



21世纪 高等职业教育创新型精品规划教材
高等职业教育“十一五”精品规划教材

新编

高等数学实训

XINBIAN GAODENG SHUXUE SHIXUN

主编 张军 朱世强



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等职业教育创新型精品规划教材
高等职业教育“十一五”精品规划教材

新编高等数学实训

主 编 张军 朱世强
副主编 张淑贤 彭瑜
主 审 王世刚

内 容 提 要

本书在高职教育学要求以“加大实训课教学”为重要改革内容的思想指导下编写而成. 意在为学生学好高等数学搭建一个演练与训练的平台.

本书是《新编高等数学教程》的配套教材,其主要由“教学实用软件”与“双基训练应用”两个模块构成. 本书可作为高职高专高等数学教学的辅助教材.

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学实训/张军,朱世强主编. —天津:天津大学出版社,2010.8

21 世纪高等职业教育创新型精品规划教材

高等职业教育“十一五”精品规划教材

ISBN 978-7-5618-3630-9

I. ①新… II. ①张… ②朱… III. ①高等数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 164084 号

出版发行 天津大学出版社

出 版 人 杨欢

地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)

电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742

网 址 www.tjup.com

印 刷 肃宁县科发印刷厂

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm × 260mm

印 张 12.25

字 数 306 千

版 次 2010 年 8 月第 1 版

印 次 2010 年 8 月第 1 次

定 价 28.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

高职教学要求以“加大实训课教学”为重要的改革内容,而高等数学作为一门公共基础课,应树立为专业服务的思想,在遵循“必需与够用”原则的基础上,为专业学习“储备”足够的数学知识和数学方法.在此思想的指导下,我们编写了《新编高等数学实训》一书,意在为学生学好高等数学搭建一个演练的平台,使学生在完成规定实训内容的基础上,更好地掌握数学的知识与学习方法,以满足学生在专业学习中的需要.

本书是《新编高等数学教程》的配套教材,由两个模块构成.

模块一——数学实用软件:学习 Mathematica 软件,解决高等数学中的数学计算问题,使学生学会利用计算机解决数学问题,以掌握科学的计算方法,并提高数据处理能力,让学生在学过程中领略到传统数学与现代高新技术的完美结合,从而优化教学效果.

模块二——双基训练应用:由习题、自测题两部分构成.习题与自测题的选取力求深浅适度,强调知识的覆盖面,注重数学概念与实际问题的联系.无论从题型、数量,还是从难易程度等方面都能恰到好处地反映高职院校高等数学课程教学的基本要求.通过本模块的训练,使学生能及时、准确地理解数学的基本概念、基本方法,熟练掌握数学的基本运算、基本应用技能,提高学生的基本计算技能,并培养其数学应用意识.

本书的特色是采用“多层次循环学习法”.从《新编高等数学教程》到《新编高等数学实训》,实际是从数学学习到数学实践的系统循环;从模块一到模块二是数学软件与传统数学思维训练的完美结合;在模块二中由习题到自测题是知识要点到知识系统的循环.通过循环学习与训练,激发学生的学习积极性,增强学生的自信心,为专业学习储备必需与够用的知识与计算方法,逐渐建立起完善的数学知识结构,并通过 Mathematica 软件操作系统解决复杂的数学计算问题.

本书在最后附有参考答案及重要的数学公式,方便学生在实训过程中的查询使用.

本教材共分两个模块,每个模块均由 13 章内容组成.主编张军、朱世强,副主编张淑贤、彭瑜,参编程树林、苏莹,终审定稿由张军、朱世强完成,主审王世刚.

具体编写分工如下:模块一由程树林、苏莹共同完成;模块二由张淑贤(第 1 章、第 4 章、第 6 章)、彭瑜(第 2 章、第 7 章、第 8 章)、张军(第 3 章、第 5 章、)、朱世强(第 13 章)、程树林(第 9 章、第 11 章)、苏莹(第 10 章、第 12 章)完成,公式汇编由苏莹完成.

由于时间仓促,加之编者水平有限,书中难免有不妥之处,衷心希望得到各位专家和读者的批评指正.

编者

2010 年 6 月

目 录

模块一 数学实用软件	(1)
Mathematica 软件简介	(2)
第1章 利用 Mathematica 求极限	(11)
第2章 利用 Mathematica 求函数的导数与微分	(13)
第3章 利用 Mathematica 作函数的图像以及求函数的极值	(16)
第4章 利用 Mathematica 计算积分	(20)
第5章 利用 Mathematica 求解常微分方程	(24)
第6章 简介 Mathematica 在空间解析几何中的运用	(26)
第7章 利用 Mathematica 求函数的偏导数、全微分及极值	(30)
第8章 利用 Mathematica 求二重积分	(33)
第9章 利用 Mathematica 对级数进行相关运算	(34)
第10章 利用 Mathematica 求行列式的值	(37)
第11章 利用 Mathematica 进行矩阵运算	(39)
第12章 利用 Mathematica 求解线性方程组	(42)
第13章 利用 Mathematica 求解线性规划问题	(46)
模块二 双基训练应用	(49)
第1章 极限与连续	(50)
第2章 导数与微分	(58)
第3章 导数的应用	(64)
第4章 积分及其应用	(71)
第5章 常微分方程	(84)
第6章 空间解析几何	(89)
第7章 多元函数微分学	(94)
第8章 二重积分	(102)
第9章 无穷级数	(106)
第10章 行列式	(113)
第11章 矩阵	(120)
第12章 线性方程组	(128)
第13章 线性经济模型	(133)
附录 常用数学公式	(137)
习题参考答案	(149)

模块一

数学实用软件

Mathematica 软件简介

当今社会,计算机的应用已经渗透到我们生活的各个方面.它从最初的数值计算功能发展到文字处理、数学推理与图形变换等功能.随着计算机科学的逐步发展,人们对计算机的依赖程度也越来越高.

Mathematica 是美国 Wolfram Research 公司于 1998 年开发的数学软件,它是一个完全环境下的符号运算系统.它的研究对象从初等数学到高等数学,几乎涉及了所有的数学学科.利用它可以进行各种数学表达式的化简,多项式的四则运算,求最大公因子,因式分解,解常微分方程和偏微分方程,各种特殊函数的推导,函数的幂级数展开,求极限,矩阵和行列式的各种计算,求线性方程组的符号解等,另外它还具有强大的绘图功能.该系统用 C 语言编写,博取众长,具有简单易学的交互方式、操作方式,强大的数值计算功能和符号计算功能,人工智能列表处理功能以及像 C 语言和 Pascal 语言那样的结构化程序设计功能.该软件有 Dos 环境下及 Windows 环境下的几种版本.本书主要介绍 Windows 环境下的 5.2 版本在高等数学中的应用,其他版本类似.

一、初识 Mathematica

1. 进入 Mathematica

在桌面上双击 Mathematica 启动图标,即可进入 Mathematica 系统.这时,屏幕上会显示启动画面,之后,出现如图 0.1 所示的工作屏幕.

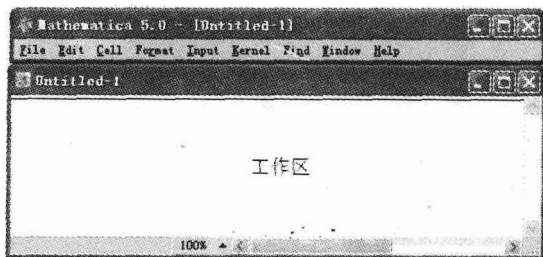


图 0.1

2. 系统的常用菜单

Mathematica 的菜单项包括“File”、“Edit”、“Cell”、“Format”、“Input”、“Kernel”、“Find”、“Window”、“Help”项.下面介绍“File”(文件)菜单项.

文件下拉菜单中的“New”、“Open”、“Close”、“Save”命令用于新建、打开、关闭及保存用户的文件,这些选项与 Word 软件中的选项相同.另外有几个选项是 Mathematica 特有的,其中最常用的是如下几个.

- ◆ Palettes 用于打开各种模板;
- ◆ Generate Palette from Selection 用于生成用户自制的模板;
- ◆ Generate Notebook from Palette 记录最近使用过的文件.

在操作过程中经常用到“File”菜单中的控制面板(Palettes),其中共有9个选项,如图0.2所示。

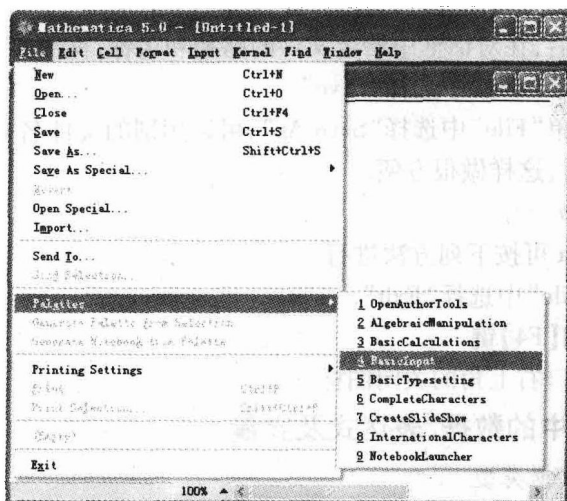


图 0.2

我们最常用的是第3项“BasicCalculations”(基本计算模板)和第4项“BasicInput”(基本输入模板)。基本计算模板分类给出了各种基本计算的按钮。单击各项前面的小三角,会显示出该项所包含的子菜单项。再次单击各子项前的小三角,则显示出子项中的各种按钮。若单击其中的某个按钮,就可以将该运算命令(函数)输入到工作区窗口中,然后在各个小方块中键入数学表达式,即可进行计算。

3. 输入和计算表达式

Mathematica 幕像一张长长的草稿纸,称为 Notebook。像处理其他计算机文件一样,我们可以对 Notebook 进行新建、打开、保存、编辑修改和打印等文件操作。Notebook 文件在存盘时会被自动保存成后缀是“.ma”的文件,它只能在 Mathematica 中打开。

下面介绍向 Notebook 输入文字和数学表达式。例如,先键入一段文字“图形处理功能”,按一下回车键,开始新的一段。键入作图表达式:

```
f[x_] := Sin[x],
Plot[f[x], {x, -Pi, Pi}],
```

然后对表达式进行计算。如图0.3所示。

计算表达式的命令方式有以下3种:

- (1) 点击“运行”按钮;
- (2) 按【Shift】+【Enter】键;
- (3) 按小键盘的数字5键(在非数字状态下)。

系统完成计算后会输出结果,并自动在输入行加上显示标记“In[1]:=”,在输

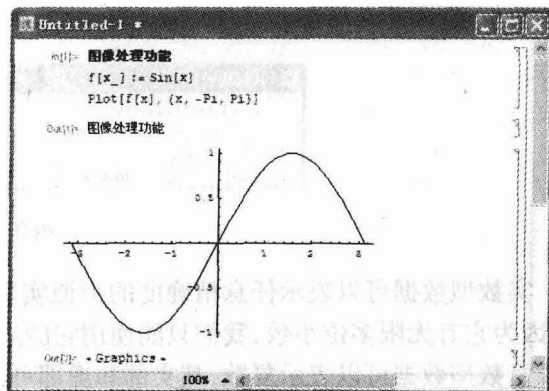


图 0.3

出行加上显示标记“Out[1]:=”。

4. 保存文件

在完成了 Notebook 之后,需要进行存盘.存盘有如下方法.

(1) 点击存盘按钮后,在对话框中给定文件的路径和名称,再按回车键.

(2) 在文件操作菜单“File”中选择“Save”.

(3) 在文件操作菜单“File”中选择“Save As”,可以用别的文件名来保存文件.当需要保存修改之前的 Notebook 时,这样做很方便.

5. 退出 Mathematica

要退出 Mathematica 可按下列方法进行.

(1) 在文件菜单“File”中选择“Exit”.

(2) 同时按【Alt】和【F4】键.

(3) 用鼠标点击窗口右上角的关闭图标.

二、Mathematica 中的数据、表达式及变量

1. Mathematica 的数据类型

1) 四种数据类型

Mathematica 系统把数值分成四种类型:整数、有理数、实数和复数.

整数型数据可以表示任意长度的精确整数,不受计算机字长的限制.例如,在国际象棋的棋盘中,每一个方格中放入前一格 2 倍数目的硬币,最后一个格共摆着 2^{64} 个硬币,这是一个天文数字.这摆硬币会直冲云霄,超过月球,超过太阳,大约有 4 光年那么高! 计算过程如图 0.4 所示.

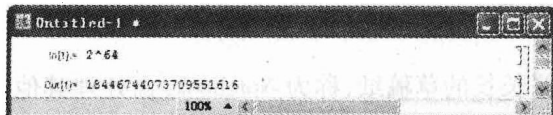


图 0.4

有理数型数据可以精确表示任意的即约分数,当两个整数相除而不能整除时,就用有理数型来表示,如图 0.5 所示.

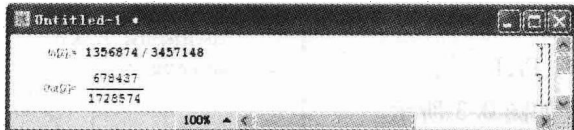


图 0.5

实数型数据可以表示任意精确度的近似实数.例如,圆周率 π 的精确值是无法完全写出的,因为它有无限多位小数,我们只能使用它的近似值.

复数型数据可以表示复数,其实部和虚部可以是整数型、有理数型或实数型.

2) 不同类型数据间的转换

在 Mathematica 的不同应用中,对数字类型的要求通常是不同的.例如,公式推导中的数字

常用整数或有理数表示,而数值计算中的数字常用实数表示.在一般情况下,在输出行 Out[n] 中,系统根据输入行 In[n] 的数字类型对计算结果作出相应的处理.如果有特殊要求,就要进行数据类型转换.

在 Mathematica 中,提供以下几个函数以达到转换的目的(表 0.1).

表 0.1

函 数 名	功 能
$N[x]$	将 x 转换成实数
$N[x, n]$	将 x 转换成近似实数,精度为 n
$Rationalize[x]$	给出 x 的有理数近似值
$Rationalize[x, dx]$	给出 x 的有理数近似值,误差小于 dx

例 0.1 (1)将 $\frac{13}{11}$ 转换成实数,结果分别保留 20 位和 10 位有效数字;

(2)给出 1.181 818 182 的有理数近似值,误差小于 0.000 01;

(3)给出 1.181 818 182 的有理数近似值,误差小于 0.1.

解 求解过程如图 0.6 所示.

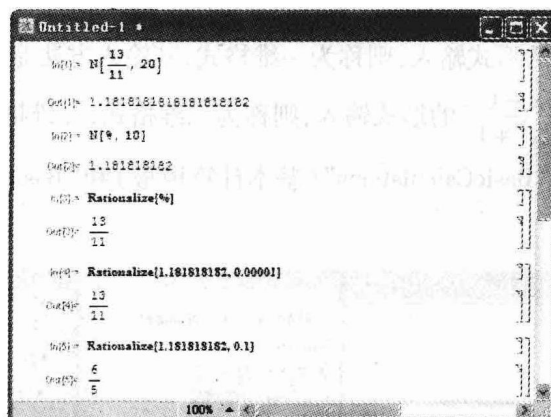


图 0.6

注:图中的“%”表示上一行刚刚输出的结果.

3) 数学常数

Mathematica 中定义了一些常见的数学常数,这些数学常数都是精确数(表 0.2)

表 0.2

符 号	含 义
Pi	$\pi = 3.141\ 59\cdots$
E	$e = 2.718\ 28\cdots$
Degree	$\pi/180$

续表

符 号	含 义
I	虚数单位 $\sqrt{-1}$
Infinity	正无穷大
- Infinity	负无穷大

数学常数可用在公式推导和数值计算中,在数值计算中表示精确值,如图 0.7 所示.

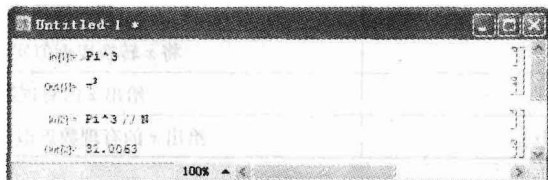


图 0.7

注:“//N”表示以实数形式输出,“N”必须大写.

2. Mathematica 中的表达式

1) 表达式的输入

Mathematica 符号计算系统中提供了两种格式的数学表达式. 对于表达式 $\frac{x-1}{2x^2+1}$, 如果按照“(x-1)/(2x^2+1)”的形式输入, 则称为一维格式, 其输入方法是, 从键盘上选择相应的符号直接输入; 如果按照“ $\frac{x-1}{2x^2+1}$ ”的形式输入, 则称为二维格式, 二维格式表达式的输入, 可利用控制面板“Palettes”中的“BasicCalculations”(基本计算模板)和“BasicInput”(基本输入面板), 如图 0.8 所示.

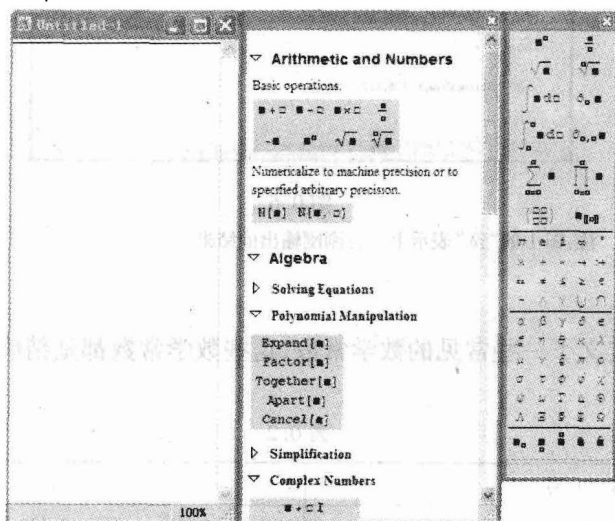


图 0.8

图 0.8 中,左端为工作区,中间为基本计算模板,右端为基本输入模板.从基本计算模板和基本输入模板中选择不同的符号,即可在工作区中输入各种不同的表达式.

2) 表达式的计算操作

输入要计算的表达式后,按【Shift】+【Enter】键即可得到计算结果.

例 0.2 (1)计算 $12+5$; (2)求 $(x+1)^6$ 的展开式.

解 计算过程如图 0.9 所示.

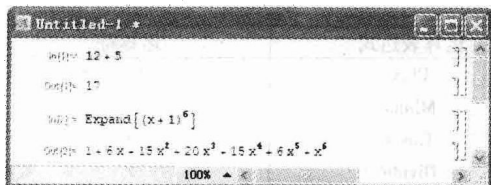


图 0.9

需要说明的是:次序标识“ $\text{In}[1]:=$ ”和“ $\text{Out}[1]=$ ”均由系统自动给出,计算时不必输入.

3. Mathematica 中的变量

1) 变量名

为了方便计算或保存中间计算结果,常常要引进变量.在 Mathematica 中,内部函数或命令都是以大写字母开头的标识符.为了避免混淆,Mathematica 中的变量名通常以小写字母开头,后跟字母或数字,变量名字符的长度不限.例如, x^3 , avcd1 都是合法的变量名;而 $u v$ (u 与 v 之间有一个空格)不能作为变量名.英文字母的大小写形式所代表的意义是不同的,因此 A 与 a 表示两个不同的变量.

在 Mathematica 中,变量即取即用,不需要先说明变量的类型再使用.在 Mathematica 中,变量不仅可存放一个整数或复数,还可以存放一个多项式或复杂的算式.

数值有类型,变量也有类型.通常,在运算中不需要对变量进行类型说明,系统会根据对变量所赋的值作出正确的处理.在定义函数和进行程序设计时,也可以对变量进行类型说明.

2) 给变量赋值

(1) 变量的全局赋值.在 Mathematica 中,运算符“ $=$ ”、“ $:=$ ”起赋值作用,一般形式为
变量 = 表达式,

或

变量 1 = 变量 2 = 表达式.

其执行步骤为:先计算赋值号右边的表达式,再将计算结果送到变量中.

在 Mathematica 中,“ $=$ ”应理解为给变量一个值.在使用“ $=$ ”定义规则时,定义式右边的表达式立即被求值;而在使用“ $:=$ ”定义规则时,系统不作运算,也就没有相应的输出,定义式右边的表达式不被立即求值,直到被调用时才被求值.因此“ $:=$ ”称为延迟赋值号,“ $=$ ”称为立即赋值号.一般的高级语言没有符号运算功能,因此,在 C 和 Pascal 等语言中,一个变量只能表示一个数值、字符串或逻辑值.在 Mathematica 中,一个变量可以代表一个数值、一个表达式、一个数组或一个图形.

(2) 变量的临时赋值.变量的临时赋值格式为

$$f[x]/.x \rightarrow a.$$

注意,“ $x \rightarrow a$ ”中的箭头是由键盘上的减号以及大于号组成的.该语句给函数 $f[x]$ 中的变量 x 临时赋予数值 a .用临时赋值语句给变量赋的值,只在该语句有效.

三、四则运算

1. 四则运算的符号(表 0.3)

表 0.3

运算	运算表达式	运算符	举例
加	Plus	+	$a + b$
减	Minus	-	$a - b$
乘	Times	*	$a * b$
除	Divide	/	a / b
乘方	Power	$\wedge$	$a \wedge b$

2. 四则运算的优先级

- (1) 优先级先后顺序为乘方、乘除、加减.
- (2) 同级运算从左到右.
- (3) 乘方运算从右到左.

四、Mathematica 中的常用函数

Mathematica 系统中有几百个可以直接调用的数学函数,下面给出一些常用函数的表达方法.

1. 数值函数

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| (1) Abs[x] | 求 x 的绝对值; |
| (2) Max[$x_1, x_2, \dots$] | 取 $x_1, x_2, \dots$ 中的最大值; |
| (3) Min[$x_1, x_2, \dots$] | 取 $x_1, x_2, \dots$ 中的最小值; |
| (4) N[expr] | 表达式及其精度近似值; |
| (5) N[expr, n] | 表达式的 n 位近似值, n 为任意正整数. |

2. 基本初等函数

- | | |
|--|----------------|
| (1) Sqrt[x] | $\sqrt{x}$; |
| (2) x^n | 幂函数; |
| (3) Exp[x] | 以 e 为底的指数函数; |
| (4) Log[x] | 以 e 为底的对数函数; |
| (5) Log[a, x] | 以 a 为底的对数函数; |
| (6) Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x], Sec[x], Csc[x] | 三角函数; |
| (7) ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x], ArcCot[x] | 反三角函数. |

需要说明的是,在 Mathematica 中,函数名和自变量之间的分隔符是方括号“ $[]$ ”,而不是圆括号“()”.例如,正弦函数表示为 Sin[x].要注意,三角函数自变量的单位是弧度.

3. 命令函数

作函数图像的函数 Plot[$f[x], \{x, x_{\min}, x_{\max}\}$], 解方程函数 Solve[eqn, x], 求导函数

$D[f[x], x]$ 等, 都是命令函数.

数学函数和命令函数统称为内建函数. 使用时应注意, Mathematica 中的命令严格区分大小写. 一般地, 内建函数首字母必须为大写, 函数名是由几个单词构成的, 则每个单词首字母也必须大写. 例如, 求局部极小值函数为 $\text{FindMinimum}[f[x], \{x, x_0\}]$.

4. 自定义函数

1) 不带附加条件的自定义函数

命令格式为“ $f[x_]$ 表达式”或“ $f[x_]:=$ 表达式”.

执行时系统会把表达式中的 x 都换为 $f(x)$ 的自变量 x (而不是 x_0). 函数的自变量具有局限性, 只对所在的函数起作用, 函数执行结束后就没有了, 不会改变其他全局定义的同名变量的值.

例 3 定义函数 $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x^2 - 1} + \sin x$, 并求 $x = 1, 1.5, \frac{\pi}{3}$ 时的值, 再求 $f(2x+1)$.

解 求解过程如图 0.10 所示.



图 0.10

注: “ $\ln[2]$ ”和“ $\ln[3]$ ”中, 前者按整数计算, 后者按实数计算.

2) 带有附加条件的自定义函数

命令格式为“ $f[x_]:=$ 表达式/条件”.

当条件满足时才把表达式赋给 $f(x)$.

需要说明的是:

(1) 附加条件经常写成用关系运算符连接的两个表达式, 称为关系表达式. 关系运算符有“ $=$ ”(等于), “ $!=$ ”(不等于), “ $>$ ”(大于), “ $>=$ ”(大于等于), “ $<$ ”(小于), “ $<=$ ”(小于等于);

(2) 用一个关系表达式只能表示一个条件, 如表示多个条件的组合, 必须用逻辑运算符将多个关系表达式组织到一起, 常用的逻辑运算符有“ $\&\&$ ”(与), “ $\|$ ”(或), “ $!$ ”(非).

例 4 设有分段函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & 0 < x \leq e, \\ \sqrt{x}, & x > e, \end{cases}$$

求当 $x = -100, 1.5, 3, 100$ 时的函数值, 结果保留 20 位有效数字.

解 求解过程如图 0.11 所示.

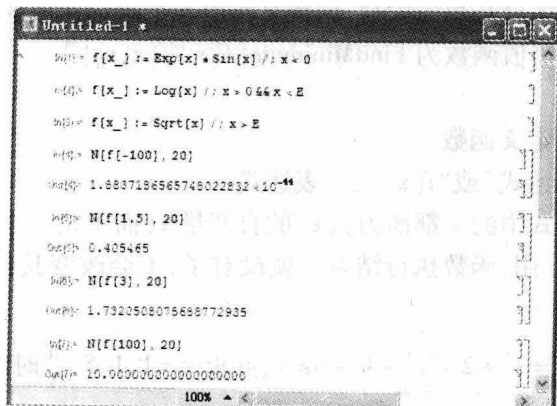


图 0.11

课堂练习

1. 将 $\frac{15}{16}$ 转换成实数, 结果分别保留 20 位和 10 位有效数字.
2. 将表达式 $(x-y)^3(x+2y^2)$ 展开.
3. 定义函数 $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \cos x$, 并求出 $x = 1.3, 1, \frac{\pi}{2}$ 时的函数值, 再求 $f(x+2)$.
4. 设有分段函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cos x, & x \leq 0, \\ \log_2 x, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 1, & x > 2, \end{cases}$$

求当 $x = -5, 3, 1$ 时的函数值, 结果保留 20 位有效数字.



第1章 利用 Mathematica 求极限

用 Mathematica 求极限常用的命令格式和功能如表 1.1 所示。

表 1.1

命令格式	功 能
<code>Limit[f[x], x -> x₀]</code>	$x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限
<code>Limit[f[x], x -> x₀, Direction -> -1]</code>	$x \rightarrow x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的极限
<code>Limit[f[x], x -> x₀, Direction -> 1]</code>	$x \rightarrow x_0^-$ 时函数 $f(x)$ 的极限

需要说明的是,“ $x \rightarrow x_0$ ”中的箭头可用键盘上的减号和大于号输入,也可用系统自带的工具栏输入;趋向的点可以是常数,也可以是 $+\infty$ (Infinity) 和 $-\infty$ (-Infinity)。

例 1.1 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}.$$

解 求解过程如图 1.1 所示。

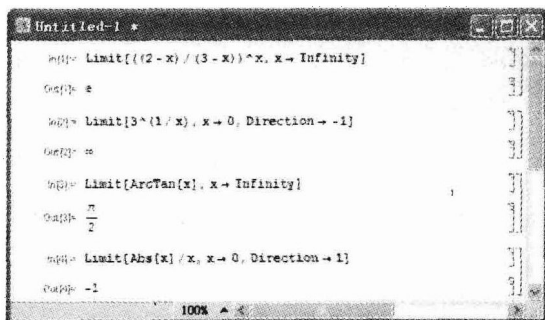


图 1.1

课堂练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x - 3};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}.$$