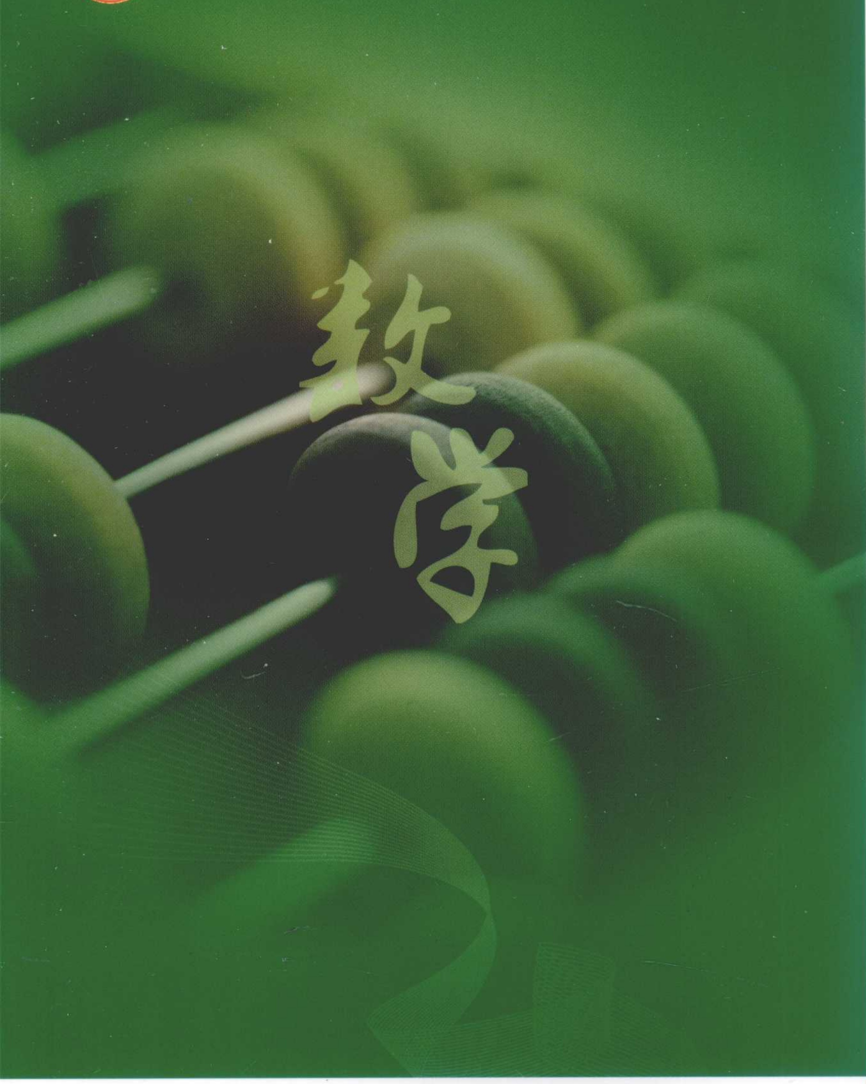
高职高专教育“十一五”规划教材



经济应用数学（上册）

夏 维 张艳松 主 编

王 荣 张国洪 李 杰 副主编

科学出版社

www.sciencep.com

高职高专教育“十一五”规划教材

经济应用数学

（上册）

夏　维　张艳松　主　编

王　荣　张国洪　李　杰　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是在认真总结、分析、吸收全国高职高专院校经济管理类专业经济数学教学改革经验的基础上编写的。从高职高专人才培养目标出发，结合经济管理类专业特点，精选了教学内容，注重理论联系实际，紧密结合专业，适当降低了难度，遵循循序渐进的教学原则，精心配置了例题、习题，以便于学生对有关知识点的掌握与巩固。

本书分为上下两册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分学及其应用；下册包括线性代数初步、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步和数学软件 Mathematica 应用等内容，其中上下册中每章都安排了小结和综合训练。

本书可作为高职高专院校经济管理类专业、成人高等学校各专业经济数学的教材，也可以作为经济管理人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学（上册）/夏维，张艳松主编. —北京：科学出版社，2010
（高职高专教育“十一五”规划教材）
ISBN 978-7-03-027495-3

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①夏…②张… Ⅲ. ①经济数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 083115 号

策划：姜天鹏 王新文
责任编辑：王纯刚 隽青龙 / 责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 6 月第 一 版 开本：787×960 1/16
2010 年 6 月第一次印刷 印张：12 1/4
印数：1—3 500 字数：247 000

定价：46.00 元（本册定价 24.00 元）

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135517-2037

前　　言

本书是在充分研究当前高职高专教育现状，认真分析、总结、吸收高职高专院校经济管理类专业经济数学教学教改经验，结合高职高专学生特点和市场对人才需求的基础上编写的。从高职高专教育人才培养目标出发，充分考虑了高职高专经济管理类专业学生的知识需求和接受能力，以及不同专业或专业方向的要求，精选了教学内容。

本书分为上、下两册。本书在编写过程中力求做到条理清晰、通俗易懂，基本内容表述清楚，层次清晰，结构合理，重点突出，例题、习题针对性强，特别注意培养学生用数学概念、方法、思想消化吸收经济概念、经济问题的能力，侧重培养学生将实际问题转化为数学模型的能力、突出了学生数学应用技能的训练与培养。本书取材合适，深度适宜，富有启发性，有利于激发学生的学习兴趣。

本书每节都配有一定数量的习题，每章后面还配有综合训练。这些习题可以帮助学生加深对基本内容的理解，提高学生分析问题的能力，逐步培养学生的自学能力。

本书具有以下特色：

1. 每章均采用目标导学的方法，有利于学生对学习目标的把握；
2. 精选例题和习题，注重结合专业特点，理论联系实际，贯彻由浅入深的教学原则；
3. 特别注重教学概念与经济问题的联系，给出了许多经济问题的数学解析；
4. 减弱了理论推导或证明，不追求理论上的系统性；
5. 教材内容涵盖面广，为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间；
6. 本书介绍了数学软件 Mathematica 及其应用，有利于培养学生利用计算机及相应数学软件求解数学模型的能力。

本书由天津对外经济贸易职业学院的夏维和张艳松主编，由天津国土资源和房屋职业学院的王荣、天津对外经济贸易职业学院的张国洪和李杰副主编。其中，第 1 章由王荣编写；第 2 章和第 3 章由张艳松编写；第 4 章由张国洪和李杰共同编写；第 5 章由夏维编写。参加本书编写和审校工作的还有王洪明、周秀君、郝春田和宋立温等。

鉴于编者的研究能力、学术水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏之处，恳切期望读者批评指正，以便进一步修改和完善。

编　者

2010 年 5 月

目 录

第 1 章 函　　数

学习目标

- 理解函数的概念，熟练掌握函数定义域和值域的求法，了解分段函数的特点.
- 掌握函数的基本性质和表示方法.
- 熟练掌握六类基本初等函数的概念、表达式、图形和性质．了解复合函数、初等函数的概念和性质，掌握复合函数的分解方法.
- 了解常用经济函数的概念及相关运算，会建立简单的函数关系式.

函数是微积分学的主要研究对象，它的实质是变量之间的对应关系．本章将在中学数学知识的基础上，进一步研究函数的概念与性质，为学习微积分知识打下必要的基础.

1.1　函数的概念

1.1.1　函数的概念

我们在研究某一事物的变化过程时，往往会遇到几个变量，它们具有某种相互依赖的关系.

例如某企业每天生产产品 A 的件数为 x，企业设备固定成本为 1000 元，生产每件产品所需人工费和原材料费共 5 元，那么日产量 x 与日生产的成本 y 之间的对应关系为 y=1000+5x，假定该企业日产量最多为 300 件，那么，当产量 x 在数集$\{0,1,2,\cdots,300\}$上任意取一数值时，按上式 y 就有一确定的数值与它相对应，这种对应关系正是函数的实质.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一给定的数集，如果对于任意 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f，总有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 称为这个函数的定义域，数集 $M=\left\{y \middle| y=f(x),x\in D\right\}$ 称为函数的值域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当自变量 x 取数值 x_0 时，因变量 y 按照对应法则 f 所对应的数值，称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $y=f(x_0)$.

为区别同一问题中的不同函数关系，可采用不同的函数记号来表示这些函数．如 $F(x)$、$G(x)$、$g(x)$ 等.

由函数定义可知，当函数的定义域和函数的对应法则确定后，这个函数就完全确定了．因此，把函数的定义域和对应法则叫做函数的两个要素．两个函数只有它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才是相同的．而与变量符号无关．如 $y=|x|$ 与 $z=\sqrt{v^2}$ 就是相同的函数．

例 1　设 $f(x)=2x^2-3$，求 $f(-1)$，$f(x_0)$．

解　$f(-1)=2\times(-1)^2-3=-1$

$f(x_0)=2(x_0)^2-3=2x_0^{\ 2}-3$

例 2　求 $y=\sqrt{25-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域．

解　要使函数 y 有定义，必须同时满足两个条件：偶次根式的被开方式大于或等于零，对数函数的真数大于零，即

$$\begin{cases}25-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi\end{cases}\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

不等式组的解为 $-5\leqslant x<-\pi$ 或 $0<x<\pi$．

于是，所求函数的定义域为 $D=\{x|-5\leqslant x<-\pi \text{ 或 } 0<x<\pi\}$．

也可用区间表示为$[-5,-\pi)$ 或 $(0,\pi)$．

求函数定义域时应遵守以下原则：

（1）代数式中分母不能为零．

（2）偶次根式内表达式非负．

（3）基本初等函数要满足各自的定义要求．

（4）对于表示实际问题的解析式，还应保证符合实际意义．

1.1.2　函数的表示

常用的函数表示方法有表格法、图像法、解析法．

（1）将自变量的值与对应的函数值列成表格以表示函数的方法叫表格法，如三角函数表、对数表及许多的财务报表等．

（2）用图像来表示自变量值与函数值的关系的方法叫图像法，它的特点是较直观．

（3）用数学表达式表示自变量和因变量的对应关系的方法叫解析法，如 $y=\sin x$，$y=2x+1$ 等，它的特点是便于推理与演算．

以下几种是我们以后常遇到的函数．

1. 分段函数

在自变量的不同取值范围内，其对应关系用不同表达式表示的函数，称为分段函数，如 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ x^2 & 0\leqslant x<2 \\ \ln x & 2\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$ 就是一个定义在区间 $(-\infty,5]$ 上的分段函数.

2. 隐函数

变量 x 和 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 所表示的函数称为隐函数，如 $e^x+xy-e^y=0$.

3. 参数方程确定的函数

由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t\in I)$ 通过参变量 t 来表示 x 和 y 的对应关系的函数，称为参数方程确定的函数，如 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$.

1.1.3　反函数

定义　设函数 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数，其值域为 M. 如果对于数集 M 中的每个 y，在数集 D 中都有唯一确定的 x 使 $y=f(x)$ 成立，则得到一个定义在数集 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，它叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上用 x 表示自变量，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$，它的图像与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的步骤是从 $y=f(x)$ 中解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$，再将 x 和 y 互换即可.

例 3　求 $y=2x+1$ 的反函数.

解　由 $y=2x+1$ 得 $x=\dfrac{y-1}{2}$，互换字母 x，y 得所求反函数为 $y=\dfrac{x-1}{2}$.

1.1.4　函数的性质

1. 有界性

如果对属于某一定义区间 I 的任何 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界；否则称为无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数，有界函数的图像夹在直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如，函数 $y=\cos x$ 是有界函数，因为在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内总有 $|\cos x|\leqslant 1$.

2. 单调性

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少，区间 (a,b) 称为单调区间.

单调增函数的图形表现为自左至右是上升的；单调减函数的图形表现为自左至右是下降的.

例 4　判断 $f(x)=\ln x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

解　设 x_1,x_2 是 $(0,+\infty)$ 上任意两点，且不妨设 $0<x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\ln x_1+x_1-(\ln x_2+x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}+(x_1-x_2)$$

因为　$0<x_1<x_2$

所以　$0<\dfrac{x_1}{x_2}<1$ ，$\ln\dfrac{x_1}{x_2}<0$ ，$x_1-x_2<0$

因为　$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$

所以　$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数；如果对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数.

偶函数图形关于 y 轴对称，奇函数图形关于原点对称.

既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数.

例 5　判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=x^4-x^2+8$　　（2） $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

解　（1）因为 $f(-x)=(-x)^4-(-x)^2+8=x^4-x^2+8=f(x)$，即 $f(-x)=f(x)$.

所以 $f(x)=x^4-x^2+8$ 是偶函数.

（2）因为 $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})$

所以 $f(-x)+f(x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})+\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=\lg 1=0\text{，即 } f(-x)=-f(x)\,.$$

所以 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

4. 周期性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使对于任意 $x\in D$，$x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数，常数 T 为函数 $y=f(x)$ 的周期．若周期函数存在最小正周期，则称此最小正周期为基本周期，也简称周期．周期函数的图像在每一个周期内是重复出现的.

习题 1.1

1．求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$　　（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}+\ln(x+4)$

2．下列函数是否表示同一函数？为什么？

（1）$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$

（2）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

（3）$f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$，$g(x)=\cos x$

（4）$f(x)=\ln x^3$，$g(x)=3\ln x$

3．设函数 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$，$f(x-1)$.

4．设 $f(x)=\begin{cases}-(x+1) & x<-1\\ \sqrt{1+x^2} & -1\leqslant x<1\\ 0 & x\geqslant 1\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(a^2+1)$.

5．求下列函数的反函数.

（1）$y=\sqrt[3]{x+1}$　　（2）$f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$

6．判断下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=x(x+1)(x-1)$　　（2）$f(x)=x\sin x$

（3）$y=3^x$　　（4）$y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

1.2　初 等 函 数

1.2.1　基本初等函数

常函数：$y=c$（c 为常数）.

幂函数：$y=x^{a}$（a 为常数）.

指数函数：$y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq1$，a 为常数）.

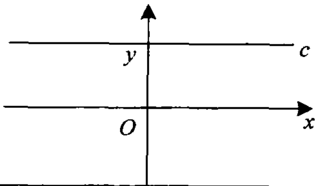
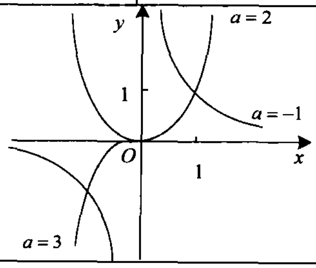
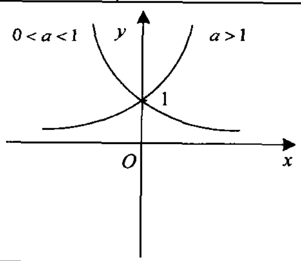
对数函数：$y=\log_{a}x(a>0$，且 $a\neq1$，a 为常数）.

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

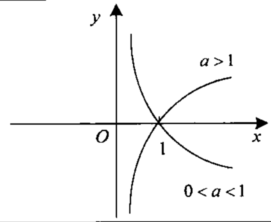
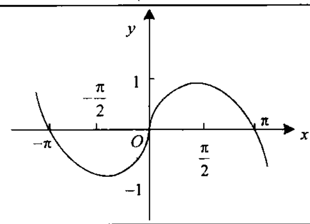
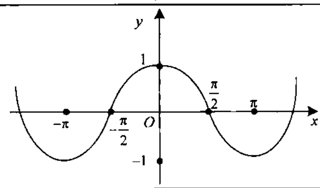
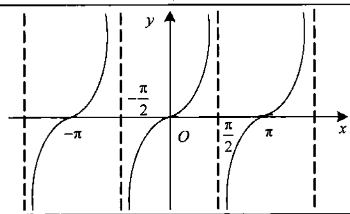
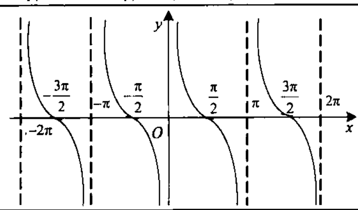
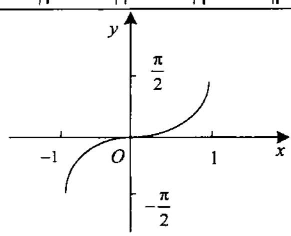
反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot}x$，$y=\operatorname{arcsec}x$，$y=\operatorname{arccsc}x$.

以上六类函数统称为基本初等函数，为了便于复习，现将它们的定义域、值域、图像和性质列表，如表 1-1.

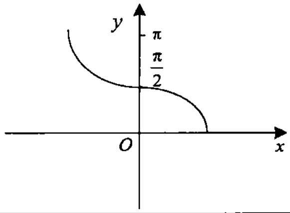
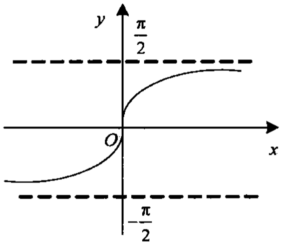
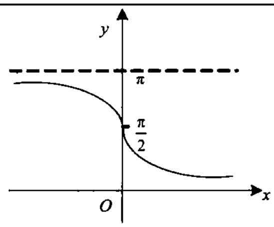
表 1-1

函　数	表　达　式	定义域与值域	图　　像	特　　性
常函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		偶函数
幂函数	$y=x^{a}$	定义域与值域随 a 的不同而不同		若 $a>0$，y 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加 若 $a<0$，y 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y=a^{x}$ $a>0$，$a\neq1$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		$a>1$，a^{x} 单调增加 $0<a<1$，a^{x} 单调减少

续表

函　数	表 达 式	定义域与值域	图　　象	特　　性
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0$，$a\neq 1$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		$a>1$，$\log_a x$ 单调增加 $0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少
正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界
余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$，$k\in Z$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界

续表

函　数	表　达　式	定义域与值域	图　　象	特　　性
反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

1.2.2　复合函数

定义　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含于 $y=f(u)$ 定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，u 是中间变量.

例 1　设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$\varphi(x)=\arccos x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解　$f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi(x)}=\mathrm{e}^{\arccos x}$

$\varphi[f(x)]=\arccos f(x)=\arccos \mathrm{e}^x$

$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\arccos\dfrac{1}{x}$

例 2　指出下列复合函数的复合过程.

（1）$y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　（2）$y=\ln(\tan \mathrm{e}^{x^2+2\sin x})$