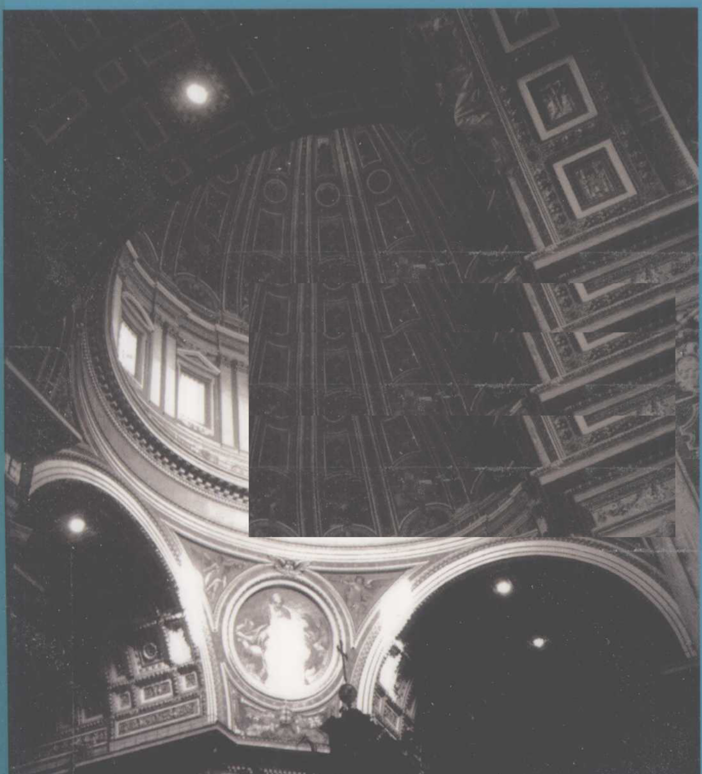
北京市高等教育精品教材立项项目

21世纪普通高等教育基础课规划教材

COMPLEX FUNCTION
AND
INTEGRAL TRANSFORM

复变函数与积分变换

张建国　李冱岸　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

北京市高等教育精品教材立项项目

复变函数与积分变换

主　编　张建国　李冱岸

参　编　张建文　邹杰涛　肖维维

机　械　工　业　出　版　社

本书起点比较低，力求讲解细致、通俗易懂，在引入概念时注意和熟悉知识相关联。在每章的最后增加了本章知识总结和典型例题，每章配有两种难度层次的习题。本书第一章介绍了复变函数的基本概念，第二章到第五章是复变函数理论的基本内容，包括了复变函数的积分理论、级数理论、留数理论、保角映射等传统复变函数基础理论，第六、七章介绍了两种积分变换理论：傅里叶变换和拉普拉斯变换。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/张建国，李洹岸主编．—北京：机械工业出版社，2010.6

21世纪普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-29712-3

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①张…②李…　Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材　Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第023750号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：孙志强　版式设计：霍永明
封面设计：张　静　责任校对：李　婷　责任印制：李　妍
北京诚信伟业印刷有限公司印刷
2010年6月第1版第1次印刷
169mm×239mm・15.75印张・298千字
标准书号：ISBN 978-7-111-29712-3
定价：26.00元

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销 售 一 部：(010)68326294
销 售 二 部：(010)88379649
读者服务部：(010)68993821

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com

前　言

自 1988 年起，编者为各类工科本科学生多次讲授复变函数与积分变换课程. 从对工科本科生培养的一般要求、后续课程的学习和科学研究的工作需要来看，他们在复变函数方面的训练应当在传统复变函数理论基础上再向上提高一步，增加一些数学实用性训练，使学生更切实地体会到数学和现代工业科学的紧密联系. 但是，事实上，他们当中多数人在学过复变函数之后，只理解了其中很少一部分内容，有的人甚至连基本概念都没有理解，就更谈不上如何运用复变函数. 在教育部提出大众化大学教育理念的这些年中，这种情况愈发严重，许多人学复变函数已经靠死记硬背来应付考试过关，完全无法达到利用复变函数来训练抽象逻辑思维和实际应用能力的目的. 这种状况看来不是短期能够改善的. 因此，尽管有不少优秀的工科复变函数与积分变换教材和专著，编者依然感到有必要写一本言简意赅、深入浅出、实用性强的具有针对性的教材.

考虑到本书读者的广泛性，编者力求讲解细致、通俗易懂. 本书在引入概念时注意和读者熟悉的知识相关联，定理的叙述和证明秉持“易读性”和“探索性”的双重原则，使之更适合读者接受知识由浅入深的自然过程. 特别地，在每章的最后，我们增加了本章总结一节，较系统地对本章内容作了小结、给出了知识框架及知识要点概述，并给出了涉及本章基本内容的典型例题，相信这些会对广大同学学习掌握本书的基本内容起到很好的作用 .

本书第一章介绍了复变函数的基本概念，包括极限、连续、解析等概念，给出了一些常用的初等解析函数，这一章可视为预备知识. 第二章到第五章是复变函数理论的基本内容，其中包括了复变函数的积分理论、级数理论、留数理论、保角映射等传统复变函数基础理论. 这部分内容与传统教材比较，剔除了许多较困难、繁杂的证明，但保留了体现复变函数理论本质思想的核心内容，并对许多重要的定理证明作了更细致的阐述. 本书的第六、七章介绍了两种积分变换理论：傅里叶（Fourier）变换与拉普拉斯（Laplace）变换. 在介绍了一些较为实用结果的同时还论述了它们在工科实际问题中的某些应用.

本书每章都配备有两种难度层次的习题，其中习题（A）是为了读者加深理解基本内容提供的基本练习，而习题（B）中除有一定难度的习题外，有少量习题可视做基本内容的补充，还有一部分习题是专为学生体验数学知识在现代工业科学中如何发挥作用而设的.

本书由北方工业大学张建国、李迈岸主编．第一章由张建国、邹杰涛编写，第二章由李迈岸编写，第三、四章由太原理工大学张建文编写，第五～七章由肖维维编写．

全书在孕育过程中得到北方工业大学教务处领导、理学院领导及各位数学同仁的热情关怀与支持．吉林大学胡成栋教授和兰州大学牛培平教授审阅了全书并提出了许多宝贵意见．在此，特向各位领导及全体老师表示衷心感谢．由于编者水平有限，经验不足，本书难免有不少缺点，希望读者不吝指正．

编　者

目　　录

前言

第一章　复数与复变函数 …… 1
第一节　复数与复数运算 …… 1
一、复数及其表示法 …… 1
二、复数的运算 …… 3
三、复数在几何上的应用 …… 5
第二节　复变函数的概念 …… 7
一、映射的概念 …… 7
二、实变复值函数的概念 …… 7
三、复变函数的概念 …… 8
第三节　复变函数的极限和连续 …… 11
一、区域的概念 …… 11
二、函数的极限 …… 11
三、函数的连续 …… 14
第四节　解析函数 …… 15
一、导数与微分 …… 15
二、C-R（Cauchy-Riemann）条件 …… 18
三、解析与奇点 …… 22
第五节　初等解析函数 …… 25
一、指数函数 …… 25
二、三角函数 …… 26
三、双曲函数 …… 28
四、对数函数 …… 29
五、乘幂 a^b 与幂函数 …… 31
六、反三角函数与反双曲函数 …… 33
第一章总结 …… 34
一、内容小结 …… 34
二、知识框架 …… 34
三、知识要点 …… 34

四、典型例题 …… 36
习题一（A） …… 39
习题一（B） …… 40
第二章　复变函数的积分 …… 42
第一节　复变函数积分的概念 …… 42
一、单连域与多连域 …… 42
二、积分的定义 …… 43
三、积分存在的条件及其计算方法 …… 44
四、积分的性质 …… 45
第二节　柯西积分定理与原函数 …… 47
一、柯西积分定理 …… 47
二、原函数 …… 48
三、柯西定理的推广——复合闭路定理 …… 50
第三节　柯西积分公式与高阶导数公式 …… 52
一、柯西积分公式 …… 52
二、高阶导数公式 …… 54
第四节　解析函数与调和函数的关系 …… 58
第二章总结 …… 61
一、内容小结 …… 61
二、知识框架 …… 62
三、知识要点 …… 62
四、典型例题 …… 63
习题二（A） …… 65
习题二（B） …… 66
第三章　级数 …… 68
第一节　复数项级数 …… 68
一、复数列的极限 …… 68
二、复数项级数 …… 69
三、绝对收敛级数 …… 70
第二节　幂级数 …… 70
一、幂级数的概念 …… 70
二、阿贝尔（Abel）定理　收敛圆和收敛半径 …… 71
三、幂级数的运算和性质 …… 74
第三节　泰勒级数 …… 74

一、泰勒定理 …… 74
二、泰勒展开例题 …… 77
第四节 罗朗级数 …… 81
一、罗朗级数 …… 81
二、罗朗展开例题 …… 85
第三章总结 …… 87
一、内容小结 …… 87
二、知识框架 …… 88
三、知识要点 …… 88
四、典型例题 …… 89
习题三（A） …… 91
习题三（B） …… 93
第四章 留数理论及其应用 …… 94
第一节 孤立奇点的分类及性质 …… 94
一、可去奇点 …… 95
二、极点 …… 96
三、本性奇点 …… 97
第二节 留数定理及留数的求法 …… 99
一、留数的概念 …… 99
二、留数的求法 …… 101
三、杂题 …… 103
第三节 用留数定理计算实积分 …… 105
一、$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$ 的计算 …… 105
二、$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的计算 …… 107
三、$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x(a>0)$ 的计算 …… 109
第四章总结 …… 112
一、内容小结 …… 112
二、知识框架 …… 113
三、知识要点 …… 113
四、典型例题 …… 115
习题四（A） …… 117
习题四（B） …… 118

第五章　保角映射…………………………………………………… 120
第一节　保角映射的概念………………………………………… 120
一、实变复值函数的导数的几何意义……………………………… 120
二、解析函数导数的几何意义……………………………………… 121
三、保角映射的概念……………………………………………… 123
第二节　分式线性映射…………………………………………… 124
一、有关无穷远点的一些概念……………………………………… 124
二、分式线性映射的一般性质……………………………………… 126
三、唯一确定分式线性映射的条件………………………………… 129
四、三个重要的分式线性映射……………………………………… 130
五、杂例…………………………………………………………… 133
第三节　某些初等函数所构成的保角映射……………………… 138
一、幂函数 $w=z^n$ 与根式函数
$w=\sqrt[n]{z}$（其中 n 为大于 1 的自然数）…………………… 138
二、指数函数 $w=e^z$ ……………………………………………… 142
第五章总结………………………………………………………… 145
一、内容小结……………………………………………………… 145
二、知识框架……………………………………………………… 145
三、知识要点……………………………………………………… 145
四、典型例题……………………………………………………… 146
习题五（A）……………………………………………………… 148
习题五（B）……………………………………………………… 149
第六章　傅里叶变换……………………………………………… 151
第一节　傅氏积分………………………………………………… 151
第二节　傅氏变换………………………………………………… 155
一、傅氏变换的定义……………………………………………… 155
二、单位脉冲函数及其傅氏变换…………………………………… 158
三、非周期函数的频谱……………………………………………… 162
第三节　傅氏变换的性质………………………………………… 165
一、线性性质……………………………………………………… 165
二、对称性………………………………………………………… 166
三、相似性………………………………………………………… 166
四、位移性质……………………………………………………… 167
五、微分性质……………………………………………………… 168

六、积分性质……169
七、乘积定理与能量积分……170
八、卷积与卷积定理……172
九、相关函数……174
第四节　应用举例……177
第六章总结……181
一、内容小结……181
二、知识框架……181
三、知识要点……181
四、典型例题……184
习题六（A）……185
习题六（B）……186
第七章　拉普拉斯变换……188
第一节　拉氏变换的概念……188
第二节　拉氏变换的性质……195
一、线性性质……196
二、微分性质……196
三、积分性质……199
四、平移性质……200
五、卷积定理……204
六、初值定理……206
七、终值定理……207
第三节　拉氏逆变换……208
一、留数法……208
二、部分分式法……210
三、查表法……213
第四节　应用举例……214
一、微分方程的拉氏变换解法……214
二、传递函数……221
第七章总结……224
一、内容小结……224
二、知识框架……224
三、知识要点……224
四、典型例题……226

习题七（A）…………………………………………………………………… 227
习题七（B）…………………………………………………………………… 228
附录………………………………………………………………………… 230
附录 A　傅氏变换简表 …………………………………………………… 230
附录 B　拉普拉斯变换简表……………………………………………… 233
附录 C　Γ 函数的基本知识……………………………………………… 237
一、Γ 函数与 B 函数 ………………………………………………… 237
二、Γ 函数的基本性质…………………………………………………… 238
参考文献…………………………………………………………………… 242

第一章 复数与复变函数

所谓复变函数就是自变量为复数的函数，它的理论和运算方法已被广泛地应用于理论物理、弹性物理、天体力学、流体力学、空气动力学、各类电子技术等方面．

复变函数研究的主要对象是在某种意义下可导的复变函数，通常称为解析函数．为了建立这种解析函数的基本理论，在这一章中，我们首先介绍复数、复数的运算与复变函数的概念；然后讨论复变函数的极限、连续、可导性与解析性；最后给出常见的初等解析函数及其性质．

第一节 复数与复数运算

一、复数及其表示法

所谓复数，是指形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数，这里 i 称为虚数单位，具有性质 $\mathrm{i}^2=-1$．x，y 都是实数，分别称为复数 z 的实部与虚部，记为 $x=\mathrm{Re}\,z$，$y=\mathrm{Im}\,z$．

如果 $\mathrm{Im}\,z\neq 0$，而 $\mathrm{Re}\,z=0$，那么 z 称为纯虚数．如果 $\mathrm{Im}\,z=0$，那么 z 是实数．因此，实数可以看做是复数的特殊情形，或实数是复数的一部分．但是要注意，实数可以比较大小，而复数却不能比较大小．

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$，由一对有序实数（x，y）唯一确定，于是建立平面直角坐标系后，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可由平面上的点 $P(x, y)$ 来表示（见图 1-1）．由于实数对应着 x 轴上的点，故 x 轴称为**实轴**；纯虚数对应着 y 轴上的点，故 y 轴称为**虚轴**，这样表示复数的平面称为**复平面**或 **z 平面**．为了方便起见，今后我们不再区分复数与复平面上的对应点．

在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以用连接原点 O 与点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示（见图 1-1）．向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 叫做复数 z 的**模**，记作 $|z|$，即 $|z|=r$．实轴

正向转到与向量$\overrightarrow{OP}$方向一致时所成的角度θ（逆时针方向转动所成的角为正角，否则为负角）叫做复数z的**幅角**，记作$\operatorname{Arg} z$，即$\operatorname{Arg} z=\theta$. 从图1-1可以看出，若$z\neq0$，则

$$r=\sqrt{x^2+y^2}>0, \tag{1.1.1}$$

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta. \tag{1.1.2}$$

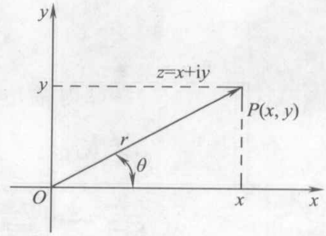


图 1-1

利用式（1.1.2）可以把复数z表示成下列形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.1.3}$$

这个形式叫做复数$z\neq0$的三角式.

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.1.4}$$

就可以把式（1.1.3）改写成

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.5}$$

这个形式叫做复数z的**指数式**. 为了与三角式及指数式区别，我们把$z=x+\mathrm{i}y$叫做复数z的**代数式**.

当$z=x+\mathrm{i}y\neq0$时，x，y就不能同时为零. 从式（1.1.1）及式（1.1.2）就可以求出θ. 注意到终边相同的角可以相差2π的整数倍，所以θ有无穷多值. 为了方便，通常取主值，即把满足条件$-\pi<\theta\leqslant\pi$的θ叫做幅角的主值，并记作$\arg z$. 于是有

$$\theta=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1.1.6}$$

不难证明，$\operatorname{Arg} z$的主值$\arg z$用$\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$的主值$\arctan\dfrac{y}{x}$来表示时有如下的关系：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y\neq0 \text{ 时}\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & \text{当 } x<0,\ y\neq0 \text{ 时}\\ \pi, & \text{当 } x<0,\ y=0 \text{ 时}\end{cases}, \tag{1.1.7}$$

其中$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

例 1 求复数$z=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$的模和幅角，并写出它的三角式和指数式.

解 这里$x=-1$，$y=-\sqrt{3}$. 以此代入式（1.1.1）得模

$$|z|=r=\sqrt{1+3}=2.$$

于是由式（1.1.2）即得

$$\cos\theta=-\frac{1}{2},\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

利用式（1.1.7），算得幅角主值与幅角分别为

$$\arg z=-\frac{2\pi}{3},\ \operatorname{Arg} z=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\ 为整数.$$

如果 θ 取主值，那么 z 的三角式与指数式分别为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

二、复数的运算

复数的相等、加、减、乘、除运算规定为：

(1) $x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$；

(2) $(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$；

(3) $(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$；

(4) $\dfrac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}(x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0)$.

显然上述四则运算满足以下规律：

交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1z_2=z_2z_1$；

结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$；

分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

由于实数可以看做是复数的特例，我们在规定复数的四则运算时的一个基本要求是复数的运算法则施行于实数时，能够与实数运算的结果相符合.

复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数，记作 $\bar{z}$. 显然有 $\bar{\bar{z}}=z$，所以 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 互为共轭复数. 关于复数的共轭运算，不难证明如下性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；

(2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$；

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2\neq 0)$；

(4) $z\bar{z}=|z|^2$；

(5) $|z|=|\bar{z}|$；

(6) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$；

(7) $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}z$.

复数的乘、除、乘方和开方运算，采用三角式或指数式往往比代数式更方便. 若非零复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

则乘积

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\tag{1.1.8}$$

商

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)},\quad z_2\neq0.\end{aligned}\tag{1.1.9}$$

所以

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq0),\tag{1.1.10}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,\\&\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.\end{aligned}\tag{1.1.11}$$

根据复数与向量的对应关系，公式（1.1.8）说明：表示乘积 z_1z_2 的向量是由表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\operatorname{Arg}z_2$ 并伸长（缩短）到 $|z_2|$ 倍得到的．特别地，当 $|z_2|=1$ 时，乘法就变成了只是旋转，例如：$\mathrm{i}z$ 相当于将 z 所对应的向量沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，$-z$ 相当于将 z 所对应的向量沿逆时针方向旋转 π；当 $\arg z_2=0$ 时，乘法就变成了仅仅是伸长（缩短）.

公式（1.1.10）说明：两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数商的模等于它们模的商．

公式（1.1.11）说明：两个复数乘积的幅角等于它们幅角的和；两个复数商的幅角等于它们幅角的差．注意到由于幅角的多值性，上述关于幅角的两个等式（1.1.11）应理解为对于左端的任一个值，右端必有一个值和它相等，并且反过来也一样．

作为乘积的特例，我们考虑非零复数 z 的正整数次幂 z^n. 它是 n 个相同因子的乘积，设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

当 $r=1$ 时，得棣摩弗公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\tag{1.1.12}$$

下面来推导 n 次方根公式，我们将满足方程 $w^n=z$ 的根 w 称为 z 的 n 次方根，记为$\sqrt[n]{z}$. 为了求出 w，若记 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$则方程变形为

$$\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

从而得两个方程

$$\rho^n=r,\ e^{in\varphi}=e^{i\theta}.$$

解之得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

因此 z 的 n 次方根为

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \tag{1.1.13}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根，当以其他整数值代入时，这些根又重复出现，例如当 $k=n$ 时，$w_n=w_0$.

在几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 2 计算 $\sqrt[4]{1-i}$ 的所有值.

解 由于 $1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$，所以

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{-\pi/4+2k\pi}{4}\right)},\ k=0,1,2,3.$$

因此

$$\sqrt[4]{1-i}=w_0,\ iw_0,\ -w_0,\ -iw_0.$$

其中 $w_0=\sqrt[8]{2}e^{-\frac{\pi}{16}i}$.

例 3 求方程 $z^3+1=0$ 的所有根.

解 因 $z^3+1=0$，所以 $z=\sqrt[3]{-1}$，而 $-1=e^{i\pi}$，故得方程的三个根依次为

$$z_0=e^{\frac{\pi}{3}i},\ z_1=e^{\pi i}=-1,\ z_2=e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

三、复数在几何上的应用

下面我们通过例子说明：怎样通过复数所适合的方程（或不等式）来刻画适合某种几何条件的平面图形，从这些例子中还可以看出有的平面曲线用复数形式的方程表示更简明.

例 4 由复数与向量的对应关系，建立连接复平面上 z_1 及 z_2 两点的线段方程与直线方程（图 1-2）.

解 连接 z_1 及 z_2 两点的线段的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1),\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

过 z_1 及 z_2 两点的直线方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1),$$

其中 $-\infty<t<+\infty$.

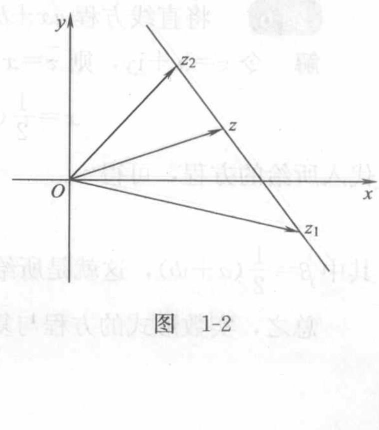


图 1-2

由例 4 可知复平面上的三点 z_1，z_2，z_3 共线的充要条件为

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=t\ (t\ 为任何实数).$$

例 5 求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z-2|=3$； (2) $|z-2|=|z-4|$.

解 (1) 在几何上不难看出，方程 $|z-2|=3$ 表示所有与点 (2, 0) 距离为 3 的点的轨迹，即复平面上中心为 (2, 0) 半径为 3 的圆（见图 1-3a).

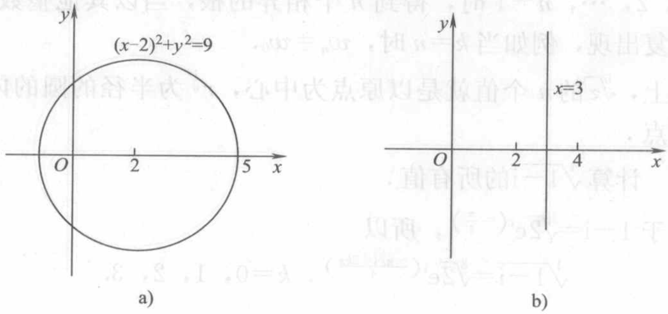


图 1-3

下面用代数的方法求出该圆的直角坐标方程.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，方程变为

$$|x-2+\mathrm{i}y|=3,$$

也就是

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=3, 或 (x-2)^2+y^2=9.$$

(2) 几何上，该方程表示到复平面上点 (2, 0) 和点 (4, 0) 距离相等的点的轨迹，所以方程表示的曲线就是连接复平面上点 (2, 0) 到点 (4, 0) 的线段的垂直平分线（见图 1-3b)，同样若设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$|x-2+\mathrm{i}y|=|x-4+\mathrm{i}y|,$$

亦即 $x=3$.

例 6 将直线方程 $ax+by+c=0$ 化为复数形式，其中 a，b，c 为实数.

解 令 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 由共轭复数性质 (6)、(7) 有

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}),$$

代入所给的方程，可得

$$\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+c=0,$$

其中 $\beta=\frac{1}{2}(a+\mathrm{i}b)$，这就是所给直线方程的复数形式.

总之，实数形式的方程与复数形式的方程可通过下述关系式相互转化：