卷积，Fourier 级数和 Fourier 积分

Convolution, Fourier Series and Integrals

Jacques Peyrière 著
饶辉 谭波 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

卷积，Fourier级数和Fourier积分

Juanji, Fourier Jishu he Fourier Jifen

Convolution, Fourier Series and Integrals

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字：01－2010－4523号

内容提要

本书是法国巴黎南大学 Jacques Peyrière 教授在清华大学讲授的三门调和分析系列课程“$\mathbb{R}^n$上的 Fourier 分析”、“群上的调和分析”、“奇异积分算子”的基础上经过多次试用修改而成，主要内容集中在$\mathbb{R}^n$上的 Fourier 分析，对后两门课程也略有涉及。

全书篇幅不大，但内容丰富，理论和应用并重，视角和取材都非常新颖。其具体内容包括：卷积、$\mathbb{R}^n$中的 Fourier 变换、Fourier 级数、正测度的 Fourier 变换、离散化、Hilbert 变换、其他群。建议学习本书的读者要先具备较好的实分析基础，并要有少量的群论知识。

本书可作为高等学校数学类专业本科高年级学生和研究生的调和分析课程教材，也可供相关科学工作者和技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

卷积，Fourier 级数和 Fourier 积分／（法）佩里尔著；饶辉，谭波译．—北京：高等教育出版社，2010.7
书名原文：Convolution，Fourier Series and Integrals
ISBN 978－7－04－029216－9

Ⅰ．①卷… Ⅱ．①佩… ②饶… ③谭… Ⅲ．①卷积－高等学校－教材②傅里叶级数－高等学校－教材③傅里叶积分－高等学校－教材 Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 113643 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010年7月第1版
印　　张	7.75	印　　次	2010年7月第1次印刷
字　　数	140 000	定　　价	14.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29216－00

前　　言

本书假定读者熟悉测度和积分理论。

本书的程度为大学三年级水平, 但是有些内容超出了该范畴: Hardy-Littlewood 极大算子, Lebesgue 密度定理, H^s 空间, Fourier 级数收敛的某些判定, Herglotz-Bochner 定理, Hilbert 变换以及除 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{T}^n$ 外一些其他群上的 Fourier 变换的研究。我们选择这些内容, 目的是为感兴趣的读者和学有余力的学生介绍一些更深入的工作。

读者应注意到: 引入分布理论后, $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换理论翻开了新的一页。

书中还包含了一些练习, 它们是主体内容的有用补充, 完成这些练习会加深对相关问题的理解。

著者

目　录

第一章　卷　　积

§1.1　群论的预备知识

以下所讨论的群均假定是 Abel 群.

1.1.1　拓扑群

拓扑群是装备了拓扑的群, 并且此拓扑使得运算 $x\mapsto -x$ 和 $(x,y)\mapsto x+y$ 连续.

对于拓扑群 G 中的元素 a, 我们称映射 $\tau_a: x\mapsto a+x$ 为 a- 平移, 它是从 G 到 G 的同胚. 若 A 是 G 的子集且 a 是 G 的一个元素, 我们用记号 $a+A$ 表示集合 A 在映射 τ_a 下的象 $\tau_a(A)$; 更一般地, 若 A 和 B 是 G 的两个子集, $A+B$ 表示集合 $\{a+b;\, a\in A,\, b\in B\}$.

由运算 $x\mapsto -x$ 的连续性可以得到, 任意 0 的邻域 V, 都包含某个 0 的对称开邻域 W (W 对称是指 $W=-W$).

由平移算子的连续性可以得到, a 的邻域恰为 $a+V$, 其中 V 是 0 的邻域.

由运算 $(x,y)\mapsto x+y$ 在 $(0,0)$ 处的连续性可以得到, 对于 0 的每一个开邻域 V, 都存在一个 0 的开邻域 W, 使得 $W+W\subset V$ 成立.

以下是几个拓扑群的例子.

(1) 装备了离散拓扑的 Abel 群.

(2) 装备了通常拓扑的加法群 $\mathbb{R}^n$.

(3) 乘法群 $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathbb{R}^*_+$ 及 $\mathbb{C}^*$, 其中拓扑为 $\mathbb{C}$ 的通常拓扑所诱导的拓扑.

(4) 群 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 和模为 1 的复数所构成的乘法群同构且同胚, 对 $\mathbb{T}$ 的幂也有类似结论.

(5) 加法群 $\mathbb{Q}$, 拓扑为 $\mathbb{R}$ 的拓扑所诱导的拓扑.

(2) 与 (3) 中的群局部紧, 但不紧; $\mathbb{T}^n$ 是紧群.

1.1.2　平移算子在函数和测度上的作用

设 a 是群 G 中的元素. 对于 G 上的函数 f, f 的 a- 平移定义为函数:

$\tau_a f(x) = f(x-a)$.

特别地, 若 A 是 G 的子集, f 是集合 A 的特征函数 $\mathbf{1}_A$, 我们有 $\tau_a \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{a+A} = \mathbf{1}_{\tau_a(A)}$.

设 G 是拓扑群, μ 是定义在 G 的 Borel 域上的测度, 则 μ 的 a- 平移定义为 G 上的 Borel 测度: $(\tau_a\mu)(A) = \mu(A-a)$ (这个定义是合理的, 因为平移算子是一个同胚, 从而把 Borel 集映成 Borel 集). 换言之, $\tau_a\mu$ 是测度 μ 在映射 τ_{-a} 下的像测度. 等式 $\int f\,\mathrm{d}(\tau_a\mu) = \int(\tau_{-a}f)\,\mathrm{d}\mu$ 在下面两种情形下均成立:

(1) 测度 μ 和函数 f 都是正的;

(2) 函数 f 关于 μ 可积且 μ 是正测度.

Borel 测度, Radon 测度

设 X 是一个局部紧的拓扑空间. 令 $\mathcal{K}(X)$ 是 X 上的具有紧支撑的连续函数的全体, 则一个正 *Radon 测度* 是 $\mathcal{K}(X)$ 上的正线性算子 L: L 把正函数映成非负实数.

我们称定义在 X 的 Borel 域 $\mathcal{B}(X)$ 上的正测度 μ 是 *Borel 测度*, 若对于 X 中的任意紧子集 K, $\mu(K)$ 是有限的. 显然, 若 μ 是 Borel 测度, 则算子 $\varphi \mapsto \int \varphi\,\mathrm{d}\mu$ 是 X 上的 Radon 测度.

练习 1.1　设 X 是一个不可数集, 装备了离散拓扑. 对于 X 的子集 A, 定义

$$\mu(A) = 0 \quad \text{若 } A \text{ 可数}, \quad \mu(A) = +\infty \quad \text{若 } A \text{ 不可数}.$$

验证 μ 是 Borel 测度. 它所决定的 Radon 测度是什么?

称 X 上的 Borel 测度 μ 是*正则的*, 若对于 X 中任意的 Borel 集 A, 都有

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\left\{\mu(K);\ K \text{ 是 } A \text{ 的紧子集}\right\} \\ &= \inf\left\{\mu(U);\ U \text{ 是包含 } A \text{ 的开集}\right\}.\end{aligned}$$

由测度 μ 的正则性可以推出 $\mathcal{K}(X)$ 在空间 $L^p(\mu)$ 中稠密, 只要 $1 \leqslant p < \infty$.

如果拓扑空间 X 有可数基, 则 X 上的 Borel 测度都是正则的. 例如, 当 $X = \mathbb{R}^n$ 时.

下面, 我们不加证明地列出 Riesz 定理, 它揭示了两种测度之间的联系.

定理 1.2　*设 L 是正 Radon 测度, 则存在唯一的正则 Borel 测度 μ, 使得对于任意的 $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, $L(\varphi) = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu$ 成立.*

若 L 是局部紧群 G 上的正 Radon 测度, 则对于 G 中的元素 a, 平移算子 $\tau_a L$ 是按下面方式定义的 Radon 测度:

$$(\tau_a L)(\varphi) = L(\tau_{-a}\varphi), \quad \text{对于}\varphi \in \mathcal{K}(G).$$

1.1.3 Haar 测度

以下我们均考虑局部紧群, 并且承认下面的结果.

定理 1.3 设 G 是局部紧的 Abel 群, 则存在 G 上非零的平移不变的正 Radon 测度, 且任意两个这样的测度成比例.

上述定理断言存在的测度, 被称为 G 上的 Haar 测度.

对于 G 上的函数 f, 我们记 $\check{f}(x) := f(-x)$. 若 f 属于 $\mathcal{K}(G)$, 则 $\check{f}$ 亦然.

命题 1.4 若 L 是局部紧群上的 Haar 测度, 则对于 $\mathcal{K}(G)$ 中的任意函数 φ, 我们有 $L(\check{\varphi}) = L(\varphi)$.

证明 公式 $\check{L}(\varphi) = L(\check{\varphi})$ 定义了 G 上的一个 Radon 测度. 我们有

$$\check{L}(\tau_a\varphi) = L\big((\tau_a\varphi)\check{}\ \big) = L(\tau_{-a}(\check{\varphi})) = L(\check{\varphi}) = \check{L}(\varphi).$$

故测度 $\check{L}$ 是平移不变的. 由于测度 L 是非零的, 存在 $\varphi_0 \in \mathcal{K}^+(G)$ (即 $\mathcal{K}(G)$ 上的正函数集合), 使得 $L(\varphi_0) > 0$, 从而 $\check{L}(\check{\varphi}_0) > 0$. 所以测度 $\check{L}$ 是平移不变的、正的并且是非零的, 因而是 Haar 测度. 从而存在正数 λ 使得 $\check{L} = \lambda L$. 另一方面, 由于 $\check{L}(\varphi_0 + \check{\varphi}_0) = L\big((\varphi_0 + \check{\varphi}_0)\check{}\ \big) = L(\check{\varphi}_0 + \varphi_0) \geqslant L(\varphi_0) > 0$, $\lambda = 1$. 证毕.

例 1.5 下面是几个 Haar 测度的例子:

(1) 离散群上的计数测度;

(2) $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度;

(3) $\mathbb{R}_+^*$ 上的测度 $\mathrm{d}x/x$ ($\mathrm{d}x$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度).

在 1.1.4 中我们将确定 $\mathbb{T}^n$ 上的 Haar 测度.

命题 1.6 若 λ 是 G 上的 Haar 测度, Ω 是非空开集, 则 $\lambda(\Omega) > 0$.

证明 设 K 是 G 的紧子集, 则 K 可以被 Ω 的有限个平移覆盖; 若 $\lambda(\Omega)$ 为 0, 则 $\lambda(K) = 0$, 从而任意紧集测度为 0, 这与 λ 非零矛盾.

1.1.4 $\mathbb{T}^n$ 上的 Haar 测度

设 T 是一个正数. 则对不同的 T, 群 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 都同构而且同胚. 通常选取 T 为 1 或 2π.

设 p 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上的自然投影, 则由商拓扑的定义, p 是连续的. 公式

$$\lambda(A)=\int_0^T \mathbf{1}_A\circ p(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{T}\quad (\text{其中 } A \text{ 是 } \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \text{ 上的任意 Borel 集})$$

定义了一个 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上的 Borel 测度 λ. 下面证明测度 λ 是平移不变的:

$$\begin{aligned}\lambda(p(a)+A)&=\int_0^T \mathbf{1}_{p(a)+A}(p(x))\,\frac{\mathrm{d}x}{T}=\int_0^T \mathbf{1}_A(p(x)-p(a))\,\frac{\mathrm{d}x}{T}\\&=\int_0^T \mathbf{1}_A\circ p(x-a)\,\frac{\mathrm{d}x}{T}=\int_{-a}^{T-a} \mathbf{1}_A\circ p(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{T}\\&=\int_0^T \mathbf{1}_A\circ p(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{T}=\lambda(A)\end{aligned}$$

(最后一个等式成立是因为 $\mathbf{1}_A\circ p$ 是一个周期为 T 的周期函数). 从而测度 λ 是 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上的 Haar 测度. 测度 $T\lambda$ 等于 Lebesgue 测度在任意一个长度为 T 的区间上的限制, 再经过投影 p 得到的测度.

通过乘积方式, 我们可以得到 $(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})^n$ 上的 Haar 测度.

1.1.5 空间 $L^p(G)$

当 G 是一个局部紧群时, G 上有一个 Haar 测度 λ. 对于紧群, 通常我们选取总质量为 1 的 Haar 测度; 但对于离散群, 我们选取计数测度 (对于有限群这两种选择不一致!). 空间 $L^p(\lambda)$ 通常被记为 $L^p(G)$. 当不会引起混淆时, 我们使用下面记号:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f\,\mathrm{d}\lambda,\qquad \|f\|_p=\|f\|_{L^p(G)}\,.$$

我们知道, 空间 L^p 的元素是几乎处处相等的函数所组成的等价类. 有时, 我们用 $\mathcal{L}^p$ 表示 p 次可积函数空间.

命题 1.7 当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时, 平移算子是 $L^p(G)$ 空间上的等距同构. 若 $1\leqslant p<\infty, f\in L^p(G)$, 我们有

$$\lim_{a\to 0}\|\tau_a f-f\|_{L^p(G)}=0\,.$$

证明 由定义容易得到: 平移算子是 $L^p(G)$ 空间上的等距同构.

设 ε 是一个正数. 由于 $\mathcal{K}(G)$ 在 $L^p(G)$ 中稠密 (因为 p 有限), 我们可以选取 φ 属于 $\mathcal{K}(G)$ 使得 $\|f-\varphi\|_p\leqslant\varepsilon/3$. 设 V_0 是 0 的一个紧邻域. 由于函数 φ 连续且有紧支撑, 因而它是一致连续的. 故存在 0 的邻域 V 使得

$$\sup_{a\in V}\|\tau_a\varphi-\varphi\|_\infty\leqslant\frac{1}{3}\,\varepsilon\big[\lambda(V_0+\operatorname{supp}\varphi)\big]^{-1/p}.$$

(注意到 $V_0+\operatorname{supp}\varphi$ 是紧集, 从而测度有限.) 故当 a 在 0 的邻域 $V\cap V_0$ 中时, 我们有

$$\|\tau_a f-f\|_p\leqslant\|\tau_a(f-\varphi)\|_p+\|\tau_a\varphi-\varphi\|_p+\|\varphi-f\|_p\leqslant\varepsilon\,,$$

命题得证.

§1.2 卷 积

设 f 和 g 是定义在局部紧群 G 上的复值函数, 而 λ 是 G 上的 Haar 测度. 只要 $f*g(x)=\int_G f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$ 有意义, 我们就定义它为 f 和 g 在点 x 的卷积. 该定义也可写成: $f*g(x)=\int_G \tau_x(\check{f})\,g\,\mathrm{d}\lambda$.

引理 1.8 设 f 和 g 是定义在 G 上取值于 $\mathbb{C}$ 的 Borel 函数, 则函数 $(x,y)\mapsto f(x-y)\,g(y)$ 是 Borel 函数. 若 f 和 g 是正函数, 则 $f*g$ 是 G 上的正 Borel 函数, 且

$$\int f*g\,\mathrm{d}\lambda=\left(\int f\,\mathrm{d}\lambda\right)\left(\int g\,\mathrm{d}\lambda\right).$$

证明 函数 $(x,y)\mapsto f(x-y)\,g(y)$ 是由连续函数 $(x,y)\mapsto(x-y,y)$ 和 Borel 函数 $(x,y)\mapsto f(x)\,g(y)$ 复合而成, 因而是 Borel 函数. 引理的第二部分可由对积分 $\iint f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)$ 应用 Fubini-Tonelli 定理得到.

注意, 若 f 和 g 是正 Borel 函数, 则 $f*g$ 是一个下半连续函数: 首先 f 和 g 是单调增加、有界且具有紧支撑的函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 的极限; 再由后面的定理 1.12 知 f_n*g_n 是连续函数, 从而 $f*g=\sup f_n*g_n$ 是下半连续的.

命题 1.9 设 f 和 g 是两个 Borel 函数.

(1) 若它们是正函数, 则有 $f*g=g*f$;

(2) 若 $|f|*|g|(x)$ 有限, 则 $f*g(x)$ 和 $g*f(x)$ 存在且相等, 并有 $|f*g(x)|\leqslant|f|*|g|(x)$.

证明 通过变量替换, 我们有

$$f*g(x)=\int f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)=\int f(z)\,g(x-z)\,\mathrm{d}\lambda(z)=g*f(x)\,,$$

上式在 f 和 g 都是正函数时成立; 在函数 $y\mapsto f(x-y)\,g(y)$ 可积, 或者说 $|f|*|g|(x)$ 有限时也成立.

命题 1.10 若 f, g 分别和 f_1, g_1 λ - 几乎处处相等, 则 $f * g(x)$ 和 $f_1 * g_1(x)$ 也 λ - 几乎处处相等.

证明 对于任意的 $x \in G$, 函数 $\tau_x(\check{f})g$ 和 $\tau_x(\check{f}_1)\, g_1$ 在零测集 $\{g \neq g_1\} \cup (x - \{f \neq f_1\})$ 之外均相等. 故积分 $\int \tau_x\, \check{f} \cdot g\, \mathrm{d}\lambda$ 和 $\int \tau_x\, \check{f}_1 \cdot g_1\, \mathrm{d}\lambda$ 同时存在并且相等. 证毕.

这个命题允许我们在讨论卷积的时候, 可以考虑关于下面集族可测的函数: 由 Borel 集族经过 λ - 完备化得到的集族. 事实上, 对于每个关于此集族可测的函数, 存在一个 Borel 函数和它 λ - 几乎处处相等.

命题 1.11 若 f 和 g 是两个可测函数, 且 x 不属于集合 $\{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$, 则 $f * g(x)$ 为 0.

证明 若 $x \notin \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$, 那么对于任意的 $y \in G$, 均有 $f(x-y)\, g(y) = 0$, 从而 $f * g(x) = 0$. 证毕.

特别地, 若 f 和 g 都具有紧支撑, 则 $f * g$ 也有紧支撑.

定理 1.12 若 $f \in L^p(G)$ 且 $g \in L^{p'}(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, 则卷积 $f * g$ 是定义在 G 上的一致连续的有界函数, 且 $\|f * g\|_{L^\infty(G)} \leqslant \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^{p'}(G)}$. 若进一步假设 p 和 p' 有限, 则 $f * g$ 属于 $C_0(G)$, 这里 $C_0(G)$ 是在 G 上连续并在无穷远处为 0 的函数组成的空间.

证明 由 Hölder 不等式:

$$|f| * |g|(x) = \int \tau_x\, |\check{f}| \cdot |g|\, \mathrm{d}\lambda \leqslant \|\tau_x \check{f}\|_p \, \|g\|_{p'} = \|f\|_p \, \|g\|_{p'} .$$

因此 $f * g$ 在所有的点都有定义 (由命题 1.9 (2)). 我们还有

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &= \left| \int \left(\tau_{x+h}\check{f} - \tau_x \check{f}\right) g\, \mathrm{d}\lambda \right| \\ &\leqslant \|\tau_x(\tau_h \check{f} - \check{f})\|_p \, \|g\|_{p'} = \|\tau_h \check{f} - \check{f}\|_p \, \|g\|_{p'} . \end{aligned}$$

因为 p 和 p' 不能同时为无穷, 不妨设 p 有限. 我们知道 (命题 1.7) 当 h 在 G 中趋于 0 时, $\|\tau_h \check{f} - \check{f}\|_p$ 趋于 0. 这就证明了 $f * g$ 是一致连续的.

当 p 和 p' 都有限时, $\mathcal{K}(G)$ 在 $L^p(G)$ 和 $L^{p'}(G)$ 中稠密. 令 $\varepsilon > 0$. 选取 $\mathcal{K}(G)$ 中的两个函数 φ 和 ψ 使得 $\|f - \varphi\|_p \leqslant \varepsilon$, $\|g - \psi\|_{p'} \leqslant \varepsilon$, 则

$$\|f * g - \varphi * \psi\|_\infty \leqslant \|f * (g - \psi)\|_\infty + \|(f - \varphi) * \psi\|_\infty \leqslant \varepsilon(\|f\|_p + \|g\|_{p'} + \varepsilon) .$$

由命题 1.11 知 $\varphi*\psi$ 属于 $\mathcal{K}(G)$. 再由上式可知, 函数 $f*g$, 作为 $\mathcal{K}(G)$ 中元素的一致收敛极限, 必属于 $C_0(G)$.

定理 1.13 *设 $f\in L^1(G), g\in L^p(G)$, 则函数 $f*g$ 在 G 上几乎处处有定义; 这个函数类属于空间 $L^p(G)$ 且有 $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\,\|g\|_p$.*

证明 $p=\infty$ 的情形已经讨论过 (定理 1.12), 现设 $1\leqslant p<\infty$. 令 p' 为 p 的共轭指数: $p^{-1}+(p')^{-1}=1$. 由 Hölder 不等式可以得到

$$|f|*|g|(x)\leqslant\left(\int|g(y)|^p\,|f(x-y)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)^{1/p}\left(\int|f(x-y)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)^{1/p'}$$

(所用测度为 $|f(x-y)|\,\mathrm{d}\lambda(y)$), 从而 $(|f|*|g|)^p\leqslant\|f\|_1^{p-1}\,|f|*|g|^p$. 由此式 (和引理 1.8) 可得, $\int(|f|*|g|)^p\,\mathrm{d}\lambda\leqslant\|f\|_1^p\,\|g\|_p^p<\infty$. 这就证明了 $|f|*|g|$ 是几乎处处有限的, 从而 (由命题 1.9) 得到 $f*g$ 是几乎处处有定义的.

如果我们能证明 $f*g$ 是可测函数, 则定理得证. 若 f 和 g 是实值函数, 由前面的讨论知四个卷积 $f^+*g^+, f^+*g^-, f^-*g^+, f^-*g^-$ 都几乎处处有限且可测, 从而 $f*g$ 可测. 若 f 和 g 是复值函数, 我们把它们分成实部和虚部来考虑. 证毕.

推论 1.14 *定义卷积作为乘积运算后, 空间 $L^1(G)$ 是一个交换 Banach 代数.*

证明 首先回顾 Banach 代数的定义: 它是 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 空间, 装备了乘法运算, 此乘法运算是双线性的, 满足结合律, 且对于范数连续.

由定理 1.13 知卷积是 $L^1(G)$ 中的运算, 且 $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\,\|g\|_1$. 剩下我们只需证明卷积的结合律. 设 f, g 和 h 是 $L^1(G)$ 中的三个元素. 我们有

$$f*g(x-z)=\int f(x-z-y)\,g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)=\int f(x-y)\,g(y-z)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,,$$

故

$$(f*g)*h(x)=\int\left(\int f(x-y)\,g(y-z)\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)h(z)\,\mathrm{d}\lambda(z)\,.$$

由于 $\int(|f|*|g|)*|h|\,\mathrm{d}\lambda=\|f\|_1\,\|g\|_1\,\|h\|_1<\infty$, 故由 Fubini 定理, 对几乎处处的 x, 函数 $(y,z)\mapsto f(x-y)\,g(y-z)\,h(z)$ 是 $\lambda\otimes\lambda-$ 可积的. 从而再次应用 Fubini 定理:

$$(f*g)*h(x)=\int\left(\int f(x-y)\,g(y-z)\,h(z)\,\mathrm{d}\lambda(z)\right)\mathrm{d}\lambda(y)=f*(g*h)(x)\,.$$

练习 1.15　证明当函数 f, g, h 分别属于 $L^1(G)$, $L^p(G)$ 以及 $L^{p'}(G)$ 时, 结合律仍成立, 这里 $p^{-1}+(p')^{-1}=1$.

研究前两个函数属于 $L^1(G)$, 第三个函数属于 $L^p(G)$ 的情形.

注记 1.16　定理 1.12 和定理 1.13 并未概括可以定义函数卷积的所有情形. 我们列出下面结果作为练习, 其中 $L^p_{\text{loc}}(G)$ 表示如下函数类 f 组成的集合: 对于任意紧集 K, $f\mathbf{1}_K$ 属于 $L^p(G)$. 我们称 f 为局部可积函数.

(1) 如果 $f \in L^1_{\text{loc}}(G), g \in L^p_{\text{loc}}(G)$ 且其中的一个函数有紧支撑, 则 $f * g \in L^p_{\text{loc}}(G)$.

(2) 如果 $f \in L^p_{\text{loc}}(G), g \in L^{p'}_{\text{loc}}(G)$ 且其中的一个函数有紧支撑, $p^{-1}+(p')^{-1}=1$, 则 $f*g$ 是连续函数.

(3) 设 f 和 g 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上为 0. 若 f 属于 $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 且 g 属于 $L^{p'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}), p^{-1}+(p')^{-1}=1$, 则 $f*g$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 并且在 $(-\infty, 0]$ 上为 0.

若 G 是离散的, 则代数 $L^1(G)$ 有单位元: 它是在 0 处取值为 1 而在其他点取值为 0 的 δ 函数. 若 G 不是离散的, 则代数 $L^1(G)$ 没有单位元 (见练习 1.17). 在 $\mathbb{R}^n$ 的情形我们会看到一个正函数 f 不能是单位元: 若 φ 是一个正的、连续的且具有非空紧支撑的函数, 则 $\varphi * f$ 的支撑和 φ 不相同.

练习 1.17

(1) 设 μ 是一个正测度且 $f \in L^1(\mu)$. 证明: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$ 使得 $\displaystyle\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon$ 对于任何满足 $\mu(A) \leqslant \eta$ 的可测集 A 都成立 (提示: 注意到 $\displaystyle\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{A\cap\{|f|\leqslant t\}} |f|\,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|>t\}} |f|\,\mathrm{d}\mu$).

(2) 设 $u \in L^1(G)$ 是一个单位元, 记 α 为 0 的开邻域的 Haar 测度的下确界.

① 假定 α 为零. 证明: 存在 0 的一个开邻域 U 使得 $\displaystyle\int_U |u|\,\mathrm{d}\lambda \leqslant 1/2$. 进一步证明: 若 V 是 0 的邻域且 $V+V \subset U$, 则 $\mathbf{1}_V * u \neq \mathbf{1}_V$. 而这将导致一个矛盾.

② 假定 α 不为零. 证明: 对于 0 的任意相对紧的开邻域 U, $\mathrm{card}U \leqslant \lambda(U)/\alpha$ 成立. 并由此证明 G 的拓扑是离散拓扑.

$L^1(G)$ 和 G 的特征

定义 1.18　从某个交换 Banach 代数到 $\mathbb{C}$ 的连续非零同态, 称为这个 Banach 代数的特征.

可以证明, 从一个 Banach 代数到 $\mathbb{C}$ 的同态恒连续, 从而在前面定义中可以

去掉连续性.

$L^1(G)$ 的特征首先是 $L^1(G)$ 上的连续线性算子, 从而对应唯一的 $L^\infty(G)$ 中的函数 h, 使得此特征在 $L^1(G)$ 中的元素 f 上的值等于 $\int fh\,\mathrm{d}\lambda$. 从而对于 f 和 g 属于 $L^1(G)$, 我们有 $\int f*g\cdot h\,\mathrm{d}\lambda = \left(\int fh\,\mathrm{d}\lambda\right)\left(\int gh\,\mathrm{d}\lambda\right)$, 这意味着

$$\iint f(x)\,g(y)\,h(x+y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \iint f(x)\,g(y)\,h(x)\,h(y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,.$$

因此,

$$h(x+y) = h(x)\,h(y) \quad \lambda\otimes\lambda\text{- 几乎处处}. \tag{1.1}$$

当函数 h 不几乎处处为零时, 存在一个 Borel 集 E, E 的 Haar 测度有限并且 $0 < \left|\int_E h\,\mathrm{d}\lambda\right| < \infty$. 在 E 上对式 (1.1) 两边积分, 得到 $\left(\int_E h\,\mathrm{d}\lambda\right) h(x) = \int_E h(x+y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$ 对于 λ– 几乎处处的 x 成立. 等式的右边是 h 和 $\mathbf{1}_{-E}$ 卷积, 从而是连续的 (定理 1.12), 故 h 和一个连续函数 h_1 几乎处处相等. 此函数 h_1 连续、有界、非零, 且对于任意的 x 和 y 属于 $G, h_1(x+y) = h_1(x)\,h_1(y)$ 成立. 由此可以推出 h_1 恒不为零 (若 $h_1(x_0) = 0$, 则 $h_1(y) = h_1(x_0)\,h_1(y-x_0) = 0$), 并且 h_1 的模为 1 (若 $|h(x_0)| \neq 1$, 则集合 $\{h(nx_0)\,;\,n\in\mathbb{Z}\}$ 无界). 这样, 我们就证明了 h_1 是群 G 到复平面上的单位圆所形成的乘法群的一个同态 (这就是我们称之为群 G 的特征的原因), 并且是连续同态.

因此每个 $L^1(G)$ 的特征都由 G 的连续特征定义. 而每个 G 的连续特征显然定义了一个 $L^1(G)$ 的特征, 且 G 的两个不同的特征定义 $L^1(G)$ 的不同特征. 故我们可以把 $L^1(G)$ 的特征和 G 的连续特征等同起来. 请注意: 若 G 不是离散群, 则 G 有非连续特征.

G 上的连续特征, 装备了函数的乘法作为运算之后, 成为一个群 $\widehat{G}$, 称为 G 的对偶群. 我们把这个群视为一个加群: 若 χ_1 和 χ_2 是两个连续特征, 则 $\chi_1+\chi_2$ 定义为 $(\chi_1+\chi_2)(x) = \chi_1(x)\,\chi_2(x)$. 在此约定之下, 零元是取值恒为 1 的特征, 而 $(-\chi)(x) = \overline{\chi(x)}$.

1. $\mathbb{Z}$ 的特征

$\mathbb{Z}$ 的特征 χ 由 $\chi(1)$ 确定 : $\chi(n) = \chi(1)^n$. $\mathbb{Z}$ 上的特征构成的集合与模为 1 的复数, 或者说 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, 一一对应.

2. $\mathbb{R}$ 的连续特征

我们寻找从 $\mathbb{R}$ 到 $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z| = 1\}$ 的连续函数 χ, 并要求 $\chi(x+y) =$

$\chi(x)\,\chi(y)$. 由于必须有 $\chi(0)=1$, 从而存在正数 $\eta>0$ 使得 $\int_0^\eta \chi(t)\,\mathrm{d}t$ 不为零. 我们有 $\chi(x)\int_0^\eta \chi(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+\eta}\chi(t)\,\mathrm{d}t$, 这证明了 χ 是一个可微函数. 进一步, 我们有 $\chi'(x)=\chi'(0)\,\chi(x)$, 从而 $\chi(x)=\exp(x\,\chi'(0))$. 由于 χ 的模恒为 1, 我们有 $\chi(x)=\exp \mathrm{i}\xi x$, 其中 ξ 属于 $\mathbb{R}$. 这样我们得到了 $\mathbb{R}$ 的全体连续特征. 同时, 我们也证明了 $\widehat{\mathbb{R}}$ 和 $\mathbb{R}$ 同构.

3. $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 的连续特征

设 p 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 的自然同态. 若 χ 是 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 的一个连续特征, 则 $\chi\circ p$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个 T- 周期的连续特征. 故 $\chi\circ p(x)=\exp\dfrac{2\mathrm{i}\pi nx}{T}$, 其中 n 属于 $\mathbb{Z}$. 反之, $\mathbb{R}$ 的每一个 T- 周期连续特征, 都定义了一个 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上的连续特征.

练习 1.19　证明: $\mathbb{R}^n$ 的每个连续特征都有如下形式: $x\mapsto \exp \mathrm{i}\langle\xi,x\rangle$, 其中 ξ 属于 $\mathbb{R}^n$, $\langle\xi,x\rangle$ 表示 ξ 和 x 的欧几里得内积.

确定 $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}_+^*$ 以及 $\mathbb{R}^*$ 的连续特征.

定义 1.20　如果 $f\in L^1(G)$ 且 χ 是 G 的一个连续特征, 令 $\hat{f}(\chi)=\int_G \overline{\chi(x)}\,f(x)\,\mathrm{d}x$. 该函数 $\hat{f}$ 定义在群 $\widehat{G}$ 上, 称为 f 的 Fourier 变换.

群 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{T}^n$ 上的 Fourier 变换是接下来五章的研究目标. 在局部紧的 Abel 群上可以建立 Fourier 变换的一般理论, 这将在最后一章提及, 但对此问题的完整研究则超出了本书的范围.

§1.3　渐近单位

沿用先前的记号: G 代表一个局部紧的 Abel 群, λ 是 G 上的 Haar 测度, 我们假设群 G 是非离散的.

定义 1.21　设 T 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 而 t_0 属于 $\overline{\mathbb{R}}\setminus T$ 并且是 T 的极限点. 称 $L^1(G)$ 中的一族函数 $\{\alpha_t\}_{t\in T}$ 是一个渐近单位 (或逼近单位), 若它满足下面条件:

(1) $\int \alpha_t\,\mathrm{d}\lambda=1$ 对所有的 t 属于 T 成立,

(2) $M=\sup\int|\alpha_t|\,\mathrm{d}\lambda<\infty$,

(3) 对于 0 在 G 中的任意紧邻域 V, 有 $\lim\limits_{t\to t_0}\int_{V^c}|\alpha_t|\,\mathrm{d}\lambda=0$.