“十一五”规划教材

教育部高等理工教育数学基础课程

教学改革与实践项目

高等数学

学习指导

（下册）

主编 王 霞 王玉杰

主审 李 伟

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

“十一五”规划教材
教育部高等理工教育数学基础课程
教学改革与实践项目

高等数学
学习指导
（下 册）

主编　王　霞　王玉杰
主审　李　伟

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是与李伟教授主编、马知恩教授主审的《高等数学》(由西安交通大学出版社出版)下册相配套的学习指导书,按教材的章节顺序共分五章:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章按不同的知识内容分为不同的单元,每一单元有知识要点、释疑解惑、例题解析三部分,每一章配备了自测题,在每章的最后还附上了《高等数学》教材各节习题中B组题的选解。

本书与教材具有相对的独立性,适于从事高等数学课程教学的老师与学生阅读,也可作为工科院校高等数学习题课教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导.下册/王霞,王玉杰主编. —西安:西安交通大学出版社,2010.3
ISBN 978-7-5605-3369-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②王… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第037464号

书　　名　高等数学学习指导(下册)
主　　编　王　霞　王玉杰
责任编辑　张　梁　刘雅洁

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西元盛印务有限公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张**　12.25　**字数**　226千字
版次印次　2010年3月第1版　2010年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3369-8/O·308
定　　价　19.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

前言

本书是与李伟教授主编、马知恩教授主审的《高等数学》(由西安交通大学出版社出版)下册相配套的学习指导书,适于从事高等数学课程教学的老师与学生阅读,也可作为工科院校高等数学习题课教材。

高等数学是理工科院校的一门重要基础课,为了帮助读者在掌握数学概念、计算技能和数学思维等方面得到充分的锻炼,培养学生空间想象能力、逻辑思维能力和科学表达能力,在对教学大纲和课程内容深入研究和理解的基础上,我们编写了此书。在编写时,我们对应教材的顺序,将每章分为若干个单元,每单元包括如下几部分内容:

一、知识要点

该部分提纲挈领地归纳本单元的主要内容,便于读者对本单元的知识点有比较清晰的了解与掌握。

二、释疑解惑

由于《高等数学》内容较多,尤其是下册具有更高的抽象性,读者在学习基本概念时往往理解不深、不透,总是停留于表面,因此我们以问题的形式,针对本单元内容的重点、难点及易混淆的问题进行剖析,以帮助读者释疑解惑,加深对概念、定理的理解。有些问题的解答还对教学内容作了补充和提高,以供一些学有余力的学生阅读参考。

三、例题解析

按照本单元的教学要求,在教材原有例题和习题的基础上,适当选取概念性、启发性或综合性较强的例题。本着用“已知”认识“未知”、用“已知”研究“未知”、用“已知”解决“未知”的原则,对每道例题进行分析,讲清解题思路,并给出详细解答过程。在同类型例题后加以归纳总结,帮助读者了解各种解题方法及规律,借助这些例题培养读者良好的思维习惯,提高分析问题解决问题的能力。

每一章还配备了自测题及其答案,以供读者了解知识的掌握程度。

此外在每章的最后还附上了《高等数学》教材各节习题中B组题的选解，供读者参考。

本书由五位教师编写（按编写的章节次序排列）：王玉杰（第7章）、孙成功（第8章）、王爱平（第9章）、刘寅立（第10章）、王霞（第11章）。

在本书的编写过程中，李伟教授花费了大量时间对本书进行审阅，在此对他表示衷心感谢，同时还得到了天津科技大学理学院数学系各位教师的大力支持和帮助，在此向他们致以诚挚的谢意！

限于作者的水平，本书难免还存在不足之处，恳请读者批评指正。

作者

2009年12月

目 录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

第 1 单元　向量代数

一、知识要点

1. 向量的概念.

2. 向量的线性运算.

3. 单位向量的意义.

4. 向量的数量积与向量积,数量积与向量积的性质.

5. 两向量之间的关系:

(1) 两向量相等;

(2) 两向量平行;

(3) 两向量相互垂直.

6. 向量的模、方向余弦及两向量间的夹角.

7. 向量在坐标轴上的投影及其性质.

8. 一个向量在另一向量上的投影的意义、计算及性质.

二、释疑解惑

1. 向量的坐标与一点的坐标相同吗?

答　不同.向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 a_x、a_y、a_z 分别是 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y、z 轴上的投影,等于向量的终点坐标减去始点坐标,只有始点在原点的向量,它的坐标从数值上才与终点的坐标相同.

2. 将向量平移后,向量的坐标是否改变?

答　不变.由于向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 a_x、a_y、a_z 分别等于 $\boldsymbol{a}$ 的模与其相应的方向余弦的乘积,而向量的模和方向都不变,所以将向量平移后,向量的坐标不变.

3. 向量的坐标分解式有何意义?

答　有了向量的坐标分解式就可利用向量所满足的运算律(交换律、分配律、结合律)进行向量的运算,从而得出向量运算的坐标表达式.

4. 向量之间能比较大小吗?

答　不能.因为向量是既有大小,又有方向的量,而方向无所谓大小.在向量的描述中所说的“既有大小”是指向量的模的大小.

5. 向量的数量积与向量积的本质区别是什么？如果要求一个与已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都垂直的向量应该如何求？

答 两向量的数量积与向量积是两个本质完全不同的概念，两向量的数量积是一个数，而两向量的向量积是一个向量. 因此，要求两向量的向量积，不仅要确定它的大小(模)，还要确定它的方向. 由两向量向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的定义知：要求一个与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都垂直的向量，可以通过求它们的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 得到.

6. 在向量的数量积、向量积运算中，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 以及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，能否推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$？

答 不能. 事实上，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，利用分配律可得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，由此可推出 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，但无法得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 例如：$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(4,5,10)$，$\boldsymbol{c}=(-1,1,0)$，满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$. 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，利用分配律可推出 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$，也无法得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 例如：$\boldsymbol{a}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,-4)$，$\boldsymbol{c}=(1,1,1)$，满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$. 可见，消去律对于向量的数量积和向量积都不成立，这与数的运算律不同.

7. 一个非零向量的单位向量是一个非常重要的概念，如何求一个非零向量的单位向量？

答 求一个非零向量的单位向量一般有两种方法：

(1) 设非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right\}$；

(2) $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，其中 α、β、γ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，而 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

8. 如何理解向量在轴上的投影？如何求一向量在另一向量上的投影？

答 设 u 为一数轴，O 为其坐标原点，其单位向量为 $\boldsymbol{e}$. 设有向量 $\overrightarrow{OM}$，过 M 点作 u 轴的垂直平面交 u 轴于点 M'，如图 7-1 所示. 点 M' 在 u 轴上的坐标 λ 即为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的投影，并且

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{OM}=|\,\overrightarrow{OM}\,|\cos\varphi$$

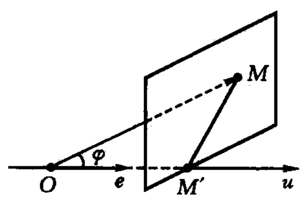

图 7-1

这里要特别注意：投影是数！

求一向量在另一向量上的投影一般有三种方法：

(1) 利用投影定理，这时需知道两向量之间的夹角及被投影向量的模；

(2) 利用 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$;

(3) 利用 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{b}$.

9. 判定两向量平行、垂直的方法分别有哪些？若其中有零向量，这些方法还适用吗？

答　(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，满足 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

由于我们把零向量的方向看成是任意的，因此当其中有零向量时，以上方法也适用.

三、例题解析

例 1　试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边的一半.

分析　证明向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的方法通常有三种：①存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，满足 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；②$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；③$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的对应坐标成比例. 后两种方法需要用坐标或者夹角，题目中没有给出向量的坐标，因此用第一种方法来证明.

证明　设三角形为 ABC，D、E 分别是 AB、AC 边的中点，如图 7-2 所示，则有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

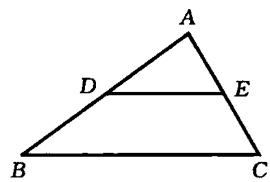

图 7-2

所以 $\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC}$，且 $|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

例 2　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，试证 A、B、D 三点共线.

分析　用向量证明三点共线只要证明有一个公共点的两向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 平行即可. 由例 1 的分析，这里选择方法①来证明，即证存在数 λ，使得 $\overrightarrow{DB}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

证明　$-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b})+8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BD}$，又它们都过 B 点，故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线，即 A、B、D 三点共线.

例 3　已知三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 两两都不平行，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，试证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

分析　由例 1 的分析知，两向量平行的充要条件有三个，由于本题中没有给出

向量的坐标，因此，这里仍采用例 1 与例 2 的方法.

证明 注意到 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 互不平行及零向量与任何向量皆平行，故 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 皆不为 $\boldsymbol{0}$. 由于 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\parallel\boldsymbol{a}$. 故存在实数 λ_1、λ_2，使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\lambda_2\boldsymbol{a}\end{cases}$$

两式相减得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{c}-\lambda_2\boldsymbol{a}$，于是有

$$(1+\lambda_2)\boldsymbol{a}-(1+\lambda_1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

即

$$(1+\lambda_2)\boldsymbol{a}=(1+\lambda_1)\boldsymbol{c}$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，且皆不为零向量，只有 $1+\lambda_2=0,1+\lambda_1=0$，因此 $\lambda_1=\lambda_2=-1$. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

小结 用向量证明几何问题，首先要熟悉向量的一些基本概念、运算法则及运算规律，熟悉平面、空间图形的各类关系，要善于根据已知条件分析题目，作出草图，从而运用向量运算达到解题的目的. 用向量证明几何问题，往往有的既可以用坐标形式，也可以不用坐标形式，这时要结合题目所给条件，确定采取的方法. 以上三例中由于已知中未给出向量的坐标，因而避开了用坐标的方法.

例 4 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

分析 见图 7-3，AB 为直径，C 点在圆周上，O 点为圆心，要证明$\angle ACB$ 为直角，只需证明$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$，而$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$等价于$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{0}$，因此只需证明$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{0}$即可.

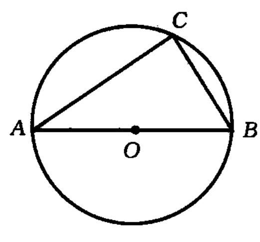

图 7-3

证明 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$

因为$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$ (R 为圆的半径)，故

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}+R^2-R^2-\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{CO}\end{aligned}$$

由于$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{CO}=0$，则$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$，即直径所对的圆周角是直角.

例 5 已知$\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,-2,-14)$，求$\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

分析 欲求角平分线上的单位向量，由于 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，因此只需先在角平分线上求出任一非零向量，它可以看做是菱形的对角线向量，由此不难求出单位向量.

解 在$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$上分别取 B'、C'，使$|\overrightarrow{AB'}|=|\overrightarrow{AC'}|$，以$\overrightarrow{AB'}$、$\overrightarrow{AC'}$为邻边作平行四边形 $AC'DB'$（见图 7-4），则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$，即为$\angle ABC$ 的平分线上的向量，

特别地可取$\overrightarrow{AB'}$、$\overrightarrow{AC'}$为单位向量

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}}(-3,0,4)=\frac{1}{5}(-3,0,4)$$

$$\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\sqrt{5^2+(-2)^2+(-14)^2}}(5,-2,-14)$$

$$=\frac{1}{15}(5,-2,-14)$$

于是

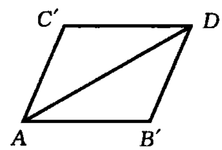

图 7-4

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{5}(-3,0,4)+\frac{1}{15}(5,-2,-14)$$

$$=(-\frac{3}{5}+\frac{5}{15},0-\frac{2}{15},\frac{4}{5}-\frac{14}{15})$$

$$=-\frac{2}{15}(2,1,1)$$

$\overrightarrow{AD}$上的单位向量有两个向量，它们为

$$\pm\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$$

小结　利用向量解决几何问题时，要与几何图形相联系．如例 4 就是根据已知条件分析题目作出草图，这样有利于达到解题的目的；例 5 利用了菱形的对角线平分一组对角的性质．

例 6　已知向量 $\boldsymbol{s}=(4,-3,2)$，一单位向量 $\boldsymbol{e}$ 与三坐标轴的夹角相等且为锐角，求 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{s}$．

分析　由于 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，所以 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{s}$，而向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标已知，只须求出单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的坐标即可．根据已知条件，首先把单位向量用方向余弦表示．

解　设 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$．由已知 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$ 且 α、β、γ 均为锐角，所以 $3\cos^2\alpha=1$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{s}=(4,-3,2)\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})=\sqrt{3}$$

例 7　已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,0)$，求 $\boldsymbol{c}$，使 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $|\boldsymbol{c}|=6$．

分析　由已知条件 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 以及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都垂直，因此 $\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$．再利用 $|\boldsymbol{c}|=6$ 进一步可确定 $\boldsymbol{c}$．

解　由题目的条件，$\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，因此存在不为零的常数 λ，使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-2\\1&1&0\end{vmatrix}=2\lambda\boldsymbol{i}-2\lambda\boldsymbol{j}+\lambda\boldsymbol{k}$$

因为$|\boldsymbol{c}|=6$，所以$\sqrt{\lambda^2[2^2+(-2)^2+1^2]}=6$，从而$\lambda=\pm 2$，故$\boldsymbol{c}=(4,-4,2)$或$\boldsymbol{c}=(-4,4,-2)$.

例 8 已知$A(1,1,1)$、$B(3,0,2)$、$C(-2,2,-1)$三点，求一个与向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$都垂直的向量并求三角形ABC的面积.

分析 因为平行四边形的面积等于它两邻边长的积乘以夹角的正弦，所以由两向量的向量积的模的定义有，两不共线向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的向量积的模等于以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为邻边所构成的平行四边形的面积，当然也可求三角形的面积了.

解 (1) 因为$\overrightarrow{AB}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,1,-2)$，所以与向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$都垂直的向量为

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 1 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

(2) 由(1)可得三角形ABC的面积为$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$，而$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$，于是所求面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

小结 (1) 求与两已知向量都垂直的向量时一般是考虑用向量积；

(2) 求三角形面积或平行四边形面积时一般要与两向量的向量积相联系.

第 2 单元　平面与直线　曲面与曲线

一、知识要点

1. 平面方程、直线方程.

2. 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及它们之间相互平行、垂直的条件.

3. 点到平面和点到直线的距离.

4. 曲面方程、曲线方程.

5. 旋转曲面、柱面、二次曲面的方程及其图形.

6. 空间曲线在坐标面上的投影.

二、释疑解惑

1. 一个平面能有多少个法向量？它们可以分成几类？

答 垂直于平面的任一非零向量称为平面的法向量. 由于在平面内任意点处都可以沿两个不同的方向作出无数个法向量，因此一个平面有无数个法向量. 若把具有相同方向的法向量看做一类，则它们从方向上可以分为两类，在每一类中随着

其模的不同又分为不同的向量.在建立平面方程时,从中任选一个即可.

2. 已知一个平面的点法式或一般式方程,能从中确定平面的一个法向量吗?

答　能.从平面方程的建立过程可以看到,在平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 或一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中依次把 x、y、z 的系数 A、B、C 作分量组成的向量(A,B,C)一定是平面的一个法向量.

3. 一条直线有多少个方向向量? 它们可以分成几类?

答　与直线平行的非零向量称为直线的方向向量.与平面的法向量类似,一条直线的方向向量也有无数个,它们从方向上可以分为两类.在建立直线方程时,从中任选一个即可.

4. 能从给定的直线方程中确定出直线的方向向量吗?

答　能.

(1) 若所给的方程是直线的一般式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

因为该直线是平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线,所以直线的方向向量既垂直于 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,又垂直于 π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$,因此该直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

(2) 若所给的方程是直线的点向式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

则该直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$.

(3) 若所给的方程是直线的参数方程$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$,由参数方程与点向式方程之间的关系知,该直线的方向向量的坐标依次为 x、y、z 的表达式中参数 t 的系数,即方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,且参数方程中的常数项构成的点(x_0,y_0,z_0)为该直线上的一个点.若所给的直线方程是一般方程$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$,也可以把变量 x、y、z 中的某一变量作为参数,通过解二元一次方程组,将另外两个变量用该变量来表示,就可将一般方程化为以该变量为参数的参数方程,然后就可以写出方向向量了.这个方法非常简单,希望读者掌握.

5. 平面束的方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 是否包含所有过直线 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面?

答 不是.从平面束方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 中看到,无论 λ 如何取值,都无法由它得出平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,因此该方程不包含平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.因而,在利用平面束方程解题时应该对平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 是否符合题目要求加以注意.有时,也将平面束的方程写成 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$($\lambda$、$\mu$ 不同时为零)形式,而它是包含了所有过直线 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面.

6. 要说明一个方程 $F(x,y,z)=0$ 是某曲面 S 的方程,而曲面 S 是方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形,应该从几方面论述?

答 曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 应有下述关系:

(1) 曲面 S 上任意点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$;

(2) 不是曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$(或坐标满足 $F(x,y,z)=0$ 的点都在 S 上).

7. (1) 二元方程表示母线平行于坐标轴的柱面,如何判断柱面的母线与哪个坐标轴平行?

(2) 反过来,柱面方程是否一定为二(或一)元方程?

答 (1) 可以利用缺"谁"平行"谁"的原则来判断该柱面的母线与哪个坐标轴平行.这里缺"谁"中的"谁"是指方程中缺少的变量,平行"谁"中的"谁"是指与方程中缺少的那个变量同名的坐标轴.例如:方程 $x^2+y^2=a^2$ 中缺少变量 z(这里就是上述第一个"谁"),因此该柱面的母线平行于 z 轴(这里的 z 轴就是上述的第二个"谁").

(2) 柱面方程不一定为二(或一)元方程.一般地,二元方程可表示母线平行于坐标轴的柱面,而柱面的母线不一定平行于坐标轴.例如方程 $x+y+z=0$ 就表示平面(平面当然可认为是一种柱面),但它是三元方程.

8. 方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 一定表示空间曲线吗?

答 不一定.只有当 $F(x,y,z)=0$ 及 $G(x,y,z)=0$ 都为曲面的方程且它们所对应的曲面相交时,方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 才表示空间曲线.

9. 将坐标平面上的曲线绕此坐标平面里的一个坐标轴旋转所得的旋转曲面方程的特点是什么?

答　特点是：绕“谁”“谁”不变，另一做代换. 这里所说的绕“谁”中的“谁”是指坐标轴的名称. 比如，绕 z 轴时，“谁”就表示 z. “谁”不变中的“谁”是指曲线方程中的未知量的名称. 比如，当曲线绕 z 轴旋转一周得曲面时，原来曲线方程中的变量 z 不变，而另外的一个变量用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 去代换.

10. 如何求空间曲线关于坐标平面的投影柱面及其在坐标面上的投影曲线？

答　(1) 求空间曲线关于坐标平面的投影柱面的方法：

求空间曲线关于坐标面的投影柱面方程时可利用缺“谁”消去“谁”的原则来得到.

第一个“谁”是指要投影的坐标平面的名称中缺少的字母，如 xOy 平面的名称中缺少 z；第二个“谁”表示曲线方程中的变量，例如设曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{7-1}$$

求曲线 C 在 xOy 面上的投影柱面：由于 xOy 中缺少 z，就在方程组中消去变量 z，得一关于 x、y 的二元方程 $H(x,y)=0$，它就是曲线 C 关于坐标平面 xOy 的投影柱面方程；

同样，如果将方程(7-1)消去变量 x，就得到曲线 C 关于坐标面 yOz 的投影柱面方程 $R(y,z)=0$；用完全相同的方法，可以得到曲线 C 关于坐标面 zOx 的投影柱面方程为 $T(z,x)=0$.

(2) 求空间曲线在坐标面上的投影曲线的方法：

把(1)中得到的二元方程与“谁”$=0$ 联立组成的方程组就为空间曲线在该坐标面上的投影曲线方程，这里的“谁”是指消去的那个变量. 如消去 z 就把上边的二元方程 $H(x,y)=0$ 与方程 $z=0$ 联立，得 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，它即为空间曲线 C 在坐标面 xOy 上的投影曲线方程；同理可得，曲线 C 在坐标面 yOz 上的投影曲线方程为 $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$；曲线 C 在坐标面 zOx 上的投影曲线方程为 $\begin{cases} T(z,x)=0 \\ y=0 \end{cases}$

三、例题解析

例 1　求通过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $45°$ 角的平面方程.

分析　所求的平面过已知直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$，自然想到利用过已知直线的平面束方程，然后再利用所求平面与已知平面成 $45°$ 这个条件来确定其待定常数，从而确定所求平面.

解 过已知直线的平面束方程为

$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$，即$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$

该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$，已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,-4,-8)$. 由已知这两个平面成 45°角，有

$$\cos 45^\circ=\frac{|1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$
$$=\frac{|9\lambda-27|}{\sqrt{2\lambda^2+27}\times 9}=\frac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$$

解得 $\lambda=-3/4$. 因此，所求平面方程为 $x+20y+7z-12=0$.

另外，容易验证平面 $x-z+4=0$ 与已知平面也成 45°角（在此设平面夹角为 θ），实际上

$$\cos\theta=\frac{|1\times 1-4\times 0-8\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故所求平面为 $x+20y+7z-12=0$ 和 $x-z+4=0$.

小结 (1) 一般情况下，要求过某直线且满足其他条件的平面方程时，往往考虑用过定直线的平面束方程作工具；

(2) 正如在释疑解惑第 5 题中所述：过直线 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 中并不包含平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，因此最后还需验证一下此平面是否也为所求平面.

例 2 求过点 $M(-1,2,1)$ 且与直线 l_1: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 和直线 l_2: $\begin{cases}x=1\\y+z+3=0\end{cases}$ 都平行的平面方程.

分析 由于所求平面与两已知直线均平行，故该平面的法向量与这两条已知直线的方向向量均垂直. 因此利用向量的向量积即可求出平面的法向量. 又已知平面上的一点 M，从而采用平面的点法式方程即可求得该平面方程.

解 由于 l_2: $\begin{cases}x=1\\y+z+3=0\end{cases}$ 可写成 $\begin{cases}x=1\\\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-1}\end{cases}$，因此知 l_2 的一方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(0,1,-1)$，又知 l_1 的一方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,2,1)$，因为所求平面与 l_1、l_2 均平行，所以该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$ 均垂直. 于是有

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$