高等学校教学用書

球面三角学

Ф. Ф. 巴甫洛夫，В. П. 馬希克維奇著

高等教育出版社

高等学校教学用書

球面三角学

Ф. Ф. 巴甫洛夫, В. П. 馬希克維奇著
刘亞星譯

高等教育出版社

本書系根据苏联煤炭工業出版社（Углетехиздат）出版的巴甫洛夫（Ф. Ф. Павлов）和馬希克維奇（В. П. Машкевич）合著的“球面三角学”（Сферическая тригонометрпа）1951年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等学校矿山測量專業教学参考書。

球　面　三　角　学

Ф. Ф. 巴甫洛夫　В. П. 馬希克維奇著

刘亞星譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印装　新华書店發行

統一書号13010·343　開本 850×1168 1/32　印張 3 6/16　字數 79,000　印數 8,501—10,500

1953年10月商务初版（共印30,500）

1957年7月新1版　1961年3月北京第5次印刷　定價（6）¥0.34

目　录

緒言 ······ 5
历史介紹 ······ 5

第一編　球面几何
§ 1　球面上的圓 ······ 8
§ 2　軸、極、極綫、球面角及其度量 ······ 11
§ 3　球面坐标 ······ 12
a) 赤道坐标系 ······ 12
б) 水平坐标系 ······ 13
§ 4　球在平面上的投影、制圖網 ······ 14
§ 5　一般評論及制圖網对解球面几何問題的应用 ······ 17
§ 6　球面上的圖形：球面二角形、球面三角形、極綫三角形和对称三角形 ······ 20
§ 7　極綫球面三角形的性質 ······ 22
I. 原球面三角形和極綫球面三角形的关系 ······ 22
II. 球面三角形角的性質 ······ 25
III. 球面三角形的相等 ······ 26
IV. 球面三角形中邊和角的关系 ······ 28
§ 8　球面三角形的內切圓和外接圓 ······ 29
§ 9　球面二角形的面积、球面三角形的面积、球面剩余的定义 ······ 30
§ 10　大圓弧和小圓弧的直綫長度 ······ 33
§ 11　球面三角形作圖問題 ······ 34

第二編　球面三角
§ 1　导論 ······ 37
§ 2　球面三角形边的余弦公式 ······ 37
§ 3　正弦公式 ······ 40
§ 4　角的余弦公式 ······ 42
§ 5　球面三角形五个元素的公式 ······ 43
§ 6　角的正弦和鄰边余弦的乘积公式 ······ 43
§ 7　球面三角形相鄰四元素間的关系式或余切公式 ······ 44
§ 8　球面直角三角形 ······ 46
§ 9　球面直边三角形 ······ 50

§ 10 球面直角三角形解法 ……………………………… 51
§ 11 解球面任意三角形的公式 ……………………………… 55
I. 用边的函数定角的任意三角形公式 ……………………… 55
а) 半角正弦公式 ……………………………… 55
б) 半角余弦公式 ……………………………… 57
в) 半角正切公式 ……………………………… 58
II. 半边正弦、半边余弦及半边正切的公式 ……………………… 60
III. 用球面剩余确定球面三角形的边的公式 ……………………… 62
IV. 用边的函数表示球面剩余的公式 ……………………… 63
V. 用三边一角的函数表示球面剩余的公式 ……………………… 66
VI. 球面三角形相鄰三元素的公式 ……………………… 66
VII. 相似 ……………………………… 69
§ 12 球面三角形的分析和解法 ……………………………… 73
§ 13 初等球面三角形 ……………………………… 84
附录 ……………………………… 9
第一編“球面几何”的例題和習題 ……………………… 92
第二編“球面三角”的例題和習題 ……………………… 98

緒　言

球面三角是数学的一个分科，研究球面上由大圓弧構成的三角形的解法。

球面三角有重要的理論上和实用上的价値，并且在天文学、高等測量学、制圖学、結晶学、矿山几何学、仪器学及其他科学各方面有广泛的应用，只要是需要应用补助球来研究点、綫、面在空間中的相互位置时，都必須用到球面三角。

历史介紹

球面三角出現在古代东方国家并在那里获得初步發展。

在古代已有巨大發展的天文学促进了这門科学的發展，由于天文学的發展，三角学首先是以球面三角的形式出現的，以后平面三角始作为球面三角的特殊情形而出現。

球面和平面三角的創始人一般認为是希臘学者吉巴尔哈，他于紀元前 180—125 年生活于亞历山大里亞。

希臘学者在球面三角領域中有貢献的还有的黎波里的狄奥多西、門涅賴和托勒密。

以后在印度人以及特别在阿剌伯人和中亞細亞人［阿布-瓦法、納西尔・爱丁以及曾在撒馬尔罕工作过一段时間的阿尔-巴丹(850—920)］那里球面三角以及平面三角获得了新的發展。

納西尔・爱丁在自己的著作“关于四边形的論文”中作出了关于球面和平面三角的一般性总結工作。

以后球面三角的發展归功于勒吉奥蒙旦(1435—1476)、替荷-德-布拉格(1546—1610)、开普勒(1571—1630)等人。

十七世紀初对数的發明及詳細的三角函数及三角函数对数表的出版根本改进了球面三角的計算，而十八世紀数学分析的發展給与球面三角的公式以优美簡單的形式。

欧勒、拉格倫奇和高斯給与球面三角以現代的形式。

俄罗斯科学院院士欧勒(1707—1783)是現代球面三角的創始人，在这方面他有兩种重要著作："球面三角基础"(1753)和"綜合球面三角学"(1779)。

欧勒球面三角形的特征在于：1)球面三角形的每个边和每个角都大于零而小于 π；2) 假設球面上三点中的任兩点都不在同一直徑的兩端，則它們确定一个而且只确定一个球面三角形。

馬比阿斯(1846 年)推广球面三角形边*和角的界限到 2π，这样的球面三角形叫做馬比阿斯三角形。

关于球面角的更广泛的毫無限制的概念是高斯、斯圖第以及特別是天才俄罗斯数学家罗巴契夫斯基(1793—1856)給出的。

Н. И. 罗巴契夫斯基在自己的著作"想像几何学"(1835—1836)中給出了以下关于球面三角形边和角的公式。

$$x' = p_x + q,$$

即

$$a = p_a a + q_a$$

$$\alpha' = p_\alpha^a + q_\alpha$$

(对其余兩边和兩角有同样的公式)。

我們知道的俄罗斯第一个球面三角的教程是西門·莫尔德維諾夫船長編著的，出版于 1748 年，在这里球面三角是"航海全書"的一部分。

在序言中著者說了下面的話：

"为此我有勇气向亲切的航海人員提出航海全書：根本上从几何学开始，論及有几何証明的球面和平面三角，論及天体和天文。"

---

* 原書此处作三边的和，按欧勒球面三角形三边的和已可到达 2π，故此处当为每边的界限——譯者。

1787年彼得堡出版了一本不知作者姓名的"球面和平面三角学"。

同一年彼得堡出版了名叫依凡·高尔德也夫的乘艦練習生著的"布格洛夫航海新著作中事物的定义"。

在球面三角部分叙述了下列問題：

第一章"关于球面三角形中边和角的比例"。

第二章"直角三角形解法"。

第三章"鈍角三角形的計算、等腰三角形、等边三角形"。

每章都有習題。

以后球面三角在俄罗斯和苏联的發展是与天文和航海的进步同时，也是与这些科学杰出代表者的名字分不开的。

列宁格勒采矿学院首任矿山測量教研室主任 B. И. 巴吾曼教授和"坑藏几何"創始人 П. К. 索巴列夫斯基教授注意到球面三角对矿山測量的价值。他兩人都著有球面三角教科書，巴吾曼的書广泛地流行于矿山測量者中間，索巴列夫斯基的小册子以富于創造性著称。

第一編　球面几何

在着手研究球面三角以前，首先需要熟悉球面几何的基本原理，而球面几何是研究分布在球面上的圖形的性質的。

§1. 球面上的圓

在空間中与一个定点 O——球心（圖 1）——等距离的点的軌迹叫做球面。包圍在球面中的空間叫做球。換句話說，球面可以定义为半圓周圍繞它的直徑的旋轉面。連接球心和球面上任意点的綫段叫做球的半徑 R，而連接球面上兩点并且通过球心的綫段叫做直徑；很明显，同一个球的半徑相等，而直徑等于兩个半徑。

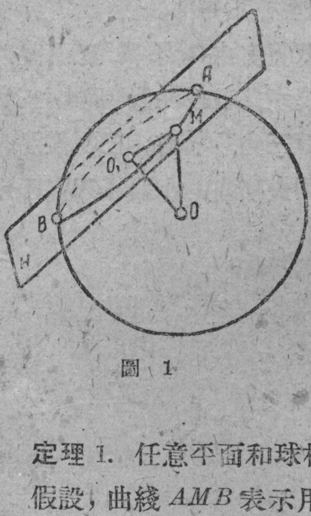

圖 1

在球面几何的基础中有以下定理：

定理 1. 任意平面和球相截而成的截痕是圓（圖 1）。

假設，曲綫 AMB 表示用平面 H 截半徑为 R 的球面所得的截痕。

从球心向平面 H 引垂綫 $OO_1=d$ 并且在截綫上取任意点 M；把它和 O 点、O_1 点連接起来，我們得到直角三角形 O_1OM；我們用 r 表示 O_1M，則

$$r=\sqrt{R^2-d^2}\cdots\cdots\cdots(1)$$

因为当 M 点沿曲綫 AMB 运动时 MO 和 MO_1 的長度不变因而

$MO_1=r$ 也是常数，而曲綫上所有的点都在平面 H 上；所以，平面 H 和球面的交綫是圓周，这个圓周叫做小圓。小圓可以互相交截，互相平行或互相傾斜。距球心相等的小圓有相等的半徑因而相等。

从等式(1)推出，当 $d=0$ 时截面通过球心 O 并且 $r=R$。在这种場合平面和球面的截痕叫做大圓。

定理 2. 大圓分球和球面为相等的兩部分。

用通过球心的平面截球，此时我們所得的是大圓；把一部分球翻轉，并且把它这样嵌入第二部分中，使它們的底互相重合，因为所有球面上的点距离球心都相等；所以一部分球面上所有的点都和第二部分球面上对应的点重合。所以，大圓分球和球面为相等的兩部分。

定理 3. 通过球面上不在同一直徑兩端上的兩个点，能作而仅能作一个大圓(圖 2)。

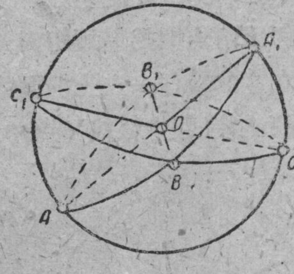

圖 2

取以 O 为心的球面上的兩个点 A 和 B，这兩点不在同一个直徑的兩端上。因为任意平面为不在一条直綫上的三个点所确定，所以通过 AOB 三点能作而仅能作一个平面，但因这个平面通过球心 O，所以，很明显，它和球面的交綫是大圓。

定理 4. 兩个大圓的平面的交綫是它們的直徑并且把它們平分。

因为大圓 ABA_1 和 CBC_1 的平面通过圓心 O（圖 2），所以 O 点同时在兩个大圓的平面上因而也在它們的交綫上，也就是說直綫 BB_1 同时是兩个圓的直徑并且平分圓周。

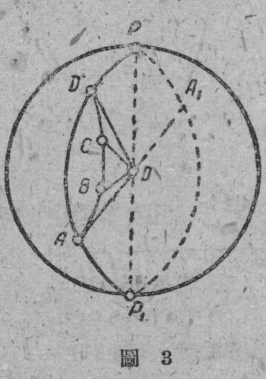

圖 3

定理 5. 小于 180° 的大圓弧

(圖 3) 是球面上兩点間的最短球面距离。

設 A 和 D 为球面上不在同一直徑兩端的二点，則大圓 $APA_1P_1$① 上的兩个圓弧中較短的一个叫做 AD 間的球面距离。

設 A 和 A_1 在一个直徑的兩端，則 A 和 A_1 間的球面距离等于大圓的一半。

为了証明球面上兩点間的最短距离是大圓弧，我們通过 A 和 D 作大圓弧和曲綫 $ABCD$。以 $B, C\cdots$ 等点分后一曲綫为無穷小的弧 AB, BC, $CD\cdots$，使在極小的誤差范圍內可以認为它們是大圓弧。把 $ABCD\cdots$ 和球心 O 連接起来，我們得到多面角 $OABCD$。平面角 $\widehat{AOD}<\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}\cdots$；用相等的弧代替中心角，我們得到 $\smile{AD}<\smile{AB}+\smile{BC}+\smile{CD}$ 或 $\smile{AD}<\smile{ABCD}$；如此，大圓在球面上就像直綫在平面上一样。

还有另一个証明，这个証明是根据下面的定理：大地綫是任意曲面上兩点間的最短距离；所謂大地綫是指具有这样性質的曲綫，即在这曲綫任一点上曲面的法綫和在这一点含于密切面內曲綫自身的法綫(即主法綫)重合*。

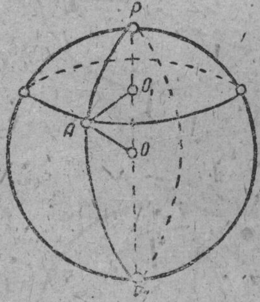

圖 4

在球面上 (圖 4) 取一点 A 并通过它作大圓弧和小圓弧，把 A 点和大圓心 O 連接起来，而 O 点同时也就是球心。

設 O_1 点是小圓心。球半徑 AO 是球面在 A 点的法綫同时也是曲綫 PAP_1 在 A 点的法綫。因为对大圓弧上任意点都是如此，所以大圓弧是大地綫，因而也是球上的最短距离。对于小圓上的点情形就不同了；在这里球面的法綫 AO 不和曲綫的主法綫 AO_1 重合，所

① 根据"欧勒約定"。

* 原書誤作"在这曲綫任一点上，曲面的含于密切面內的法綫，与曲綫自身在此点的法綫重合"。兹改正之——譯者。

以小圓不是大地綫，因而也不是球面上兩点間的最短距离。

§2. 軸、極、極綫、球面角及其度量

垂直于任意已知圓所在平面的球直徑叫做这个圓的軸。軸交球面于相反的兩点 P 和 P_1，这兩点叫做極（圖 5）。

任意圓上所有的点，例如 B_1、B_2、B_3、B_4，和这个圓的極 P 的距离都相等，即大圓弧 PB_1、PB_2、PB_3、PB_4 相等。極叫做小圓弧的球面中心。PB_1、PB_2 等弧的長度叫做球面半徑；如果球面半徑等于 90°，則大圓弧叫做 P 和 P_1 点的極綫。極是垂直于極綫的大圓的交点。假設 A_2, A_3 或其他的点在 P 点的極綫上，則 $A_2P=90°$，但 A_2 自己又在 A_1 点的極綫 PA_2P_1 上，所以大圓 $PB_2A_2P_1$ 以及 $PB_4A_4P_1$ 等和極綫互相垂直。

球面角　大圓弧相交所成的角 P 和 P_1（圖 5）叫做球面角。圓弧的交点叫做球面角的頂点，而圓弧叫做球面角的边。設兩个圓弧 A_2P 和 A_3P 在 P 点相交，則角 A_2PA_3 叫做球面角，它的頂点是 P 而边是 PB_2 和 PB_3。球面角的度量有四种方法：1）用由平面 POA_2 和 POA_3 所構成的二面角来度量，2）用直綫角 A_2OA_3 来度量，3）用弧 A_2A_3 来度量，此处 A_2A_3 是頂点 P 的極綫，4）用在頂点 P 处切于球面角的边的切綫間的夾角来度量。

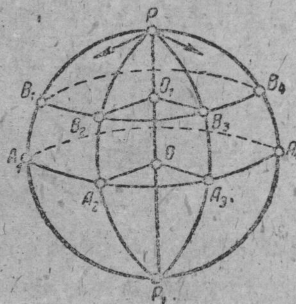

圖 5

球面角，也像平面角一样，可以是銳角、直角或鈍角并且它的値在从 0° 到 360° 之間。有一个公共边而在外兩边是同一个弧的延長綫的兩个球面角叫做互补。由于球面角可用直綫角 A_2OA_3 来度量，我們有：1）兩个互补球面角的和等于 180°，2）有一个公共

頂点的所有球面角的和等于 360°。

§3. 球面坐标

球面上点的位置可用任意坐标系确定，但在天文学、測量学、結晶学、实用地質学中最常用的是球面——赤道和水平的坐标系。

a) 赤道坐标系

在球面上取一点 A 并通过 A 作大圓弧。以 A 点为極作極綫。把地球当作一个球，我們这样轉动球面，使 A 点和地球的極 P 重合（圖 6)。于是通过極的大圓弧 PQP_1Q_1 叫做本初經綫，極綫 QmQ_1 叫做赤道。

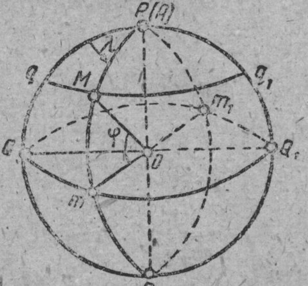

圖 6

为了确定球面上一点 M 对于赤道 QQ_1 和本初經綫 PQP_1Q_1 的位置，通过 M 点和極点 P 作大圓弧。得到的半圓周 PMP_1 叫做 M 点的經綫，或經圓。从 M 点沿大圓弧到赤道的距离 mM 叫做 M 点的緯度。緯度用字母 φ 来表示并且从赤道到北極或南極是从 0° 到 90° 变化。从赤道到北極的緯度叫北緯，从赤道到南極的緯度叫南緯。

有时不用緯度而用对应于中心角 MOP 的弧 MP，MP 叫做極距，并且用字母 Δ 表示。極距和緯度的和等于 90°，即

$$\varphi+\Delta=90^\circ.$$

在球面上，也像在平面上一样，一个坐标是不够的；因为在平行于赤道 QQ_1 的小圓 qMq_1 上，所有的点的緯度都是相同的。

通常把經度取作第二个坐标，經度是用本初經綫（对地球来説本初經綫就是格林威治經綫）所在平面与 M 点的經綫所在平面中

間的二面角 QPP_1M 来度量的。二面角 QPP_1M 对应于球面角 qPM。經度用 λ [①] 表示并且按时針的方向从 $0°$ 到 $360°$ 变化或者分为东西兩方面在 $0°$ 和 $180°$ 之間变化（东經和西經）。

假設 M 点有緯度 $\varphi_M=46°$ 和經度 $\lambda_M=82°$，則一般縮写为：$M(46°;32°)$。

б）水平坐标系

假設轉动球面使 A 点和天頂 Z 重合，則極綫 SHN 在水平面內（圖 7）。

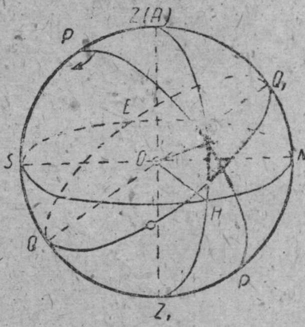

圖 7

球面上任一点 M 的位置在这种場合用下面兩个坐标确定：第一个是天頂距——就是圓弧 ZM 或中心角 ZOM，第二个是这样得到的，假設經过 Z 点 Z_1 点（底点）和 M 点作半圓，則第二个坐标就是方位角 NH（从 N 点——北——到 H 点的圓弧，此处 H 点是半圓 ZMZ_1 和水平綫 $NHSE$ 的交点）。方位角从 N 点（北）或 S 点（南）开始按照时針方向从 $0°$ 变到 $360°$。方位角用字母 A 或 a 表示。

有时第一个坐标不用天頂距而取 M 点的傾角 α，傾角是用弧 HM 或中心角 HOM 度量并且确定 M 到水平綫的距离。同一个点的天頂距离和傾角之間存在一个关系式：

$$Z+\alpha=90°.$$

假設 M 点有天頂距 $Z_M=60°$ 和方位角 $a_M=30°$，則縮写成这样：$M(60°;30°)$。

① 在結晶学中經度用字母 φ 緯度用字母 ν 極距用字母 ρ 来表示。

§4. 球在平面上的投影、制圖網

設 OM_0 为通过投射中心 O 和被投射点 M_0 的射綫，則投影平面 K 和 OM_0 的交点 M 叫做 M_0 在 K 上的投影(透視影)(圖 8)。

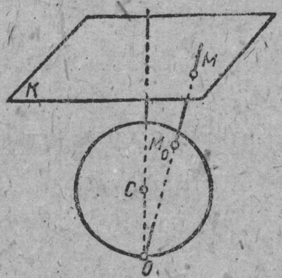

圖 8

假設投射中心在球面上，則投影叫做制圖投影(圖 9)。

坐标相同的点的軌迹叫做坐标曲綫。有一定經度的坐标曲綫叫做經綫，有一定緯度的坐标曲綫叫做緯綫。这兩种坐标曲綫的总体叫做

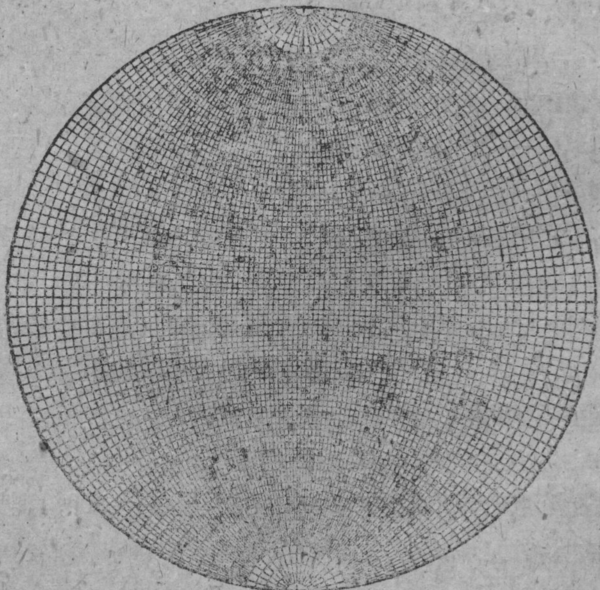

圖 9

球上的坐标網，而在已知投影中它們在平面上的像叫做制圖網。

設有从O点射出的光綫照射在以C为中心的薄玻璃球上（圖10），而这个球上画有在M_0点相交的經綫和緯綫。如果这个坐标

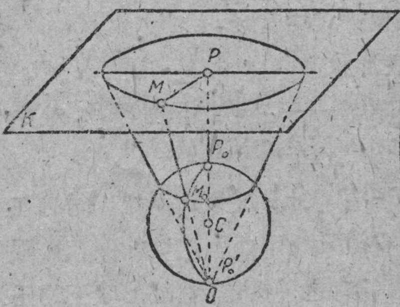

圖 10

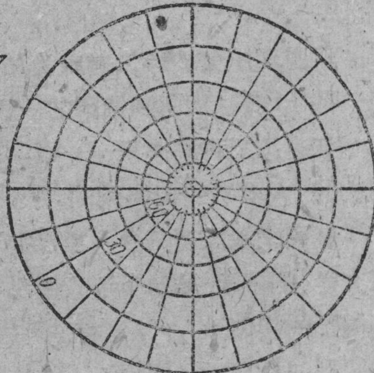

圖 11

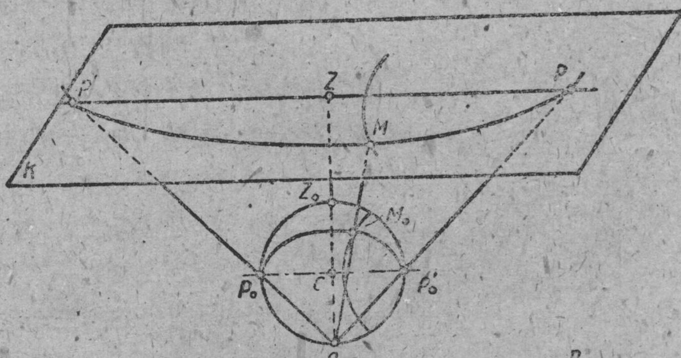

圖 12

系的軸P_0P_0'正指着光綫，則經綫在投影平面上的投影成为从P点（軸P_0P_0'的投影）射出的射綫束，而緯綫則投射成为以P为中心的同心圓。这样的網叫做規則網。圖11表示規則制圖網的一般形式。

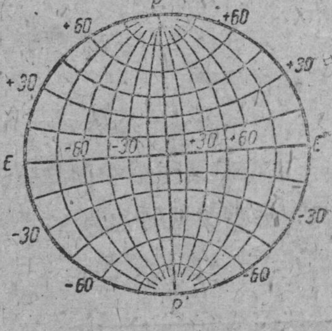

圖 13

假設球軸P_0P_0'的位置和中心

射綫 OZ 垂直（圖 12），則在球上得到横断坐标系，而在平面 K 上得到横断或等距方位網，在这上面無論經綫或緯綫都投射成为圓周。

赤道和中央經綫投射成为互相垂直的直綫。

圖 13 表示横断制圖網的一般形狀。

还有第三种制圖網——斜制圖網——这是当球軸 P_0P_0' 对中心光綫 OC 斜放着时得到的。

制圖網在球面三角中当解作圖問題时有很大的用处，同时在天文学、測量学、結晶学等方面也有很大的用处。这种網保存無限小圖形的相似性，并且仅有这种網具有这种性質，就是把球上的任一圓周还投射成为圓周①。

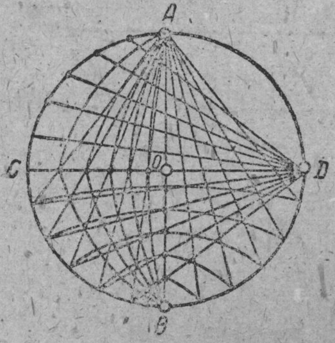

圖 14

用作圖的方法很容易得到制圖網。为此目的，例如，用 10 公分長的半徑作圓（圖 14），并且分圓周 $ACBD$ 为 24 部分。把得到的点和 $A.D$ 兩点用直綫連接起来。如此，直徑 AB 和 CD 都被分成 12 部分。在互相垂直的直徑上得到一系列的点，我們依次通过每这样三个点作圓弧，即三个点中有兩个在圓周上一个在直徑上。結果我們得到的圓弧就是在横断制圖投影中經綫和緯綫的像。

兩个直徑的交点 O 乃是網的極点。

在圖 9 上弧中間的間隔是 $2°$。为了構造網时圓周的作圖最好用特别柔軟的金屬尺，例如，偉大的俄罗斯学者——結晶学家 E. C. 非达罗維所制的尺。

① 横断制圖網这个性質的証明牽涉很远，在制圖教程“高等測量学”中可以見到。