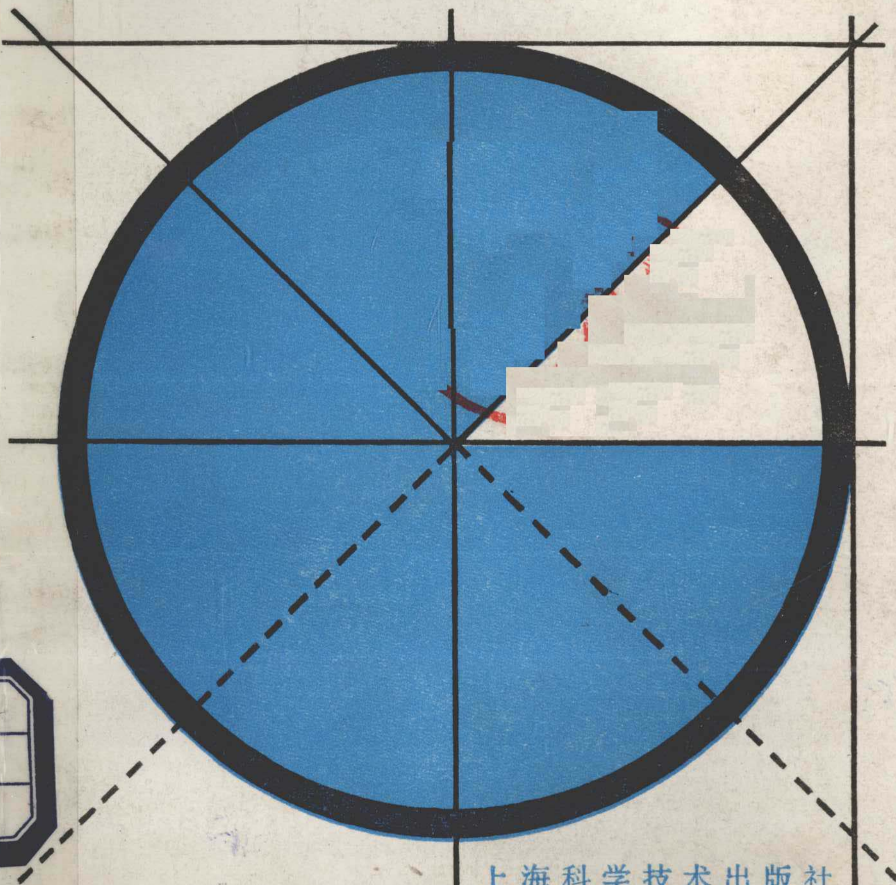
初中数学课外活动讲座

第一册

余应龙　戈迺钊　编



上海科学技术出版社

初中数学课外活动讲座

（第 一 册）

余应龙 戈迺钊 编

上海科学技术出版社

责任编辑　唐仲华

初中数学课外活动讲座
（第 一 册）
余应龙　戈酒钊　编
上海科学技术出版社出版发行
（上海瑞金二路 450 号）
上海中华印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 5　字数 109 000
1988 年11月第1版　1988 年11月第1次印刷
印数：1—25,000

ISBN 7-5323-1183-X/G·161

定价：1.25 元

内 容 提 要

有:有理数的简便运算、绝对值的概念、关于图形的一些计算问题、图形的面积以及一些应用、抽屉原则、逻辑问题、棋盘上的数学、整数的性质、列方程解应用题、想想算算、十字相乘法、余数定理与因式分解、数学竞赛题选讲，书末附有本书的练习题答案与提示，便于读者自学。

前　言

随着数学教学改革的深入，各中学纷纷开展数学学科小组、数学爱好者的课外活动。然而，为指导课外小组的活动，数学教师要花费大量时间去寻找材料、编写讲义；而学生缺乏一套较有系统、可供阅读的辅导书，它既能巩固课内所学的知识，又能开扩视野，提高数学思维能力，这就促使我们编写一套供广大初中学生阅读，或供他们开展数学小组活动使用的小丛书。

本丛书就是为此目的而编写的。这套书共分三册，其内容初中一年级使用第一册，初中二年级使用第二册，初中三年级使用第三册。在编写过程中，我们尽量考虑内容与要求适合于较多的读者，即既要适合普通中学中等程度的学生，也要适合重点中学一般学生；既考虑缩短普通中学与重点中学学生的知识差距，也考虑进一步发展学生的智力与能力。

本书是这套丛书中的第一册，主要是为初一年级学生的课外活动而编写的。本书突出了初一数学中的重要内容，在加强基础知识的同时，介绍了有关的数学方法和数学问题，为进一步学习打下扎实的基础。本书特点是深入浅出，重视数学思想方法训练、重视解题思路的分析。本书可以作为课堂教学的补充（有些内容可作复习参考之用），也是课外活动的合适材料。

本书在编写过程中得到了汪天忠同志的热情帮助，仔细

审阅了本书的初稿，并作了许多修改。在此谨向他表示深切的谢意。

由于编者水平有限，又兼完稿仓促，书中不免存在一些缺点、错误，衷心恳望读者不吝赐教。

编　者

一九八八年七月

目　录

第一讲　有理数的简便运算

学习数学离不开解题，更离不开运算。经常发现有些同学在解题过程中，好不容易找到了解题的途径，但是由于运算出了差错，导致“全盘皆输”这真使人惋惜，十分同情。因此训练学生的数学运算能力，提高运算正确性，是提高数学教学质量的一个重要课题。

运算应该力求正确、迅速、合理，当然，运算正确是根本目的。而合理运算是关键所在，运算合理，有助于保证运算正确；运算合理，才可能算得迅速。因此，在平时数学运算的训练中要注意运算合理性的探究。

所谓合理地运算，首先当然是指每一步运算必须有正确的概念、法则、定理、定律作为依据，否则，运算不可能正确。其次是如何根据题设给出的数量间的特殊关系，寻求解题的最佳途径，使运算尽可能简便，现介绍以下两种方法：

一、改变运算种类

例 1　计算：$1+2+3+\cdots+98+99+100$。

分析　相传“数学王子”高斯不满十岁时，就几乎不加思考地回答老师提出的这个问题。这里由于他注意到了这样的事实：

$$1+100=2+99=3+97=\cdots=49+52=50+51。$$

于是，将这一百个数，分成了 50 组具有相同的和。根据乘法与加法这二种运算的关系，乘法是特殊的加法，乘积就是若干个相同加数的和，

所以很快回答了这个问题。

解 $1+2+3+\cdots+98+99+100$

$=50\times101=5050$。

说明 这道题的各个加数之间有很特殊的关系：从小到大排列的加数，每一个数比后面相邻的一个都小1。所以今后碰到有这种特征的和式，即将加数从小到大排列之后，每两个相邻加数的差是同一个常数的话，我们都可以模仿其解题方法，其和一定等于（第一个加数＋最后一个加数）×加数个数÷2。刚才的101就是1+100，50就是100÷2。

据此，思考：$11+13+15+17+19+21+23=?$

$$(-3)+(-1)+1+3+\cdots+9+11=?$$

例 2 计算：$179+184+190$。

分析 因为 $179+184+189=(179+189)\times3\div2$，而本题的结果比它大1。

解 $179+184+190=179+184+189+1$

$=552+1=553$。

例 3 求从1到100的正整数的各个数位上的数字之和。

分析 这问题与例1是不一样的，它要计算各个数位上数字的和。本题解法不止一种，这里讲一种最简单的。

若将1到98这九十八个自然数分成如下49组。(1,98)，(2,97)，(3,96)…(48,51)，(49,50)。这样每组两个数，它们的十位上的数字之和为9，个位上的数字之和也为9。因此，每组里两个数的个位上的数字之和与十位上的数字之和相加等于18；而99的个位上的数字与十位上的数字之和也为18，最后再考虑余下的一个数100，它的各数位上的数字之和为1。

解 $18\times(49+1)+1=900+1=901$。

以上几个例子，都是利用乘法与加法这两种运算的关系，使得求和的运算得到简化。

例 4 计算：91384×25。

分析 由于 $25=100\div4$,所以将本题的运算种类作相应改变。

解
$$\begin{aligned}91384\times25&=91384\times(100\div4)\\&=91384\times100\div4\\&=2284600。\end{aligned}$$

说明 在具体运算时，只要在 91384 的末尾添上两个零，成为 9138400,再除以 4 即可。

例 5 计算：$231252000\div125$。

分析 由于 $125\times8=1000$,所以据此对原式变形，以便简化运算。

解
$$\begin{aligned}&231252000\div(1000\div8)\\&=231252000\div1000\times8\\&=1850016。\end{aligned}$$

说明 十进位数的末尾是零或者几个零，会给运算带来方便，所以在乘法运用中常常可将因数 5,25,125 写成 $10\div2,100\div4,1000\div8$;在除法运算中，除数是 5,25,125,则写成相应的形式。

通过改变运算种类，促使计算过程简化。显然，这种构思方法，可以从因数或除数为 5，25，125，推广到 5 的任何次整数幂，即使不是 5 的整数次幂作因数或除数，但只要其中末位数字为 5,也可以试用、使运算得以简化。

如 $418\times15=418\times(30\div2)=12540\div2=6270$。

二、改变运算顺序

改变运算顺序使计算过程简化，主要依据是运算的定律与有关性质。

例 6 计算：$66+73+329+34+171+227$。

分析 在例 4、例 5 中，我们已经意识到，倘若能使有些数的末尾产生一个零或几个零的话，会便于运算，在本题计算中，我们也设法寻求这种解题方案，其运算依据是加法交换律、结合律。

解 $66+73+329+34+171+227$

$=(66+34)+(73+227)+(329+171)$

$=100+300+500=900$。

例 7 计算：$124-288-176+238-12$。

分析 这是省略了加号的代数和，如果按照运算顺序，从左到右逐个相加就既费时又费力，所以可以考虑运用交换律、结合律使计算简化。

解 $124-288+176+238-12$

$=(124+176)-(288+12)+238$

$=300-300+238=238$。

说明 解题中用到添括号法则的话，特别要当心括号前带"－"号时，括号内的各个数都要变号。一般可以把同号的数放在同一个括号内，也可以使其和的末尾是零的几个数放在同一个括号内。

例 8 计算：$1\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-4\frac{1}{3}-\frac{5}{8}-3\frac{1}{6}-\frac{7}{8}+1\frac{5}{8}$。

分析 按上题相仿的方法，使其和为整数的加数放在一个括号内。

解 $1\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-4\frac{1}{3}-\frac{5}{8}-3\frac{1}{6}-\frac{7}{8}+1\frac{5}{8}$

$=\left(1\frac{1}{2}-4\frac{1}{3}-3\frac{1}{6}\right)+\left(1\frac{5}{8}-\frac{5}{8}\right)-\left(2\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{5}$

$=-6+1-3+\frac{1}{5}=-7\frac{4}{5}$。

例 9 计算：$25\times12633\times5262\times11$。

解 $25\times12633\times5262\times11$

$=(25\times5262)\times12633\times11$

$=131550\times12633\times11$

$=1661871150\times11$

$=18280582650$。

说明 (1) 25 与 5262 这个偶数先乘，使其积的末位数能产生零，(2) 131550×12633 的竖式中，可以采用比较简便的方法，分析如下：

$$
\begin{array}{rl}
131550 & \\
\times\quad 12633 & \\
\hline
39465 & \\
39465 & \cdots\cdots\text{照上行抄一遍} \\
78930 & \cdots\cdots\text{把上行数乘 2} \\
157860 & \cdots\cdots\text{把上行数乘 2} \\
\hline
1661871150 &
\end{array}
$$

你能说出这样进行竖式运算的道理吗？

例 10 计算：$478\times331\div17\div239\times51$。

分析 这里是五个数的乘除混合运算，如果硬是从左到右去算的话，会出现分数，所以干脆"化除为乘"，统一为分数的乘法，看看能否简便。

解 $478\times331\div17\div239\times51$

$$=\frac{478\times331\times51}{17\times239}=1986。$$

说明 当然，也可以看出 478 与 239、51 与 17 之间存在倍数与约数的关系，实施交换律，如：

$$478\times331\div17\div239\times51$$
$$=(478\div239)\times(51\div17)\times331=1986。$$

例 11 计算：$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right)\times12$。

分析 如果按照混合运算顺序，应先算括号内的代数和，然后再计算它和 12 的积，可以设想在先算代数和时要经过比较麻烦的通分的过程，如果利用乘法对于加法的分配律来改变运算顺序，就可以使整个计算过程简化。

解 $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right)\times12$

$$=\frac{1}{2}\times12-\frac{1}{3}\times12-\frac{3}{8}\times12+\frac{1}{6}\times12$$

$$=6-4-\frac{9}{2}+2=-\frac{1}{2}。$$

例 12 计算：$39.5\times(-1.374)-0.395\times(-37.4)$。

分析 这里是求两个积的差，如果审题时意识到 39.5 与 0.395 之间有倍数与约数的关系，就可能想到可利用乘法分配律来简化运算。

解 $39.5\times(-1.374)-0.395\times(-37.4)$

$$=39.5\times(-1.374)-39.5\times(-0.374)$$

$$=39.5\times(-1.374+0.374)=-39.5。$$

例 13 计算：$-24\times9\frac{11}{12}-18\frac{6}{13}\div\left(-\frac{6}{13}\right)$。

分析 按"先乘除，后加减"去处理这道题，决非上策；如果知道带分数的实质是整数与真分数的和，就可能会想到在本题中运用乘法分配律来改变运算顺序，使其简化运算。

解 $-24\times9\frac{11}{12}-18\frac{6}{13}\div\left(-\frac{6}{13}\right)$

$$=-24\times\left(10-\frac{1}{12}\right)-\left(18+\frac{6}{13}\right)\times\left(-\frac{13}{6}\right)$$

$$=-240+2+39+1=-238。$$

例 14 计算：$\left|-\frac{177}{577}\right|+\left|\frac{177}{577}-\frac{119}{299}\right|-\left|-\frac{119}{299}\right|$。

分析 如果试图将中间那个绝对值内部的差先算出来，再化去绝对值的符号，看来不是件轻松事，然而先判定其中差值的正负性后立即化去绝对值符号，可以简便运算过程。

解 $\because\ \frac{177}{577}<\frac{119}{299}$，

$$\therefore \quad \left|-\frac{177}{577}\right|+\left|\frac{177}{577}-\frac{119}{299}\right|-\left|-\frac{119}{299}\right|$$

$$=\frac{177}{577}+\frac{119}{299}-\frac{177}{577}-\frac{119}{299}=0。$$

通过上述例子的讨论，说明在有理数的运算中，如果注意题目中数字间特殊关系的话，往往可以找到较为合理的计算方法，使运算简化并有助于提高正确率。因此建议读者在平时解题时，一定要养成良好的习惯，认真审题，再动笔计算；不急于求成，要讲究方法。当然，要算得对，算得好的根本保证，还是以正确、牢固掌握基本概念为前提，否则还可能出现像下列类似的错误呢！

$$\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\div\left(-0.125\right)=1\div\left(-\frac{1}{8}\right)=-8;$$

$$-3^2\div 6\times\frac{1}{6}=9\div 1=9。$$

请你找出错误的原因，并纠正之，然后再做下面的练习。

练　习　一

用你认为最合理的方法，计算下列各题：

1. $-75.8+31.08-24.2-1.08$。

2. $\frac{3}{8}+5\frac{1}{3}-4\frac{5}{16}+\frac{1}{6}$。

3. $\left(\frac{1}{3}-1\frac{7}{12}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\div 6\times\frac{1}{6}$。

4. $(-123)\times 4+75\times(-5)-127\times 4-125\times 5$。

5. $17\div(-12)-82\div 11+(-7)\div 12+17\div(-11)$。

6. $25+7\times 14\div 11\times 132$。

7. $1\frac{156}{157}\times 314-99\times 73$。

8. $\frac{7}{8}\div 56.34-0.00875\div(-0.5634)$。

9. $8\frac{3}{17}\times 2\frac{1}{15}+4\frac{3}{17}\times 14\frac{13}{15}+4\times 14\frac{13}{15}$.

10. $757509\times 341789+218600\times 3417.89$.

第二讲　绝对值的概念

看到这个课题，也许有的同学认为“小题大作”。因为从他们看来学习绝对值很简单，只要会计算如同：$|+5|=5$，$\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$|0|=0$ 这样的习题就可以了。确实，绝对值的概念可以这样理解：“一个数去掉它的性质（正或负）符号之后就得到了它的绝对值，零的绝对值是零”。然而对于爱好数学的初中学生来说，决不会只停留在这样的水准上。

绝对值，是中学代数中相当重要的一个基本概念，随着数学知识的不断积累，同学们对它的理解会不断深化。所以在初一刚接触到绝对值的概念时，就能认真思考它的涵义，加深对它的理解，无疑是有益的。

中学数学一开始就引进了负数，这是为了表示客观生活中存在具有相反意义的量的需要，并直观地借助数轴，使一个数 a 与数轴上的点建立对应关系。一般将正数记在原点右侧；将负数记在原点左侧；将数零与原点对应。然而在实际生活中也存在不需要考虑方向的量，如计算内燃机车的用油量时，就不管列车是从东向西行驶的还是由西向东行驶的，只要考虑它的行驶距离就够了，对于这个距离就没有必要用负数来表示，这样就有必要研究绝对值。

绝对值的概念，可以借助数轴来理解：一个数的绝对值，就是数轴上表示这个数的点离开原点的距离。

如下图中，点 A 表示$+4$，点 B 表示-4，由于它们离原点都是 4 个单位长，所以：$|+4|=4$，$|-4|=4$。

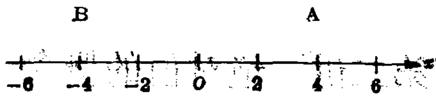


图 2-1

从这个意义上说，一个数的绝对值与某两点之间的“距离”相对应，可见一个数的绝对值不会是负数（有可能是零）。

关于绝对值的概念，也可以这样规定：正数的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。根据这个规定可以用如下式子来表示一个数 a 的绝对值：

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0); \\ 0 & (a=0); \\ -a & (a<0)。\end{cases}$$

由于 0 的相反数还是 0，上式也可写为：

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0); \\ -a & (a<0); \end{cases} \quad 或 \quad |a|=\begin{cases} a & (a>0); \\ -a & (a\leqslant 0)。\end{cases}$$

根据绝对值的概念，我们不难得出下面四个结论：

(1) 数 a 的绝对值不会是负数，即$|a|\geqslant 0$。

(2) 一对相反数的绝对值相等，即$|a|=|-a|$。

(3) 对于给定的数 a，它的绝对值是唯一确定的。

(4) 数 a 的绝对值不会小于数 a，即$|a|\geqslant a$。

例 1 求适合条件$|x-1|+|y+1|=0$的 x，y 值。

分析 如果两数之和等于零，则这两数应该是一对相反数，然而$|x-1|$，$|y+1|$都不会是负数，所以，只能是它们同时为零（零的相反数还是零）。