得台面的最大加速度 $\omega^2 A = (2\pi f)^2 A$

物体不稍离台面的条件是 $(2\pi f)^2 A \leqslant g$

台面的最大振幅应为 $\dfrac{g}{4\pi^2 f^2}$ cm

例1-5 今有两个简谐振动

$$x_1 = 4\cos(\omega t + 5°) \quad \text{mm}$$

$$x_2 = 6\sin(\omega t + 55°) \quad \text{mm}$$

它们的位移矢量都是以等角速度 ω 作反时针方向旋转，可以合成为一简谐振动。

求（1）合成位移矢量的幅值；

（2）合成简谐振动的时间历程。

解 应用 $\cos\theta = \sin(\theta + 90°)$ 的关系，

$$x_1 = 4\sin(\omega t + 5° + 90°)$$

$$= 4\sin(\omega t + 95°)$$

两者合成后的位移

$$x = 4\sin(\omega t + 95°) + 6\sin(\omega t + 55°)$$

两者的矢量和如图 1-2 所示。

$$\angle BOD = 95° - 55° = 40°$$

$$\overline{OC} = \sqrt{4^2 + 6^2 + 2 \times 4 \times 6 \times \cos 40°} = 9.422 \quad \text{mm}$$

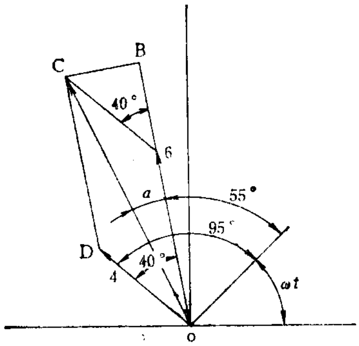

图1-2 两个简谐振动的合成

答（1）

$$\overline{BC} = 4\sin 40^\circ$$

$$\overline{BO} = 6 + 4\cos 40^\circ$$

$$\tan a = \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}} = \frac{4\sin 40^\circ}{6 + 4\cos 40^\circ} = 0.2837$$

$$a = 15^\circ.84$$

$$x = 9.422\times\sin(\omega t + 55^\circ + 15^\circ.84)$$

$$= 9.422\times\sin(\omega t + 70^\circ.84) \quad \text{mm}$$ 答（2）

简谐振动也可用$Ae^{i\omega t}$来表示。$i = \sqrt{-1}$。参见图1-3，纵轴是虚轴，横轴是实轴。

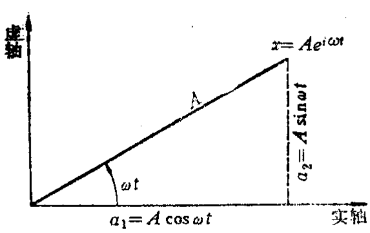

图1-3 用复数表示简谐振动

振动位移 $x = Ae^{i\omega t}$ (1-9)

振动速度 $\dot{x} = i\omega Ae^{i\omega t}$ (1-10)

振动加速度 $\ddot{x} = -\omega^2 Ae^{i\omega t}$ (1-11)

简谐振动也可用复数来表示（参见图1-3）。

$$x = a_1 + ia_2 \tag{1-12}$$

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{1-13}$$

$$\tan\omega t = \frac{a_2}{a_1} \tag{1-14}$$

例1-6 将下列复数写成$Ae^{i\omega t}$的形式，即

（1） $1 + i\sqrt{3}$；

（2） $5i$；

（3） $\dfrac{3}{\sqrt{3} - i}$；

（4） $(\sqrt{3} + i)(3 + 4i)$；

（5） $(1 + i2) + (4 - i3)$。

解 （1）由式（1-14），得

$$\tan\omega t = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

由式（1-13），得 $A = \sqrt{3 + 1} = 2$

$$\therefore \quad 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

（2）由式（1-14），得

$$\tan\omega t = \frac{5}{0} \to \infty$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2}$$

由式（1-13），得

$$A = \sqrt{25 + 0} = 5$$

$$\therefore \quad 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$$

（3）首先把分母$\sqrt{3} - i$写成$Ae^{i\omega t}$的形式由式（1-14），得

$$\tan\omega t = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

由式（1-13），得

$$A = \sqrt{3 + (-1)^2} = 2$$

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3} - i} = \frac{3}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

（4）由式（1-14），得

$$\tan(\omega t)_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\omega t)_1 = \frac{\pi}{6}$$

由式（1-13），得

$$A_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

由式（1-14），得

$$\tan(\omega t)_2 = \frac{4}{3}$$

$$(\omega t)_2=0.9273$$

由式（1-13），得

$$A_2=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$3+i\,4=5e^{i(0.9273)}$$

$$\therefore\quad(\sqrt{3}+i)(3+4i)$$

$$=2e^{i\frac{\pi}{6}}5e^{i(0.9273)}$$

$$=10e^{i(1.4509)}$$

（5）$(1+i\,2)+(4+i\,3)=5+i\,5$

由式（1-14），得 $\tan\omega t=\frac{5}{5}$

$$\omega t=\frac{\pi}{4}$$

由式（1-13），得

$$A=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad(1+i2)+(4+i3)=5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

例1-7 用两种方法求 $5e^{i\frac{\pi}{2}}$ 及 $9e^{i\frac{\pi}{6}}$ 之和。

解 （1）用矢量法求和

$\frac{\pi}{6}$rad $=30°$。参见图1-4，

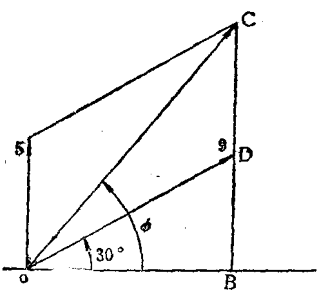

图1-4 用矢量法求和

$$\overline{OB}=9\cos30°=7.7942$$

$$\overline{DB}=9\sin30°=4.5$$

$$\overline{CB}=\overline{CD}+\overline{DB}=5+4.5$$

$$=9.5$$

$$\overline{OC}=\sqrt{\overline{CB}^2+\overline{OB}^2}$$

$$=\sqrt{9.5^2+7.7942^2}$$

$$=12.2882$$

$$\tan\phi=\frac{\overline{CB}}{\overline{OB}}=\frac{9.5}{7.7942}=1.21886$$

$$\phi=0.8837\ \text{rad}$$

$$5e^{i\frac{\pi}{2}}+9e^{i\frac{\pi}{6}}=12.2882e^{i\,0.8837}$$

（2）用复数法求和

由式（1-14），得

$$\tan(\omega t)_1=\tan\frac{\pi}{2}=\frac{a_2}{0}$$

由式（1-13），得

$$A_1=\sqrt{0+a_2^2}=a_2$$

由式（1-9）及式（1-12），得

$$a_2e^{i\frac{\pi}{2}}=ia_2$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$$5e^{i\frac{\pi}{2}}=5i$$

由式（1-14），得

$$\tan(\omega t)_2=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

由式（1-13），得

$$A_2=\sqrt{3+1}=2$$

由式（1-9）及式（1-12），得

$$2e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}+i$$

$$9e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{9}{2}\times(2e^{i\frac{\pi}{6}})=4.5\times(\sqrt{3}+i$$

$$5e^{i\frac{\pi}{2}}+9e^{i\frac{\pi}{6}}=5i+4.5\sqrt{3}+4.5i$$

由式（1-14），得

$$\tan\omega t=\frac{5+4.5}{4.5\sqrt{3}}=1.2189$$

$$\omega t=0.8837$$

由式（1-13），得

$$A=\sqrt{4.5^2\times3+9.5^2}=12.2882$$

$$5e^{i\frac{\pi}{2}}+9e^{i\frac{\pi}{6}}=12.2882e^{i\,0.8837}$$

例1-8 一质点按 $x=4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)$mm 简谐振动。此振动是由两个分量 x_1、x_2 所构成，知其中一分量是 $x_1=2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$，求 x_2。

解 $x=x_1+x_2$

$$x_2=4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{2}\sin\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t\right)$$

$$= (2\sqrt{3} - 1)\sin\omega t + (2 + \sqrt{3})\cos\omega t$$

由式（1-7），得

$$x_2 = A\cos\alpha\sin\omega t + A\sin\alpha\cos\omega t$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1} = 1.5146$$

$$\alpha = 0.9873 \quad \text{rad}$$

$$x_2 = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

当 $t = 0$，$4\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = A\sin\alpha$

$$A = \frac{3.7321}{\sin 0.9873} = 4.472 \quad \text{mm}$$

$$x_2 = 4.472\sin(\omega t + 0.9873) \quad \text{mm}$$

3 两个简谐振动的合成

方向相同、频率相等的两个简谐振动的合成，已在本章2·2的例1-5和例1-7中作了详细的说明。还有三种情况须着重指出的：（1）合成振动仍保持其周期性的条件；（2）方向相同、频率不等的两个简谐振动的合成；（3）方向互相垂直的两个简谐振动的合成。

3·1 合成振动仍保持其周期性的条件[8]

设 $x = A_1\sin\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t$ 是周期性的，

$$x = x_1 + x_2$$

x_1的周期 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$；$x_2$的周期 $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$

合成振动一周期T内，x_1振动m次，x_2振动n次，即 $\frac{T}{T_1} = m$；$\frac{T}{T_2} = n$

$$\therefore \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

合成振动仍保持其周期性的条件，$\frac{m}{n}$应是有理数，亦即$\frac{\omega_1}{\omega_2}$应是有理数。

例1-9 判别下列两个合成振动是否周期性的，即 （1）$x = \sin\left(4 + \frac{\pi}{2}\right)t + 2\sin(8+\pi)t$

（2）$x = \sin 4t + 2\sin(8+\pi)t$

解 （1）$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4+\frac{\pi}{2}}{8+\pi} = \frac{1}{2}$

即$\frac{\omega_1}{\omega_2}$是有理数，∴ 合成振动（1）是周期性的。

（2） $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4}{8+\pi}$

即$\frac{\omega_1}{\omega_2}$不是有理数，∴ 合成振动（2）不是周期性的。

3·2 方向相同的两个简谐振动的合成

（1）振幅相等、频率相近的两个简谐振动合成为拍振 两个简谐振动的振幅都等于A，但它们的频率相近，即 $\omega_1 \approx \omega_2$

$$\text{当} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= -A\cos\omega_1 t \\ x_2 &= A\cos\omega_2 t \end{aligned}\right\}$$

合成后，

$$x = 2A\left[\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

参见图1-5，振幅变化的频率等于$(\omega_1-\omega_2)$。$\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}$称为拍的周期。

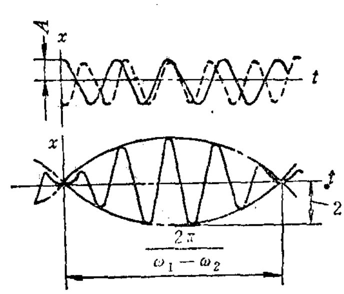

图1-5 拍的周期

（2）振幅不相等、频率的关系为 $\omega_2 = 2\omega_1$ 的两个简谐振动合成为周期性的非简谐振动

$$\text{当} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos\omega t \\ x_2 &= A_2\cos 2\omega t \end{aligned}\right\}$$

合成后， $x = A_1\cos\omega t + A_2\cos 2\omega t$

振幅变化的频率等于ω，如图1-6所示。

（3）振幅不相等，频率比为有理数的两个简谐振动合成为周期性非简谐振动

$$\text{当} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos\omega_1 t \\ x_2 &= A_2\cos\omega_2 t \end{aligned}\right\}$$

合成后，$x = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t$

如图1-7所示，振幅变化的频率等于$(\omega_1-\omega_2)$；振动的平均频率等于$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$，振幅的数值在